

2023-2024 学年江苏省无锡市锡山区锡东片七年级（下）期中数学试卷

一、选择题（每题 3 分，共 30 分。）

1. (3 分) 下列四幅图案可以看作是以图案中某部分为基本图形平移得到的是 ()



2. (3 分) 下列计算正确的是 ()

A. $a^3 + a^2 = a^5$

B. $a^3 \cdot a^2 = a^5$

C. $(2a^2)^3 = 6a^6$

D. $a^6 \div a^2 = a^3$

3. (3 分) 下列长度的两条线段与长度为 5cm 的线段首尾顺次连接能组成三角形的是 ()

A. $1\text{cm}, 3\text{cm}$

B. $1\text{cm}, 4\text{cm}$

C. $1\text{cm}, 7\text{cm}$

D. $2\text{cm}, 6\text{cm}$

4. (3 分) 若 $x - 3y - 2 = 0$, 则 $2^x \div 8^y$ 的值为 ()

A. $\frac{1}{4}$

B. 4

C. 8

D. 16

5. (3 分) 下列不能用平方差公式运算的是 ()

A. $(x+2)(x-2)$

B. $(x+2)(-x+2)$

C. $(-x+2)(-x-2)$

D. $(x+2)(2+x)$

6. (3 分) 下列说法正确的是 ()

A. 多边形的边数越多, 外角和越大

B. 三角形的一个外角等于两个内角的和

C. 直角三角形只有一条高

D. 三角形的三条角平分线的交点在三角形内

7. (3 分) 在多项式 $4x^2 - 2x + 1$ 中, 若添加一个单项式使其成为一个整式的完全平方, 则加上的单项式不可以是 ()

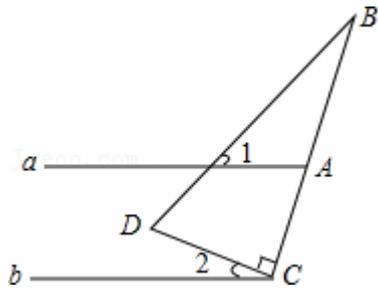
A. $6x$

B. $4x$

C. $-2x$

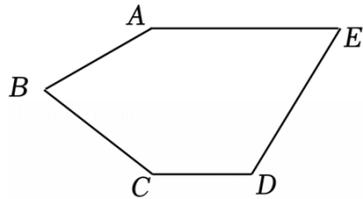
D. $-3x^2$

8. (3 分) 如图, 直线 $a \parallel b$, $\text{Rt}\triangle BCD$ 如图放置, $\angle DCB = 90^\circ$. 若 $\angle 1 + \angle B = 70^\circ$, 则 $\angle 2$ 的度数为 ()



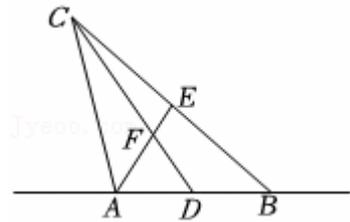
- A. 20° B. 40° C. 30° D. 25°

9. (3分) 如图, 已知 $AE \parallel CD$, 设 $\angle A + \angle B + \angle C = \alpha$, $\angle D + \angle E = \beta$, 则 ()



- A. $\alpha - \beta = 0$ B. $2\alpha - \beta = 0$ C. $\alpha - 2\beta = 0$ D. $3\alpha - 2\beta = 0$

10. (3分) 如图, 点 C 为直线 AB 外一动点, $AB = 6$, 连接 CA 、 CB , 点 D 、 E 分别是 AB 、 BC 的中点, 连接 AE 、 CD 交于点 F , 当四边形 $BEFD$ 的面积为 5 时, 线段 AC 长度的最小值为 ()

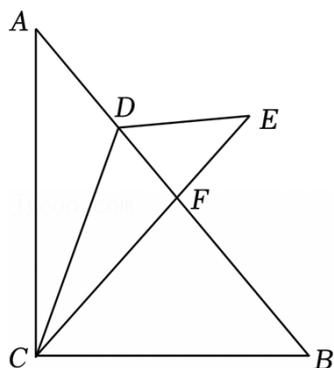


- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

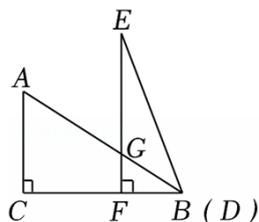
二、填空题 (每题 3 分, 共 24 分.)

11. (3分) 花粉的质量很小, 一粒某种植物花粉的质量约为 0.000037 毫克, 那么 0.000037 可用科学记数法表示为 _____.
12. (3分) 南京大报恩寺琉璃塔地基平面可以看成八边形, 它的每个内角都相等, 则每个内角的度数是 _____ $^\circ$.
13. (3分) 对于① $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$, ② $(x+3)(x-1) = x^2 + 2x - 3$. 从左到右的变形中, 属于因式分解的是 _____ (填序号).
14. (3分) 整式 $x^2 - 1$ 与 $x^2 + x$ 的公因式是 _____.
15. (3分) 计算: $3^{10} \times (-\frac{1}{9})^5 =$ _____.
16. (3分) 若 $(y^2 + ay)(2y - 4)$ 的结果中不含 y^2 项, 则 a 的值为 _____.
17. (3分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle B - \angle A = 10^\circ$, D 是 AB 上一点, 将 $\triangle ACD$ 沿 CD 翻折

后得到 $\triangle CED$ ，边 CE 交 AB 于点 F 。若 $\triangle DEF$ 中有两个角相等，则 $\angle ACD = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



18. (3分) 已知两个完全相同的直角三角形纸片 $\triangle ABC$ 、 $\triangle DEF$ ，如图放置，点 B 、 D 重合，点 F 在 BC 上， AB 与 EF 交于点 G 。 $\angle C = \angle EFB = 90^\circ$ ， $\angle E = \angle ABC = 30^\circ$ ，现将图中的 $\triangle ABC$ 绕点 F 按每秒 15° 的速度沿逆时针方向旋转 180° ，在旋转的过程中， $\triangle ABC$ 恰有一边与 DE 平行的时间为秒。



三、解答题 (共 8 大题, 共 76 分.)

19. (16分) 计算:

(1) $(\frac{1}{2})^{-1} + (-1)^3 + (\pi - 2024)^0$;

(2) $2m^5 \cdot 3m - (-2m^3)^2$;

(3) $3(\frac{1}{3}a - b)^2$;

(4) $(x - y - 3)(x + y - 3)$.

20. (16分) 把下列各式因式分解:

(1) $mn^2 - 2n$;

(2) $4a^2 - 36$;

(3) $(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2$;

(4) $9x^2 - 6x(y - 1) + (y - 1)^2$.

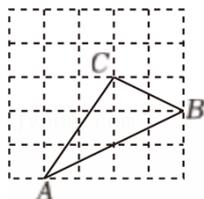
21. (6分) 先化简, 再求值: $(2x+3)(2x-3) - x(5x+4) - (x-1)^2$, 其中 $x^2 + x - 3 = 0$.

