

2024 年春学期宜兴市初中期中考试

七年级数学试题

本试卷分试题和答题卡两部分，所有答案一律写在答题卡上。

考试时间为 100 分钟，试卷满分 120 分。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必用 0.5 毫米黑色墨水签字笔将自己的姓名、班级、考试号填写在答题卡的相应位置上，并认真核对姓名、班级、考试号是否与本人的相符合。
2. 答选择题必须用 2B 铅笔将答题卡上对应题目中的选项标号涂黑，如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答非选择题必须用 0.5 毫米黑色墨水签字笔作答，写在答题卡上各题目指定区域内相应的位置，在其他位置答题一律无效。
3. 作图必须用 2B 铅笔作答。
4. 卷中除要求近似计算的结果取近似值外，其他均应给出精确结果。

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分。在每小题所给出的四个选项中只有一项是正确的，请用 2B 铅笔把答题卡上相应的选项标号涂黑）

1. 已知下列长度的三条线段首尾顺次相连能组成三角形的是（ ）

- A. 1, 2, 3 B. 2, 3, 4 C. 2, 2, 4 D. 3, 4, 8

【答案】B

【解析】

【分析】根据三角形两边之和大于第三边判断即可。

【详解】解：A、 $\because 1+2=3$ ， $\therefore$ 长度为 1, 2, 3 的三条线段首尾顺次相连不能组成三角形，故此选项不符合题意；

B、 $\because 2+3>4$ ， $\therefore$ 长度为 2, 3, 4 的三条线段首尾顺次相连能组成三角形，故此选项符合题意；

C、 $\because 2+2=4$ ， $\therefore$ 长度为 2, 2, 4 的三条线段首尾顺次相连不能组成三角形，故此选项不符合题意；

D、 $\because 3+4<8$ ， $\therefore$ 长度为 3, 4, 8 的三条线段首尾顺次相连不能组成三角形，故此选项不符合题意；

故选：B。

【点睛】本题考查的是三角形的三边关系，熟记三角形两边之和大于第三边是解题的关键。

2. 下列运算正确的是（ ）

- A. $(a^2)^3 = a^6$ B. $a \cdot a^3 = a^3$ C. $a^2 + a^2 = a^4$ D. $a^6 \div a^2 = a^3$

【答案】A

【解析】

【分析】由幂的乘方、同底数幂乘法、合并同类项、同底数幂除法，分别进行计算，即可得到答案。

【详解】解： $(a^2)^3 = a^6$ ，故 A 正确；

$a \cdot a^3 = a^4$ ，故 B 错误；

$a^2 + a^2 = 2a^2$ ，故 C 错误；

$a^6 \div a^2 = a^4$ ，故 D 错误；

故选：A

【点睛】本题考查了幂的乘方、同底数幂乘法、合并同类项、同底数幂除法，解题的关键是掌握运算法则，正确的进行判断。

3. 若 $(x+2)(x-3) = x^2 + ax + b$ ，则 a 、 b 的值分别为（ ）

A. $a = 5$ ， $b = 6$

B. $a = -1$ ， $b = -6$

C. $a = 1$ ， $b = 6$

D. $a = 5$ ， $b = -6$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查的是整式的乘法运算，熟练的利用多项式乘以多项式的法则进行运算是解本题的关键。

【详解】解： $\because (x+2)(x-3) = x^2 - x - 6 = x^2 + ax + b$ ，

$\therefore a = -1$ ， $b = -6$ ，

故选 B.

4. 若 $\triangle ABC$ 三个角的大小满足条件 $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 4$ ，则 $\angle B$ 的大小为（ ）

A. 40°

B. 60°

C. 80°

D. 100°

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了三角形内角和定理，根据三角形内角和为 180 度进行求解即可。

【详解】解： $\because \angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 4$ ， $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle B = 180^\circ \times \frac{3}{2+3+4} = 60^\circ$ ，

故选：B.