22. (7分) 如图, 每个小方格都是边长为 1 个单位的小正方形, 点 A , B , C 均在格点上.

(1) 标出一个格点 D , 使线段 CD 所在直线与线段 AB 所在直线互相垂直;

(2) 三角形 ABC 的面积为 _____;

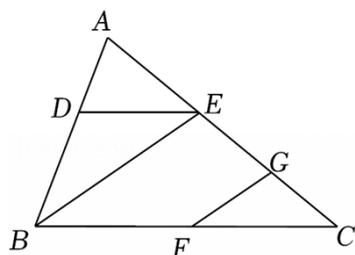
(3) 标出所有的格点 E , 使三角形 ABC 与三角形 ABE 的面积相等.



23. (6分) 如图, D 、 E 、 F 、 G 是 $\triangle ABC$ 边上的点, $\angle ABC = \angle ADE$, $\angle DEB = \angle GFC$.

(1) 求证: $BE \parallel GF$;

(2) 若 BE 平分 $\angle ABC$, $\angle BDE = 110^\circ$, $\angle C = 50^\circ$, 求 $\angle CGF$ 的度数.



24. (7分) 阅读材料: 若 $m^2 - 2mn + 2n^2 - 8n + 16 = 0$, 求 m 、 n 的值.

解: $\because m^2 - 2mn + 2n^2 - 8n + 16 = 0$,

$$\therefore (m^2 - 2mn + n^2) + (n^2 - 8n + 16) = 0$$

$$(m - n)^2 + (n - 4)^2 = 0,$$

$$\therefore (m - n)^2 = 0 \text{ 且 } (n - 4)^2 = 0,$$

$$\therefore m = n = 4.$$

根据你的观察, 探究下面的问题:

(1) $a^2 - 2a + 1 + b^2 = 0$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 已知 $x^2 + 2y^2 - 2xy + 4y + 4 = 0$, 求 x^y 的值;

(3) 已知 $\triangle ABC$ 的三边长 a 、 b 、 c 都是正整数, 且满足 $2a^2 + b^2 - 4a - 10b + 27 = 0$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

25. (8分) 【教材重现】如图 1, 边长为 a 的大正方形中有一个边长为 b 的小正方形, 把图 1 中的阴影部分拼成一个长方形 (如图 2 所示).

上述操作能验证的公式是 _____.

【类比探究】把上述两个正方形按照如图 3 所示的方式拼接, 其中 B 、 C 、 G 三点在同一直线上. 若 $a + b = 20$, $ab = 80$, 求阴影部分的面积.

【拓展应用】根据前面的经验探究: 若 x 满足 $(3 - 4x)(2x - 5) = \frac{9}{2}$, 求 $(3 - 4x)^2 + 4(2x - 5)^2$ 的值.

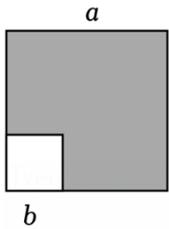


图1

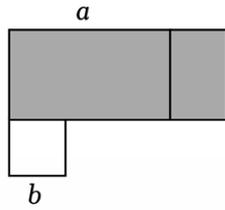


图2

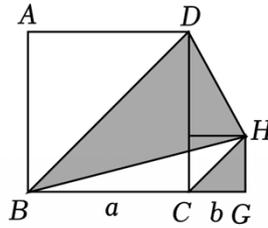
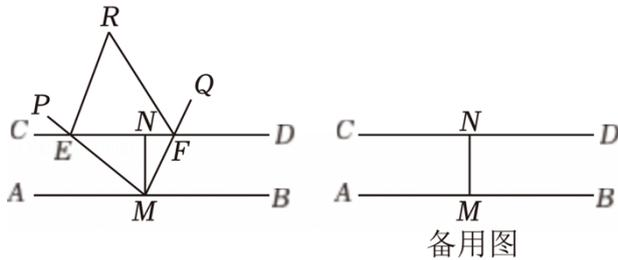


图3

26. (10分) 如图, 直线 $AB \parallel CD$, $MN \perp AB$, 分别交 AB, CD 于点 M, N , 射线 MP, MQ 分别从 MA, MN 同时开始绕点 M 顺时针旋转, 分别与直线 CD 交于点 E, F , 射线 MP 每秒转 10° , 射线 MQ 每秒转 5° , ER, FR 分别平分 $\angle PED, \angle QFC$, 设旋转时间为 t 秒 ($0 < t < 18$).



(1) 用含 t 的代数式表示: $\angle AMP =$ _____ $^\circ$, $\angle QMB =$ _____ $^\circ$;

(2) 当 $\angle MEN + \angle MFN = 130^\circ$ 时, $t =$ _____;

(3) 试探索 $\angle EFR$ 与 $\angle ERF$ 之间的数量关系, 并说明理由;

(4) 若 $\angle PMN$ 的角平分线与直线 ER 交于点 K , $\angle EKM$ 的度数是 _____.

2023-2024 学年江苏省无锡市锡山区锡东片七年级（下）期中数学试卷

参考答案与试题解析

| | | | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 答案 | B | B | D | B | D | D | B | A | C | C |

一、选择题（每题 3 分，共 30 分。）

1. (3 分) 下列四幅图案可以看作是以图案中某部分为基本图形平移得到的是 ()



【分析】 根据图形平移的性质即可得出结论.

【解答】 解: *A*、利用图形旋转而成, 不符合题意;

B、利用图形平移而成, 符合题意;

C、利用轴对称而成, 不符合题意;

D、利用轴对称而成, 不符合题意.

故选: *B*.

【点评】 本题考查的是利用平移设计图案, 熟知图形平移不变性的性质是解答此题的关键.

2. (3 分) 下列计算正确的是 ()

A. $a^3 + a^2 = a^5$

B. $a^3 \cdot a^2 = a^5$

C. $(2a^2)^3 = 6a^6$

D. $a^6 \div a^2 = a^3$

【分析】 直接利用同底数幂的乘除运算法则以及积的乘方运算法则分别计算得出答案.

【解答】 解: *A*、 $a^3 + a^2$, 无法计算, 故此选项错误;

B、 $a^3 \cdot a^2 = a^5$, 正确;

C、 $(2a^2)^3 = 8a^6$, 故此选项错误;

D、 $a^6 \div a^2 = a^4$, 故此选项错误;

故选: *B*.

【点评】 此题主要考查了同底数幂的乘除运算和积的乘方运算, 正确掌握运算法则是解题关键.

3. (3分) 下列长度的两条线段与长度为 5cm 的线段首尾顺次连接能组成三角形的是 ()

- A. $1\text{cm}, 3\text{cm}$ B. $1\text{cm}, 4\text{cm}$ C. $1\text{cm}, 7\text{cm}$ D. $2\text{cm}, 6\text{cm}$

【分析】在运用三角形三边关系判定三条线段能否构成三角形时, 只要两条较短的线段长度之和大于第三条线段的长度即可判定这三条线段能构成一个三角形, 由此即可判断.

【解答】解: A 、 $1+3<5$, 长度是 1cm 、 3cm 、 5cm 的线段不能组成三角形, 故 A 不符合题意;

B 、 $1+4=5$, 长度是 1cm 、 4cm 、 5cm 的线段不能组成三角形, 故 B 不符合题意;

C 、 $1+5<7$, 长度是 1cm 、 7cm 、 5cm 的线段不能组成三角形, 故 C 不符合题意;

D 、 $2+5>6$, 长度是 2cm 、 6cm 、 5cm 的线段能组成三角形, 故 D 符合题意.

故选: D .

【点评】本题考查三角形三边关系, 关键是掌握三角形三边关系定理.

4. (3分) 若 $x - 3y - 2 = 0$, 则 $2^x \div 8^y$ 的值为 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. 4 C. 8 D. 16

【分析】先对条件进行变形, 再计算原式, 整体代入即可.

【解答】解: $\because x - 3y - 2 = 0$,

$$\therefore x - 3y = 2,$$

$$\therefore 2^x \div 8^y$$

$$= 2^x \div 2^{3y}$$

$$= 2^{x-3y}$$

$$= 2^2$$

$$= 4.$$

故选: B .

【点评】本题主要考查幂的乘方和积的乘方, 熟记计算法则是解题的关键.

5. (3分) 下列不能用平方差公式运算的是 ()

- A. $(x+2)(x-2)$ B. $(x+2)(-x+2)$
C. $(-x+2)(-x-2)$ D. $(x+2)(2+x)$

【分析】利用平方差公式及完全平方公式逐项判断即可.

【解答】解: $(x+2)(x-2) = x^2 - 4$, 则 A 不符合题意;

$(x+2)(-x+2) = 4 - x^2$, 则 B 不符合题意;

$(-x+2)(-x-2) = x^2 - 4$, 则 C 不符合题意;

$(x+2)(2+x) = x^2 + 4x + 4$ ，则 D 符合题意；

故选： D 。

【点评】 本题考查平方差公式及完全平方公式，此为基础且重要知识点，必须熟练掌握。

6. (3分) 下列说法正确的是 ()

- A. 多边形的边数越多，外角和越大
- B. 三角形的一个外角等于两个内角的和
- C. 直角三角形只有一条高
- D. 三角形的三条角平分线的交点在三角形内

【分析】 根据多边形的外角和，三角形的外角性质，三角形的高与三角形的角平分线的性质进行判断即可。

【解答】 解：多边形的外角是 360° ，不会因边数的增加而改变，则 A 不符合题意；

三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和，则 B 不符合题意；

直角三角形有 3 条高，它们交于其直角顶点，则 C 不符合题意；

三角形的三条角平分线的交点在三角形的内部，则 D 符合题意；

故选： D 。

【点评】 本题考查多边形外角和及三角形的相关性质，熟练掌握其性质是解题的关键。

7. (3分) 在多项式 $4x^2 - 2x + 1$ 中，若添加一个单项式使其成为一个整式的完全平方，则加上的单项式不可能是 ()

- A. $6x$
- B. $4x$
- C. $-2x$
- D. $-3x^2$

【分析】 利用完全平方方式的特征进行计算，逐一判断即可解答。

【解答】 解： A 、 $4x^2 - 2x + 1 + 6x = 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$ ，故 A 不符合题意；

B 、 $4x^2 - 2x + 1 + 4x = 4x^2 + 2x + 1$ ，故 B 符合题意；

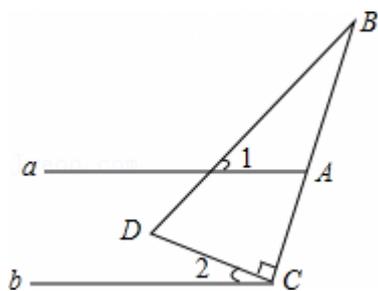
C 、 $4x^2 - 2x + 1 - 2x = 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$ ，故 C 不符合题意；

D 、 $4x^2 - 2x + 1 - 3x^2 = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ ，故 D 不符合题意；

故选： B 。

【点评】 本题考查了完全平方方式，熟练掌握完全平方方式的特征是解题的关键。

8. (3分) 如图，直线 $a \parallel b$ ， $Rt\triangle BCD$ 如图放置， $\angle DCB = 90^\circ$ 。若 $\angle 1 + \angle B = 70^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数为 ()



- A. 20° B. 40° C. 30° D. 25°

【分析】由三角形外角性质求出 $\angle 3$ 的度数，再由 a 与 b 平行，利用两直线平行同旁内角互补，得到 $\angle 3 + \angle 4 + \angle 2$ 的度数，根据 $\angle 3$ 与 $\angle 4$ 的度数求出 $\angle 2$ 的度数即可.

【解答】解： $\because \angle 3$ 为三角形的外角，

$$\therefore \angle 3 = \angle 1 + \angle B = 70^\circ,$$

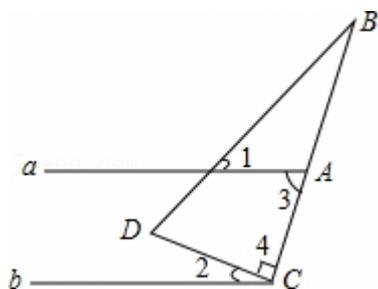
$$\because a \parallel b,$$

$$\therefore \angle 3 + \angle 4 + \angle 2 = 180^\circ,$$

$$\because \angle 4 = 90^\circ, \angle 3 = 70^\circ,$$

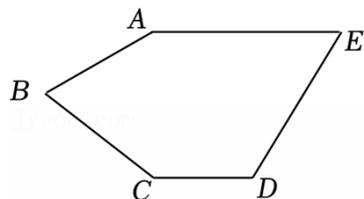
$$\therefore \angle 2 = 20^\circ.$$

故选：A.



【点评】此题考查了平行线的性质，熟练掌握平行线的性质是解本题的关键.

9. (3分) 如图，已知 $AE \parallel CD$ ，设 $\angle A + \angle B + \angle C = \alpha$ ， $\angle D + \angle E = \beta$ ，则 ()



- A. $\alpha - \beta = 0$ B. $2\alpha - \beta = 0$ C. $\alpha - 2\beta = 0$ D. $3\alpha - 2\beta = 0$

【分析】过 B 作 $BF \parallel AE$ 交 DE 于 F ，进而利用平行线的性质解答即可.

【解答】解：过 B 作 $BF \parallel AE$ 交 DE 于 F ，

$$\because AE \parallel CD,$$

$$\therefore BF \parallel CD,$$

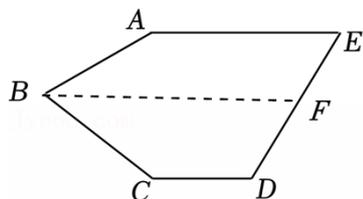
$$\therefore \angle E = \angle BFD, \angle BFD + \angle D = 180^\circ, \angle A + \angle ABF = 180^\circ, \angle FBC + \angle C = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle E + \angle D = 180^\circ, \angle A + \angle ABC + \angle C = 360^\circ,$$

$$\therefore \alpha = 2\beta,$$

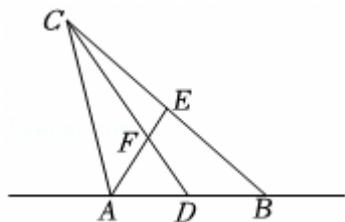
$$\text{即 } \alpha - 2\beta = 0,$$

故选：C.