5. 现有下列结论：①同旁内角相等，两直线平行；②三角形的三条角平分线都在三角形内部；③三角形的中线和高都是线段；④三角形的一条角平分线将三角形分成面积相等的两部分；⑤钝角三角形最多有一个锐角。其中正确的个数为（ ）

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】C

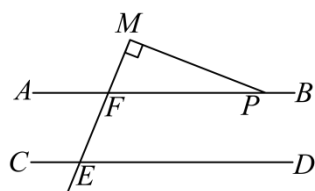
【解析】

【分析】此题考查了平行线的判定，三角形的中线、角平分线、高的性质，根据平行线的判定方法、三角形的中线、角平分线、高性质判断求解即可．

- 【详解】解：①同旁内角互补，两直线平行，原说法错误，不符合题意；
②三角形的三条角平分线都在三角形内部，正确，符合题意；
③三角形的中线和高都是线段，符合题意；
④三角形的一条中线将三角形分成面积相等的两部分，原说法错误，不符合题意；
⑤钝角三角形有 2 个锐角，原说法错误，不符合题意．

故选：C．

6. 如图，直线 $AB \parallel CD$ ， $\angle M = 90^\circ$ ， $\angle MPA = 32^\circ$ ，则 $\angle MEC$ 的度数是（ ）



- A. 58° B. 112° C. 122° D. 148°

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了三角形外角的性质，平行线的性质．熟练掌握三角形外角的性质，平行线的性质是解题的关键．

由题意知， $\angle MFA = \angle M + \angle MPA$ ，由 $AB \parallel CD$ ，可得 $\angle MEC = \angle MFA$ ，然后求解作答即可．

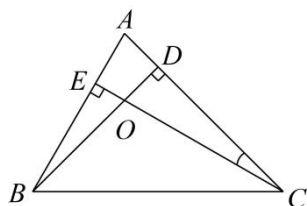
【详解】解：由题意知， $\angle MFA = \angle M + \angle MPA = 122^\circ$ ，

$\because AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle MEC = \angle MFA = 122^\circ$ ，

故选：C．

7. 如图中，高 BD 与 CE 交于 O 点，若 $\angle BAC = 72^\circ$ ，则 $\angle BOC$ 的度数（ ）



- A. 72° B. 126° C. 108° D. 162°

【答案】C

【解析】

【分析】由垂直的定义得到 $\angle BDC = \angle AEC = 90^\circ$ ，再根据三角形内角和定理得 $\angle ACE = 180^\circ - \angle AEC - \angle A = 180^\circ - 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$ ，然后根据三角形的外角性质有 $\angle BOC = \angle ODC + \angle DCO$ ，计算即可得到 $\angle BOC$ 的度数.

【详解】解： $\because BD$ 、 CE 分别是边 AC ， AB 上的高，

$$\therefore \angle BDC = \angle AEC = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle BAC = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle ACE = 180^\circ - \angle AEC - \angle A = 180^\circ - 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = \angle ODC + \angle DCO = 90^\circ + 18^\circ = 108^\circ.$$

故选：C.

【点睛】本题考查了三角形的外角性质：三角形的任一外角等于与之不相邻的两内角的和. 也考查了垂直的定义以及三角形内角和定理.

8. 已知多项式 $x^2 - 2(m+1)x + 9$ 是完全平方式，则 m 的值为（ ）

A. 2 或 -4

B. -2 或 -4

C. -2

D. -2 或 0

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了完全平方式，根据题意可知两平方项分别为 $x^2, 3^2$ ，则一次项为 $\pm 2 \cdot x \cdot 3$ ，据此求解即可.

【详解】解： $\because$ 多项式 $x^2 - 2(m+1)x + 9 = x^2 - 2(m+1)x + 3^2$ 是完全平方式，

$$\therefore -2(m+1)x = \pm 2 \cdot x \cdot 3,$$

$$\therefore -2(m+1) = \pm 6,$$

$$\therefore m = 2 \text{ 或 } m = -4,$$

故选：A.

9. 已知 $3^a = 2$ ， $3^b = 7$ ， $3^c = 392$ ，则 $3^{4b-2c+6a}$ 的值为（ ）

A. 1

B. 3

C. 729

D. 9

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了幂的乘方计算，幂的乘方的逆运算，同底数幂乘法计算，先根据幂的乘方计算

法则求出 $3^{3a} = 8$ ， $3^{2b} = 49$ ，再由同底数幂乘除法计算法则求出 $3^{3a} \cdot 3^{2b} \div 3^c = 3^{3a+2b-c} = 1$ ，则 $3^{4b-2c+6a} = (3^{2b-c+3a})^2 = 1^2 = 1$ 。