【点评】 此题考查平行线的性质，关键是根据两直线平行，同位角相等和两直线平行，同旁内角互补解答.

10. (3分) 如图，点C为直线AB外一动点， $AB=6$ ，连接CA、CB，点D、E分别是AB、BC的中点，连接AE、CD交于点F，当四边形BEFD的面积为5时，线段AC长度的最小值为 ()



- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

【分析】 连接BF，过C点作 $CH \perp AB$ 于H，根据三角形中线的性质利用面积公式得出CH，进而利用距离最短解答即可.

【解答】 解：连接BF，过C点作 $CH \perp AB$ 于H，

$\because D, E$ 分别是 AB, BC 的中点，

$$\therefore S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADC} = S_{\triangle BDC}, S_{\triangle AFD} = S_{\triangle BFD}, S_{\triangle CEF} = S_{\triangle BEF},$$

$$\therefore S_{\triangle CEF} + S_{\text{四边形} BDFE} = S_{\triangle CEF} + S_{\triangle ACF}, S_{\triangle AFD} + S_{\triangle CEF} = S_{\triangle BEF} + S_{\triangle BFD} = S_{\text{四边形} BDFE} = 5,$$

$$\therefore S_{\text{四边形} BDFE} = S_{\triangle ACF} = 5,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACF} + S_{\text{四边形} BDFE} + S_{\triangle AFD} + S_{\triangle CEF} = 15,$$

$$\therefore \frac{1}{2} CH \cdot AB = 15,$$

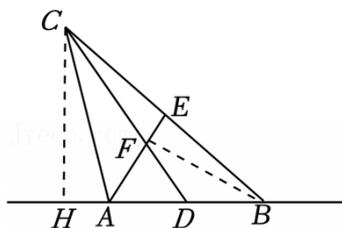
$$\therefore CH = 5,$$

\because 点到直线的距离垂线段最短，

$$\therefore AC \geq CH = 5,$$

∴AC 的最小值为 5,

故选: C.



【点评】此题考查三角形中线, 三角形的面积, 关键是根据三角形中线的性质利用面积公式得出 CH 解答.

二、填空题 (每题 3 分, 共 24 分.)

11. (3 分) 花粉的质量很小, 一粒某种植物花粉的质量约为 0.000037 毫克, 那么 0.000037 可用科学记数法表示为 3.7×10^{-5} .

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 ≥ 10 时, n 是正整数, 当原数绝对值 < 1 时, n 是负整数.

【解答】解: $0.000037 = 3.7 \times 10^{-5}$.

故答案为: 3.7×10^{-5} .

【点评】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

12. (3 分) 南京大报恩寺琉璃塔地基平面可以看成八边形, 它的每个内角都相等, 则每个内角的度数是 135° .

【分析】根据多边形的外角和为 360° 即可得出结果.

【解答】解: ∵一个八边形, 它的每个内角都相等,

∴这个八边形的每个外角都相等,

∴每个外角的度数 $= 360^\circ \div 8 = 45^\circ$,

∴每个内角的度数 $= 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

故答案为: 135.

【点评】本题考查多边形的内角与外角, 掌握多边形内角与相邻的外角互补, 且外角和为 360° 是解本题的关键.

13. (3 分) 对于 ① $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$, ② $(x+3)(x-1) = x^2 + 2x - 3$. 从左到右的变形中, 属于因式分解的是 ① (填序号).

【分析】利用因式分解的定义判断即可.

【解答】解：① $(x^2+2x-3)=(x+3)(x-1)$ ，符合因式分解的定义，符合题意；

② $(x+3)(x-1)=x^2+2x-3.$ ，从左到右的变形是整式乘法，不符合因式分解的定义，故本选项不符合题意.

故答案为：①.

【点评】此题考查的是因式分解的意义，把一个多项式化为几个整式的积的形式，这种变形叫做把这个多项式因式分解，也叫做分解因式.

14. (3分) 整式 x^2-1 与 x^2+x 的公因式是 $x+1$.

【分析】先利用平方差公式、提取公因式法分解因式，然后找出公因式即可.

【解答】解： $\because x^2-1=(x+1)(x-1)$ ， $x^2+x=x(x+1)$ ，

\therefore 整式 x^2-1 与 x^2+x 的公因式是 $x+1$ ，

故答案为： $x+1$.

【点评】本题考查了因式分解，熟练掌握公因式的确定方法是解题的关键.

15. (3分) 计算： $3^{10} \times (-\frac{1}{9})^5 =$ -1 .

【分析】利用幂的乘方与积的乘方的法则进行运算即可.

【解答】解： $3^{10} \times (-\frac{1}{9})^5$
 $= 3^{10} \times (-\frac{1}{3^{10}})$
 $= 3^{10} \times [-(\frac{1}{3})^{10}]$
 $= -(3 \times \frac{1}{3})^{10}$
 $= -1^{10}$
 $= -1.$

故答案为： -1 .

【点评】本题主要考查幂的乘方与积的乘方，解答的关键是对相应的运算法则的掌握.

16. (3分) 若 $(y^2+ay)(2y-4)$ 的结果中不含 y^2 项，则 a 的值为 2 .

【分析】现对原式展开，再进行合并同类项，最后是 y^2 项的系数为 0 即可求得.

【解答】解： $(y^2+ay)(2y-4)$
 $= 2y^3 - 4y^2 + 2ay^2 - 4ay$
 $= 2y^3 + (2a-4)y^2 - 4ay,$

$\therefore (y^2+ay)(2y-4)$ 的结果中不含 y^2 项,

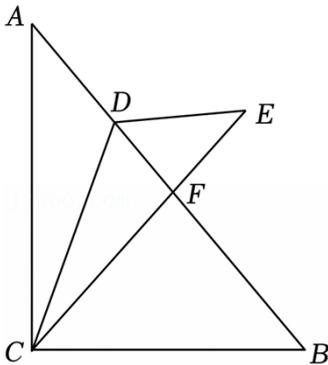
$$\therefore 2a - 4 = 0,$$

$$\therefore a = 2.$$

故答案为: 2.

【点评】 本题主要考查多项式乘多项式, 合并同类项后 y^2 项的系数为 0 是解题的关键.

17. (3分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $\angle B - \angle A=10^\circ$, D 是 AB 上一点, 将 $\triangle ACD$ 沿 CD 翻折后得到 $\triangle CED$, 边 CE 交 AB 于点 F . 若 $\triangle DEF$ 中有两个角相等, 则 $\angle ACD = \underline{15^\circ \text{ 或 } 30^\circ}$.



【分析】 由三角形的内角和定理可求解 $\angle A=40^\circ$, 设 $\angle ACD=x^\circ$, 则 $\angle CDF=(40+x)^\circ$, $\angle ADC=(140-x)^\circ$, 由折叠可知: $\angle ADC=\angle CDE$, $\angle E=\angle A=40^\circ$, 可分三种情况: 当 $\angle DFE=\angle E=40^\circ$ 时; 当 $\angle FDE=\angle E=40^\circ$ 时; 当 $\angle DFE=\angle FDE$ 时, 根据 $\angle ADC=\angle CDE$ 列方程, 解方程可求解 x 值, 即可求解.

【解答】 解: 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$,

$$\therefore \angle B + \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B - \angle A = 10^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 40^\circ, \angle B = 50^\circ,$$

设 $\angle ACD=x^\circ$, 则 $\angle CDF=(40+x)^\circ$, $\angle ADC=180^\circ - 40^\circ - x^\circ = (140-x)^\circ$,

由折叠可知: $\angle ADC=\angle CDE$, $\angle E=\angle A=40^\circ$,

当 $\angle DFE=\angle E=40^\circ$ 时,

$$\therefore \angle FDE + \angle DFE + \angle E = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle FDE = 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 100^\circ,$$

$$\therefore 140 - x = 100 + 40 + x,$$

解得 $x=0$ (不存在);

当 $\angle FDE=\angle E=40^\circ$ 时,

$$\therefore 140 - x = 40 + 40 + x,$$

解得 $x=30$,

即 $\angle ACD=30^\circ$;

当 $\angle DFE=\angle FDE$ 时,

$\because \angle FDE+\angle DFE+\angle E=180^\circ$,

$\therefore \angle FDE=\frac{1}{2} \times (180^\circ -40^\circ)=70^\circ$,

$\therefore 140-x=70+40+x$,

解得 $x=15$,

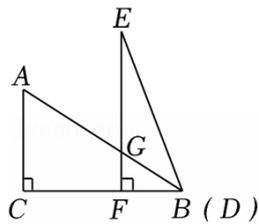
即 $\angle ACD=15^\circ$,

综上, $\angle ACD=15^\circ$ 或 30° ,

故答案为: 15° 或 30° .

【点评】 本题主要考查直角三角形的性质, 等腰三角形的性质, 三角形的内角和定理, 根据 $\angle ADC=\angle CDE$ 分三种情况列方程是解题的关键.

18. (3分) 已知两个完全相同的直角三角形纸片 $\triangle ABC$ 、 $\triangle DEF$, 如图放置, 点 B 、 D 重合, 点 F 在 BC 上, AB 与 EF 交于点 G . $\angle C=\angle EFB=90^\circ$, $\angle E=\angle ABC=30^\circ$, 现将图中的 $\triangle ABC$ 绕点 F 按每秒 15° 的速度沿逆时针方向旋转 180° , 在旋转的过程中, $\triangle ABC$ 恰有一边与 DE 平行的时间为 2 或 8 或 10 秒.



【分析】 分三种情形讨论: ①当 $DE\parallel AC$ 时. ②当 $DE\parallel BC$ 时. ③当 $DE\parallel AB$ 时, 分别求出 $\angle DFB$ 即可解决问题.

【解答】 解: $\because \angle E=\angle ABC=30^\circ$, $\angle C=\angle EFB=90^\circ$, $\angle E=\angle ABC=30^\circ$,

$\therefore \angle D=\angle A=60^\circ$.

①当 $DE\parallel AC$ 时, 如图 1 中,

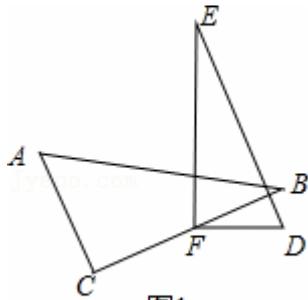


图1

$$\because \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore AC \perp BC,$$

$$\therefore DE \perp BC,$$

$$\therefore \angle D + \angle BFD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BFD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \text{旋转时间 } t = \frac{30}{15} = 2s.$$

②如图2中, 当 $DE \parallel BC$ 时,

$$\angle BFE = \angle E = 30^\circ,$$

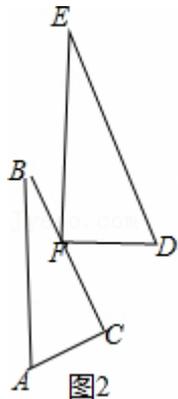


图2

$$\therefore \angle DFB = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ,$$

$$\therefore \text{旋转时间 } t = \frac{120}{15} = 8s.$$

③当 $DE \parallel AB$ 时, 如图3中,

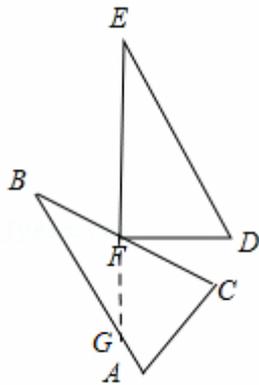


图3

$$\therefore \angle BGF = \angle E = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BFE = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DFB = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ,$$

$$\therefore \text{旋转时间 } t = \frac{150}{15} = 10s.$$

综上所述，旋转时间为 2s 或 8s 或 10s 时， $\triangle ABC$ 恰有一边与 DE 平行。

故答案为：2 或 8 或 10.

【点评】 本题考查旋转的性质、平行线的性质、旋转的速度、旋转角度、旋转时间之间的关系等知识，解题的关键是学会用分类讨论的思想思考问题，属于中考常考题型。

三、解答题（共 8 大题，共 76 分。）

19. (16 分) 计算：

$$(1) \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + (-1)^3 + (\pi - 2024)^0;$$

$$(2) 2m^5 \cdot 3m - (-2m^3)^2;$$

$$(3) 3\left(\frac{1}{3}a - b\right)^2;$$

$$(4) (x - y - 3)(x + y - 3).$$

【分析】 (1) 先化简各式，然后再进行计算即可解答；

(2) 先算乘方，再算乘法，后算加减，即可解答；

(3) 利用完全平方公式，单项式乘多项式的法则进行计算，即可解答；

(4) 利用平方差公式，完全平方公式进行计算，即可解答。

【解答】 解：(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + (-1)^3 + (\pi - 2024)^0$

$$= 2 + (-1) + 1$$

$$= 2;$$

$$\begin{aligned}
 (2) & 2m^5 \cdot 3m - (-2m^3)^2 \\
 &= 6m^6 - 4m^6 \\
 &= 2m^6;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) & 3\left(\frac{1}{3}a-b\right)^2 \\
 &= 3\left(\frac{1}{9}a^2 - \frac{2}{3}ab + b^2\right) \\
 &= \frac{1}{3}a^2 - 2ab + 3b^2;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) & (x-y-3)(x+y-3) \\
 &= (x-3-y)(x-3+y) \\
 &= (x-3)^2 - y^2 \\
 &= x^2 - 6x + 9 - y^2.
 \end{aligned}$$