【详解】解：∵ $3^a = 2$ ， $3^b = 7$ ， $3^c = 392$ ，

$$\therefore (3^a)^3 = 2^3, (3^b)^2 = 7^2, 3^c = 392,$$

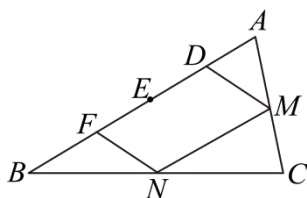
$$\therefore 3^{3a} = 8, 3^{2b} = 49,$$

$$\therefore 3^{3a} \cdot 3^{2b} \div 3^c = 3^{3a+2b-c} = 8 \times 49 \div 392 = 1$$

$$\therefore 3^{4b-2c+6a} = (3^{2b-c+3a})^2 = 1^2 = 1,$$

故选：A。

10. 如图， $\triangle ABC$ 中， $AD = DE = EF = BF$ ，点 M 、 N 分别为边 AC 、 BC 的中点，连接 MN 、 MD 、 NF ，若 $S_{\triangle CMN} = 8$ ，则 $S_{\text{四边形} MNFD}$ 的值为（ ）



A. 8

B. 12

C. 16

D. 18

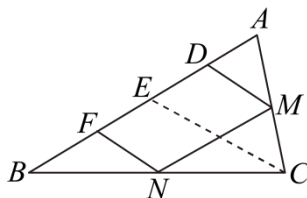
【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了三角形中位线定理，三角形的面积等知识，解题的关键是理解题意，掌握三角形中位线定理。

连接 CE ，利用三角形中位线定理，三角形的面积关系即可求解。

【详解】解：连接 CE ，



∵ $AD = DE = EF = BF$ ，点 M 、 N 分别为边 AC 、 BC 的中点，

∴ MN 是 $\triangle ABC$ 的中位线， DM 是 $\triangle AEC$ 的中位线， FN 是 $\triangle EBC$ 的中位线，

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 4S_{\triangle CMN} = 32,$$

$$\therefore S_{\triangle AEC} = S_{\triangle BEC} = 16,$$

$$\therefore S_{\triangle ADM} = \frac{1}{4} S_{\triangle AEC} = 4, \quad S_{\triangle BFN} = \frac{1}{4} S_{\triangle BEC} = 4,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}MNFD} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle CMN} - S_{\triangle ADM} - S_{\triangle BFN} = 16.$$

故选：C.

二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分.）

11. 化简 $(-a)^2 \div (-a) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $-a$

【解析】

【分析】 本题主要考查了同底数幂除法运算，根据同底数幂除法运算法则进行计算即可.

【详解】 解： $(-a)^2 \div (-a) = -a$,

故答案为： $-a$.

12. 3 月 28 日晚，备受关注的小米汽车首款车型——小米 *SU7* 正式发布，并宣布标准版售价为 21.59 万元. 而令人震惊的是，在短短 27 分钟内，小米 *SU7* 的预订量就突破了 50000 台，50000 用科学记数法可表示为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 5×10^4

【解析】

【分析】 本题主要考查了科学记数法，科学记数法的表现形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同，当原数绝对值大于等于 10 时， n 是正数，当原数绝对值小于 1 时 n 是负数；由此进行求解即可得到答案.

【详解】 解： $50000 = 5 \times 10^4$,

故答案为： 5×10^4 .

13. 若 $a - b = 4$ ， $ab = -2$ ，则 $(a - 2)(b + 2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 2

【解析】

【分析】 本题主要考查了多项式乘以多项式，根据多项式乘以多项式法则计算，即可求解.

【详解】 解： $\because a - b = 4$ ， $ab = -2$ ，

$$\therefore (a - 2)(b + 2) = ab + 2a - 2b - 4 = ab + 2(a - b) - 4 = -2 + 2 \times 4 - 4 = 2,$$

故答案为： 2

14. 如果 $(x + 1)(x^2 - 2ax + a^2)$ 的乘积中不含 x^2 项，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 0.5

【解析】

【分析】先根据多项式乘以多项式展开，即可得出 $1-2a=0$ ，求解即可得出答案.

【详解】解： $(x+1)(x^2-2ax+a^2)$

$$=x^3-2ax^2+a^2x+x^2-2ax+a^2$$

$$=x^3+(1-2a)x^2+(a^2-2a)x+a^2$$

$\therefore (x+1)(x^2-2ax+a^2)$ 的乘积中不含 x^2 项，

$$\therefore 1-2a=0$$

$$\therefore a=0.5$$

故答案为：0.5.

【点睛】本题考查了多项式乘以多项式法则，能根据多项式乘以多项式法则展开是解题的关键.

15. 观察等式 $(2a-1)^{a+2}=1$ ，其中 a 的取值可能是_____.

【答案】 -2 或 1 或 0

【解析】

【分析】根据题意可分三种情况：①当 $2a-1 \neq 0$ 时， $a+2=0$ ；②当 $2a-1=1$ 时；③当 $a+2$ 为偶数时， $2a-1=-1$ 分别计算即可.

【详解】解：由题意得：①当 $2a-1 \neq 0$ 时， $a+2=0$ ，解得 $a=-2$ ；

②当 $2a-1=1$ 时， $a=1$ ；

③当 $a+2$ 为偶数时， $2a-1=-1$ ，解得 $a=0$.

故答案为：-2 或 1 或 0.

【点睛】此题考查零指数幂、乘方，解题关键是分情况讨论.

16. 在一个多边形中，小于 135° 的内角最多有_____个.

【答案】 7

【解析】

【分析】本题考查多边形内角与外角，由多边形的内角小于 135° ，可得外角大于 45° ，再根据多边形的外角和为 360° 进行判断即可. 掌握多边形的外角和为 360° 是解决问题的关键.

【详解】解：由于多边形的内角小于 135° ，

所以这个多边形的外角要大于 $180^\circ-135^\circ=45^\circ$ ，

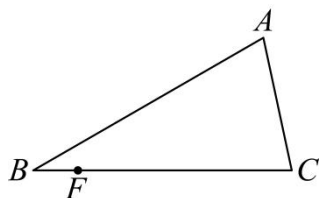
而多边形的外角和为 360° ，

所以内角小于 135° 的个数小于 $360^\circ \div 45^\circ = 8$ (个),

$\therefore$ 最多有 7 个,

故答案为: 7.

17. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 30^\circ$, 点 F 是边 BC 上一点, 点 E 在边 AB 上运动, 将 $\angle B$ 沿直线 EF 翻折得到 $\angle B'$, 连接 $B'F$, 当 $B'F \perp BC$ 时, 则 $\angle BEF = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$.



【答案】105 或 15

【解析】

【分析】本题主要考查了图形的翻折, 三角形内角和定理, 解题关键是分情况讨论.

如图 1, 由 $\angle B = 30^\circ$, $B'F \perp BC$, 得 $\angle BFE = \angle B'FE$, $\angle BFE + \angle B'FE = 180^\circ + 90^\circ = 270^\circ$, 得 $\angle BFE = 135^\circ$, 即可得 $\angle BEF = 180^\circ - \angle BFE - \angle B = 15^\circ$; 如图 2, 同理得 $\angle BEF = 105^\circ$.

【详解】解: 如图 1, 由 $\angle B = 30^\circ$, $B'F \perp BC$,

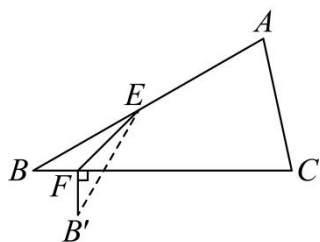


图1

得 $\angle BFE = \angle B'FE$, $\angle BFE + \angle B'FE = 180^\circ + 90^\circ = 270^\circ$,

得 $\angle BFE = 135^\circ$,

得 $\angle BEF = 180^\circ - \angle BFE - \angle B = 15^\circ$;

如图 2, 同理 $\angle BFE = \angle B'FE$, $\angle BFE + \angle B'FE = 90^\circ$,

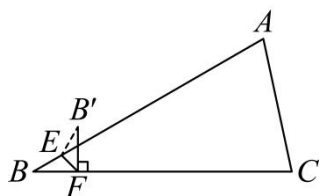


图2

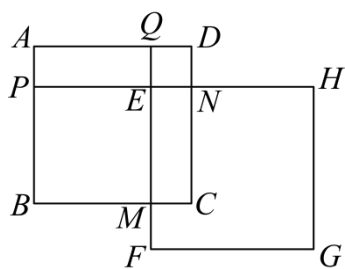
得 $\angle BFE = 45^\circ$,

得 $\angle BEF = 180^\circ - \angle BFE - \angle B = 105^\circ$;

故答案为: 105 或 15.