【点评】 本题考查了整式的混合运算，平方差公式，完全平方公式，零指数幂，负整数指数幂，准确熟练地进行计算是解题的关键。

20. (16分) 把下列各式因式分解：

$$(1) mn^2 - 2n;$$

$$(2) 4a^2 - 36;$$

$$(3) (a^2+b^2)^2 - 4a^2b^2;$$

$$(4) 9x^2 - 6x(y-1) + (y-1)^2.$$

【分析】 (1) 利用提公因式法因式分解即可；

(2) 提公因式后利用平方差公式因式分解即可；

(3) 利用平方差及完全平方公式因式分解即可；

(4) 利用完全平方公式因式分解即可。

【解答】 解：(1) 原式 = $n(mn - 2)$ ；

$$\begin{aligned}
 (2) & \text{原式} = 4(a^2 - 9) \\
 &= 4(a+3)(a-3);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) & \text{原式} = (a^2+b^2+2ab)(a^2+b^2-2ab) \\
 &= (a+b)^2(a-b)^2;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) & \text{原式} = [3x - (y-1)]^2 \\
 &= (3x - y + 1)^2.
 \end{aligned}$$

【点评】 本题考查因式分解，熟练掌握因式分解的方法是解题的关键。

21. (6分) 先化简, 再求值: $(2x+3)(2x-3) - x(5x+4) - (x-1)^2$, 其中 $x^2+x-3=0$.

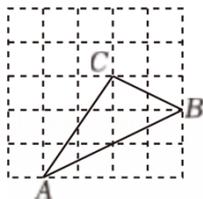
【分析】 直接利用乘法公式以及单项式乘多项式分别化简, 再合并同类项, 进而把已知变形代入得出答案.

【解答】 解: $(2x+3)(2x-3) - x(5x+4) - (x-1)^2$
 $= 4x^2 - 9 - 5x^2 - 4x - x^2 + 2x - 1$
 $= -2x^2 - 2x - 10,$
 $\because x^2+x-3=0,$
 $\therefore x^2+x=3,$
 \therefore 原式 $= -2(x^2+x) - 10 = -2 \times 3 - 10 = -16.$

【点评】 此题主要考查了整式的混合运算—化简求值, 正确运用乘法公式计算是解题关键.

22. (7分) 如图, 每个小方格都是边长为1个单位的小正方形, 点 A, B, C 均在格点上.

- (1) 标出一个格点 D , 使线段 CD 所在直线与线段 AB 所在直线互相垂直;
- (2) 三角形 ABC 的面积为 4;
- (3) 标出所有的格点 E , 使三角形 ABC 与三角形 ABE 的面积相等.

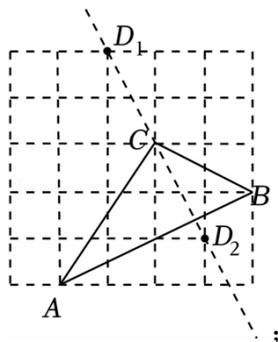


【分析】 (1) 根据 AB 的方向, 寻找过点 C 且与 AB 互相垂直的直线, 再寻找格点 D 即可;

(2) 利用割补法求面积即可;

(3) 根据同底等高的三角形面积相等和 AB 的方向, 寻找过点 C 且与 AB 互相平行的直线, 以及 AB 的另一侧且到 AB 的距离和点 C 到 AB 距离相等的直线, 再寻找格点 E 即可.

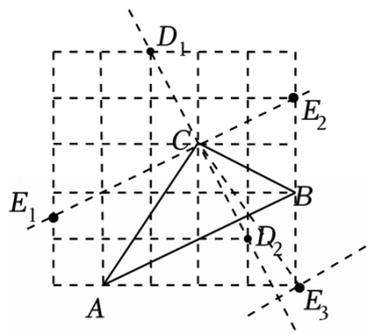
【解答】 解: (1) 如图所示点 D 即为所求作的点; (两点取其一即可)



(2) $S_{\triangle ABC} = 3 \times 4 - \frac{1}{2} \times 4 \times 2 - \frac{1}{2} \times 3 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 4,$

故答案为：4；

(3) 如图所示点 D 即为所求作的点；(两点取其一即可)

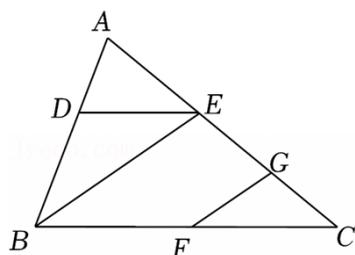


【点评】 本题考查三角形面积，掌握同底等高的三角形面积相等是关键.

23. (6分) 如图， D 、 E 、 F 、 G 是 $\triangle ABC$ 边上的点， $\angle ABC = \angle ADE$ ， $\angle DEB = \angle GFC$.

(1) 求证： $BE \parallel GF$ ；

(2) 若 BE 平分 $\angle ABC$ ， $\angle BDE = 110^\circ$ ， $\angle C = 50^\circ$ ，求 $\angle CGF$ 的度数.



【分析】 (1) 由题意可求得 $DE \parallel BC$ ，则有 $\angle BED = \angle EBC$ ，即可求得 $\angle EBC = \angle GFC$ ，即得 $BE \parallel GF$ ；

(2) 由平行线的性质得 $\angle BDE + \angle ABC = 180^\circ$ ，可求得 $\angle ABC = 70^\circ$ ，再由角平分线的定义得 $\angle EBC = 35^\circ$ ，再由平行线的性质得 $\angle GFC = 35^\circ$ ，从而可求解.

【解答】 (1) 证明： $\because \angle ABC = \angle ADE$ ，

$\therefore DE \parallel BC$ ，

$\therefore \angle BED = \angle EBC$ ，

$\because \angle DEB = \angle GFC$ ，

$\therefore \angle EBC = \angle GFC$ ，

$\therefore BE \parallel GF$ ；

(2) 解： $\because DE \parallel BC$ ，

$\therefore \angle BDE + \angle ABC = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle ABC = 180^\circ - \angle BDE = 70^\circ$ ，

$\because BE$ 平分 $\angle ABC$ ，

$$\therefore \angle EBC = \frac{1}{2} \angle ABC = 35^\circ,$$

$$\because BE \parallel GF,$$

$$\therefore \angle GFC = \angle EBC = 35^\circ,$$

$$\because \angle C + \angle GFC + \angle CGF = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle CGF = 180^\circ - \angle C - \angle GFC = 95^\circ.$$

【点评】 本题主要考查三角形的内角和定理，平行线的判定与性质，解答的关键是结合图形分析清楚角与角之间的关系。

24. (7分) 阅读材料：若 $m^2 - 2mn + 2n^2 - 8n + 16 = 0$ ，求 m 、 n 的值。

$$\text{解：} \because m^2 - 2mn + 2n^2 - 8n + 16 = 0,$$

$$\therefore (m^2 - 2mn + n^2) + (n^2 - 8n + 16) = 0$$

$$(m - n)^2 + (n - 4)^2 = 0,$$

$$\therefore (m - n)^2 = 0 \text{ 且 } (n - 4)^2 = 0,$$

$$\therefore m = n = 4.$$

根据你的观察，探究下面的问题：

(1) $a^2 - 2a + 1 + b^2 = 0$ ，则 $a = \underline{1}$ ， $b = \underline{0}$ ；

(2) 已知 $x^2 + 2y^2 - 2xy + 4y + 4 = 0$ ，求 x^y 的值；

(3) 已知 $\triangle ABC$ 的三边长 a 、 b 、 c 都是正整数，且满足 $2a^2 + b^2 - 4a - 10b + 27 = 0$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长。