18. 如图, 正方形 $ABCD$ 和正方形 $EFGH$ 重叠, 其重叠部分是一个长方形, 分别延长 HE 、 FE , 交 AB

和 AD 于 P 、 Q 两点，构成的四边形 $BMEP$ 和四边形 $QEND$ 都是正方形，四边形 $APEQ$ 是长方形．若 $MF = 9$ ， $NH = 28$ ，长方形 $EMCN$ 的面积为 180．则正方形 $ABCD$ 的面积是_____．



【答案】 1081

【解析】

【分析】 本题考查了正方形的性质，长方形的性质，熟练掌握正方形的面积、长方形的面积公式是解题的关键．

设正方形 $EFGH$ 的边长为 x ，则 $EN = x - 28$ ， $EM = x - 9$ ，由长方形 $EMCN$ 的面积为 180 得出 $(x - 28)(x - 9) = 180$ ，再分别计算正方形 $BMEP$ 、正方形 $QEND$ 、长方形 $APEQ$ 的面积即可得出正方形 $ABCD$ 的面积．

【详解】 解：设正方形 $EFGH$ 的边长为 x ，

则 $EN = x - 28$ ， $EM = x - 9$ ，

$\because$ 长方形 $EMCN$ 的面积为 180．

$$\therefore (x - 28)(x - 9) = 180,$$

$\because$ 四边形 $BMEP$ 是正方形，四边形 $QEND$ 是正方形，

$$\therefore PE = EM = x - 9, \quad QE = EN = x - 28,$$

$$\therefore \text{长方形 } APEQ \text{ 的面积为 } (x - 9)(x - 28) = 180,$$

$$\therefore S_{\text{正方形 } ABCD} = S_{\text{长方形 } APEQ} + S_{\text{正方形 } QEND} + S_{\text{长方形 } EMCN} + S_{\text{正方形 } BMEP}$$

$$= 180 + (x - 28)^2 + 180 + (x - 9)^2$$

$$= (x - 28)^2 - 2(x - 28)(x - 9) + (x - 9)^2 + 2(x - 28)(x - 9) + 360$$

$$= [(x - 28) - (x - 9)]^2 + 2 \times 180 + 360$$

$$= (-19)^2 + 360 + 360$$

$$= 361 + 360 + 360$$

$$= 1081,$$

故答案为：1081.

三、解答题（本大题有 8 小题，共 66 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

19. (1) 计算： $2024^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - (-3)^2$ ；

(2) 化简： $t^3 - 2t[t^2 - 2t(t-3)]$.

【答案】(1) -4 ；(2) $3t^3 - 12t^2$

【解析】

【分析】此题考查了零指数幂，负整数指数幂，有理数的乘方，单项式乘多项式等运算，

(1) 首先计算零指数幂，负整数指数幂，有理数的乘方，然后计算加减；

(2) 首先计算括号内的单项式乘多项式，然后计算加减.

【详解】(1) 原式 $= 1 + 4 - 9$

$$= -4;$$

(2) 原式 $= t^3 - 2t^3 + 4t^3 - 12t^2$

$$= 3t^3 - 12t^2.$$

20. 因式分解：

(1) $x^3 - xy^2$ ；

(2) $2m^2n + 2n^3 - 4mn^2$.

【答案】(1) $x(x+y)(x-y)$

(2) $2n(m-n)^2$

【解析】

【分析】此题考查了因式分解的方法，解题的关键是熟练掌握因式分解的方法：提公因式法，平方差公式法，完全平方公式法，十字相乘法等.

(1) 先提公因式，然后利用平方差公式因式分解即可；

(2) 先提公因式，然后利用完全平方公式因式分解即可.

【小问 1 详解】

$$x^3 - xy^2$$

$$= x(x+y)(x-y);$$

【小问 2 详解】

$$2m^2n + 2n^3 - 4mn^2$$

$$= 2n(m^2 - 2mn + n^2)$$

$$= 2n(m-n)^2.$$

21. 先化简，再求值： $(2x+y)^2 - (3x-y)^2 + 5(x+y)(x-y)$ ，其中 $x = \frac{1}{2}$ ， $y=2$ 。

【答案】 $10xy - 5y^2, -10$

【解析】

【分析】先根据完全平方公式和平方差公式展开括号，再合并同类项，最后代入求值即可。

【详解】解：原式 $= 4x^2 + 4xy + y^2 - (9x^2 - 6xy + y^2) + 5(x^2 - y^2)$

$$= 4x^2 + 4xy + y^2 - 9x^2 + 6xy - y^2 + 5x^2 - 5y^2$$

$$= 10xy - 5y^2,$$

当 $x = \frac{1}{2}$ ， $y=2$ 时，原式 $= 10 \times \frac{1}{2} \times 2 - 5 \times 2^2 = 10 - 20 = -10$ 。

【点睛】本题考查乘法公式的混合运算，熟记完全平方公式和平方差公式是解题的关键，需要注意把乘法公式的结果用括号括起来。

22. 规定一种运算“ $\ast$ ”： $a \ast b = 3^a - 3^b + a$ 。

(1) 求 $3 \ast 2$ 的值；

(2) 若 $3 \ast (x-1) = -213$ ，求 x 的值。

【答案】 (1) 21 (2) $x = 6$

【解析】

【分析】本题主要考查了新定义下的实数运算：

(1) 根据新定义可得 $3 \ast 2 = 3^3 - 3^2 + 3$ ，据此计算求解即可；

(2) 根据新定义可得 $3^3 - 3^{x-1} + 3 = -213$ ，则 $3^{x-1} = 243 = 3^5$ ，据此可得 $x-1 = 5$ ，解得 $x = 6$ 。

【小问 1 详解】

解： $3 \ast 2$

$$= 3^3 - 3^2 + 3$$

$$= 27 - 9 + 3$$

$$= 21;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \because 3^x(x-1) = -213,$$

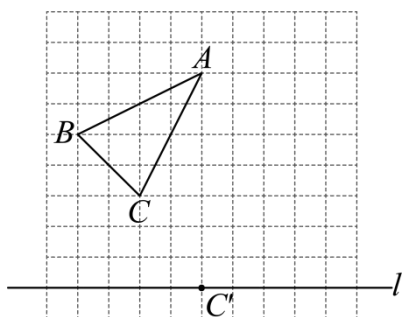
$$\therefore 3^3 - 3^{x-1} + 3 = -213,$$

$$\therefore 3^{x-1} = 243 = 3^5,$$

$$\therefore x-1 = 5,$$

$$\therefore x = 6.$$

23. 如图, 在 10×10 方格纸上 (每个小方格都是边长为 1 个单位长度的正方形), $\triangle ABC$ 三个顶点均在格点上.



(1) 将 $\triangle ABC$ 平移得到 $\triangle A'B'C'$, 请仅用无刻度直尺画出平移后的 $\triangle A'B'C'$ (点 A 、 B 、 C 的对应点分别是 A' 、 B' 、 C');

(2) 如图, 直线 l 经过点 C' , 请在直线 l 上画出所有的格点 Q , 使得点 A' 、 B' 、 C' 、 Q 组成的四边形面积为 10;

(3) 如图, 点 M 是线段 AC 经过的格点, 方格纸上能使得 $S_{\triangle CMN} = \frac{3}{2}$ 的格点 N 共有_____个.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

(3) 10 个

【解析】

【分析】本题主要考查了格点作图, 三角形面积的计算, 平移作图, 解题的关键是数形结合, 熟练掌握平移的性质.

(1) 根据点 C 的对应点的位置, 得出平移方式, 作出点 A 、 B 的对应点 A' 、 B' 、然后顺次连接即可;

(2) 根据 $S_{\triangle A'B'C'} = 4 \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 6$, 因此作 $S_{\triangle Q_1B'C'} = 4$ 或 $S_{\triangle Q_2A'C'} = 4$ 即可;

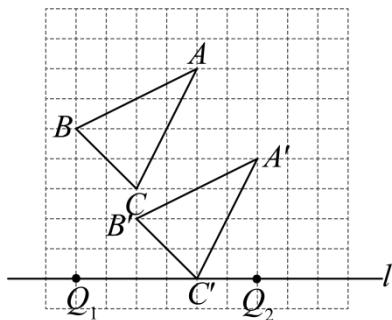
(3) 在图中找出符合条件的格点，即可得出答案.