【分析】 (1) 根据配方法和非负数的性质求解；

(2) 根据配方法和非负数的性质求出 x 、 y 的值，代入代数式求值即可；

(3) 根据配方法和非负数的性质求出 a 、 b 的值，根据三角形三边的关系得到 c 的范围，根据 c 是正整数得到 c 的值，从而得到周长的值。

【解答】 解：(1) $\because a^2 - 2a + 1 + b^2 = 0$,

$$\therefore (a - 1)^2 + b^2 = 0,$$

$$\therefore a - 1 = 0, b = 0,$$

$$\therefore a = 1, b = 0,$$

故答案为：1，0；

(2) $\because x^2 + 2y^2 - 2xy + 4y + 4 = 0$,

$$\therefore x^2 + y^2 - 2xy + y^2 + 4y + 4 = 0,$$

$$\text{即：} (x - y)^2 + (y + 2)^2 = 0,$$

则: $x - y = 0$, $y + 2 = 0$,

解得: $x = y = -2$,

$$\therefore x^y = (-2)^{-2}$$

$$= \frac{1}{4};$$

$$(3) \because 2a^2 + b^2 - 4a - 10b + 27 = 0,$$

$$\therefore 2a^2 - 4a + 2 + b^2 - 10b + 25 = 0,$$

$$\therefore 2(a - 1)^2 + (b - 5)^2 = 0,$$

则 $a - 1 = 0$, $b - 5 = 0$,

解得: $a = 1$, $b = 5$,

$$\because 5 - 1 < c < 5 + 1,$$

即 $4 < c < 6$, 且 c 是正整数,

$$\therefore c = 5,$$

即三角形三边分别为 1, 5, 5,

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的周长为 } 1 + 5 + 5 = 11.$$

【点评】 本题考查了配方法的应用, 非负数的性质, 三角形三边关系, 根据三角形三边的关系得到 c 的范围, 根据 c 是正整数得到 c 的值是解题的关键.

25. (8分) **【教材重现】** 如图 1, 边长为 a 的大正方形中有一个边长为 b 的小正方形, 把图 1 中的阴影部分拼成一个长方形 (如图 2 所示).

上述操作能验证的公式是 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

【类比探究】 把上述两个正方形按照如图 3 所示的方式拼接, 其中 B, C, G 三点在同一直线上. 若 $a+b=20$, $ab=80$, 求阴影部分的面积.

【拓展应用】 根据前面的经验探究: 若 x 满足 $(3-4x)(2x-5) = \frac{9}{2}$, 求 $(3-4x)^2 + 4(2x-5)^2$ 的值.

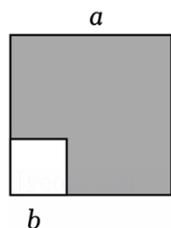


图1

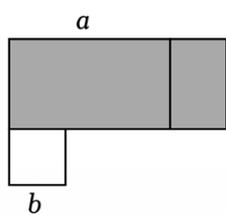


图2

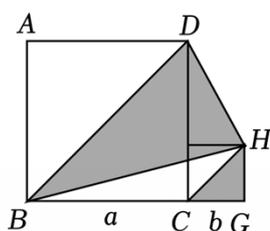


图3

【分析】 **【教材重现】** 用代数式表示图 1、图 2 中阴影部分的面积即可;

【类比探究】根据图形中各个部分面积之间的关系得出 $S_{\text{阴影部分}} = \frac{1}{2}[(a+b)^2 - 2ab]$ ，再代入求值即可；

【拓展应用】设 $3 - 4x = a$ ， $2(2x - 5) = b$ ，则 $ab = 2(3 - 4x)(2x - 5) = 9$ ， $a + b = 3 - 4x + 4x - 10 = -7$ ，将 $(3 - 4x)^2 + 4(2x - 5)^2$ 化为 $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ ，再代入计算即可。

【解答】解：【教材重现】图 1 中阴影部分的面积可以看作两个正方形的面积差，即 $a^2 - b^2$ ，所拼成的图 2 是长为 $a + b$ ，宽为 $a - b$ 的长方形，因此面积为 $(a + b)(a - b)$ ，

所以有 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ ，

故答案为： $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ ；

【类比探究】如图 3，

$$\because a + b = 20, ab = 80,$$

$$\therefore S_{\text{阴影部分}} = S_{\text{梯形} BDEG} - S_{\triangle DEH} - S_{\triangle BCH}$$

$$= \frac{1}{2}a(a + b + b) - \frac{1}{2}b(a - b) - \frac{1}{2}ab$$

$$= \frac{1}{2}a^2 + ab - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}ab$$

$$= \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$$

$$= \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

$$= \frac{1}{2}[(a + b)^2 - 2ab]$$

$$= \frac{1}{2} \times (400 - 160)$$

$$= 120;$$

【拓展应用】设 $3 - 4x = a$ ， $2(2x - 5) = b$ ，则 $ab = 2(3 - 4x)(2x - 5) = 9$ ， $a + b = 3 - 4x + 4x - 10 = -7$ ，

$$\therefore (3 - 4x)^2 + 4(2x - 5)^2 = a^2 + b^2$$

$$= (a + b)^2 - 2ab$$

$$= 49 - 18$$

$$= 31.$$

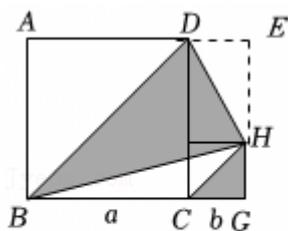
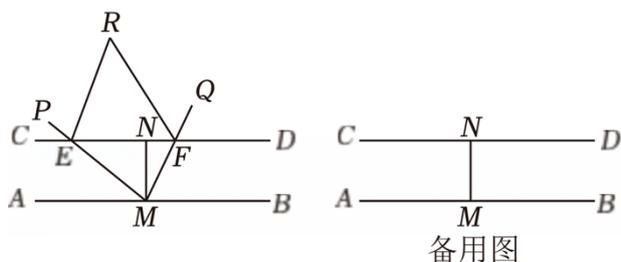


图3

【点评】 本题考查平方差公式的几何背景，多项式乘多项式，掌握平方差公式的结构特征，多项式乘多项式的计算方法是正确解答的关键。

26. (10分) 如图，直线 $AB \parallel CD$ ， $MN \perp AB$ ，分别交 AB ， CD 于点 M 、 N ，射线 MP 、 MQ 分别从 MA 、 MN 同时开始绕点 M 顺时针旋转，分别与直线 CD 交于点 E 、 F ，射线 MP 每秒转 10° ，射线 MQ 每秒转 5° ， ER ， FR 分别平分 $\angle PED$ ， $\angle QFC$ ，设旋转时间为 t 秒 ($0 < t < 18$)。



(1) 用含 t 的代数式表示： $\angle AMP = 10t^\circ$ ， $\angle QMB = (90 - 5t)^\circ$ ；

(2) 当 $\angle MEN + \angle MFN = 130^\circ$ 时， $t = 8$ 或 $\frac{28}{3}$ ；

(3) 试探索 $\angle EFR$ 与 $\angle ERF$ 之间的数量关系，并说明理由；

(4) 若 $\angle PMN$ 的角平分线与直线 ER 交于点 K ， $\angle EKM$ 的度数是 45° 或 135° 。

【分析】 (1) 根据题意可难得出 $\angle AMP$ 的度数为 $10t^\circ$ ， $\angle QMB = 90^\circ - 5t^\circ$ ；

(2) 由平行线的性质可得 $\angle MEF = \angle AME = 10t^\circ$ ，再由 $MN \perp AB$ 可得 $MN \perp CD$ ，从而可得 $\angle MFN = 90^\circ - 5t^\circ$ ，结合所给的条件 $\angle MEN + \angle MFN = 130^\circ$ 即可求解；

(3) $\angle EFR = \angle ERF$ ，分别用含 t 的代数式表示出 $\angle REF$ 和 $\angle EFR$ 的度数，再结合三角形的内角和，可表示出 $\angle ERF$ ，进行比较即可求解；

(4) 可分 K 在 MN 的左边与 K 在 MN 的右边两种情况进行讨论，再把 $\triangle EKM$ 的 $\angle MEK$ 和 $\angle EMK$ 的度数用含 t 的代数式表示出来，再利用三角形的内角和求 $\angle EKM$ 的度数即可。

【解答】 解：(1) ①由题意得： $\angle AMP = 10t^\circ$ ， $\angle NMF = 5t^\circ$ ，

$\because AB \parallel CD$ ， $MN \perp AB$ ，

$\therefore \angle QMB = 90^\circ - \angle NMF = 90^\circ - 5t^\circ = (90 - 5t)^\circ$ ；

故答案为: $10t, (90 - 5t)$;

(2) ①当点 E 在 N 左侧时,

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle MEN = \angle AMP = 10t^\circ,$$

$$\because MN \perp AB,$$

$$\therefore MN \perp CD,$$

$$\because \angle NMF = 5t^\circ,$$

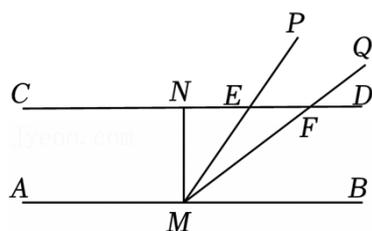
$$\therefore \angle MFN = 90^\circ - 5t^\circ,$$

$$\because \angle MEN + \angle MFN = 130^\circ,$$

$$\therefore 10t^\circ + 90^\circ - 5t^\circ = 130^\circ,$$

解得: $t = 8$;

②当点 E 在 N 右侧时, 如图,



$$\because AB \parallel CD, \angle AMP = 10t^\circ,$$

$$\therefore \angle MEN + \angle AMP = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle MEN = 180^\circ - 10t^\circ,$$

$$\because MN \perp AB,$$

$$\therefore MN \perp CD,$$

$$\because \angle NMF = 5t^\circ,$$

$$\therefore \angle MFN = 90^\circ - 5t^\circ,$$

$$\because \angle MEN + \angle MFN = 130^\circ,$$

$$\therefore 180^\circ - 10t^\circ + 90^\circ - 5t^\circ = 130^\circ,$$

解得: $t = \frac{28}{3}$;

$\therefore t$ 的值为 8 或 $\frac{28}{3}$;

故答案为: 8 或 $\frac{28}{3}$;

(3) $\angle EFR = \angle ERF$,

理由：∵FR 平分∠QFC，由(2)得∠MFN=90° - 5t°，

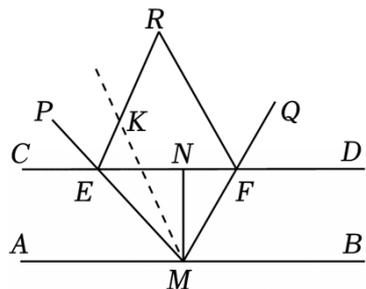
$$\therefore \angle EFR = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle MFN) = \frac{1}{2}(180^\circ - 90^\circ + 5t^\circ) = 45^\circ + \frac{5}{2}t^\circ,$$

∴由(1)得∠REF=90° - 5t°，

$$\text{在}\triangle REF\text{中，}\angle ERF = 180^\circ - \angle REF - \angle EFR = 180^\circ - (90^\circ - 5t^\circ) - (45^\circ + \frac{5}{2}t^\circ) = 45^\circ + \frac{5}{2}t^\circ,$$

$$\therefore \angle EFR = \angle ERF;$$

(4) ①当K点在MN的左边时，如图所示：



由(2)得∠MEN=10t°，

$$\therefore \angle EMN = 90^\circ - 10t^\circ,$$

∴MK 是∠EMF 的平分线，

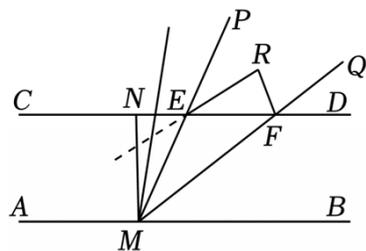
$$\therefore \angle EMK = \frac{1}{2}\angle EMN = 45^\circ - 5t^\circ,$$

由(1)得：∠REF=90° - 5t°，

$$\therefore \angle MER = \angle REF + \angle MEN = 90^\circ - 5t^\circ + 10t^\circ = 90^\circ + 5t^\circ,$$

$$\text{在}\triangle MEK\text{中，}\angle EKM = 180^\circ - \angle MER - \angle EMK = 180^\circ - (90^\circ + 5t^\circ) - (45^\circ - 5t^\circ) = 45^\circ.$$

②当K点在MN的右边时，如图所示：



由题意可知：∠AMP=10t°，则有∠MEN=180° - ∠AMP=180° - 10t°，

$$\angle PMN = 10t^\circ - 90^\circ,$$

∴MK 平分∠PMN，ER 平分∠PEF，∠PED=∠MEN，

$$\therefore \angle EMK = \frac{1}{2}\angle PMN = 5t^\circ - 45^\circ, \quad \angle MEK = \frac{1}{2}\angle MEN = \frac{1}{2}\angle PED = 90^\circ - 5t^\circ,$$

$$\text{在}\triangle MEK\text{中，}\angle EKM = 180^\circ - \angle MEK - \angle EMK = 180^\circ - (90^\circ - 5t^\circ) - (5t^\circ - 45^\circ) = 135^\circ.$$

故答案为：45° 或 135°。

【点评】 本题主要考查了平行线的性质，角平分线，解答的关键是对这些知识点的掌握与熟练应用.