【小问 1 详解】

解：如图， $\triangle A'B'C'$ 即为所求作的三角形；

【小问 2 详解】

解：如图，点 Q_1 、 Q_2 即为所求作的点；



$$\therefore S_{\triangle A'B'C'} = 4 \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 6,$$

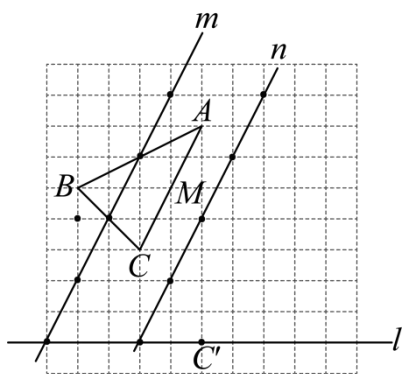
$$S_{\triangle Q_1 B' C'} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4, \quad S_{\triangle Q_2 A' C'} = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4,$$

$$\therefore S_{\text{四边形} A' C' Q_1 B'} = 6 + 4 = 10,$$

$$S_{\text{四边形} A' B' C' Q_2} = 6 + 4 = 10;$$

【小问 3 详解】

解：如图，直线 m ， n 上的格点与点 M 和 C 组成的三角形的面积正好为 $\frac{3}{2}$ ，

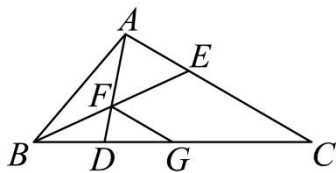


$\therefore$ 符合条件的格点共有 10 个.

24. 如图， $\triangle ABC$ 中， D 为 BC 上一点， $\angle C = \angle BAD$ ， $\triangle ABC$ 的角平分线 BE 交 AD 于点 F .

(1) 求证： $\angle AEF = \angle AFE$;

(2) G 为 BC 上一点，当 FE 平分 $\angle AFG$ 且 $\angle C = 30^\circ$ 时，求 $\angle CGF$ 的度数.



【答案】(1) 见详解；(2) 150°

【解析】

【分析】(1) 由角平分线定义得 $\angle ABE = \angle CBE$ ，再根据三角形的外角性质得 $\angle AEF = \angle AFE$ ；

(2) 由角平分线定义得 $\angle AFE = \angle GFE$ ，进而得 $\angle AEF = \angle GFE$ ，由平行线的判定得 $FG \parallel AC$ ，再根据平行线的性质求得结果.

【详解】解：(1) 证明： $\because BE$ 平分 $\angle ABC$,

$$\therefore \angle ABE = \angle CBE,$$

$$\therefore \angle ABF + \angle BAD = \angle CBE + \angle C,$$

$$\because \angle AFE = \angle ABF + \angle BAD, \quad \angle AEF = \angle CBE + \angle C,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle AFE;$$

(2) $\because FE$ 平分 $\angle AFG$,

$$\therefore \angle AFE = \angle GFE,$$

$$\because \angle AEF = \angle AFE,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle GFE,$$

$$\therefore FG \parallel AC,$$

$$\because \angle C = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle CGF = 180^\circ - \angle C = 150^\circ.$$

【点睛】本题主要考查了平行线的性质与判定，三角形的外角性质，角平分线的定义，关键是综合应用这些性质解决问题.

25. 若一个正整数 x 能表示成 $a^2 - b^2$ (a, b 是正整数, 且 $a > b$) 的形式, 则称这个数为“优美数”, a 与 b 是 x 的一个平方差分解.

例如: 因为 $5 = 3^2 - 2^2$, 所以 5 是“优美数”, 3 与 2 是 5 的平方差分解;

再如: $M = x^2 + 2xy$ 也是“优美数”.

$\because M = x^2 + 2xy = x^2 + 2xy + y^2 - y^2 = (x + y)^2 - y^2$ (其中 x, y 是正整数), 所以 M 也是“优美数”, $(x + y)$ 与 y 是 M 的一个平方差分解.

(1) 判断: 48 是否是“优美数”, 如果是, 请写出 48 的所有平方差分解; 如果不是, 说明理由.

(2) 已知 $N = x^2 - y^2 + 6x - 10y + k$ (x, y 是正整数, k 是常数, 且 $x > y + 2$), 要使 N 是“优美数”, 试求出符合条件的一个 k 值, 并说明理由.

【答案】(1) 48 是“优美数”, 13 与 11, 8 与 4, 7 与 1 都是 48 的平方差分解

(2) 当 $k = -16$ 时, N 为“优美数”

【解析】

【分析】本题主要考查了平方差公式和完全平方公式的应用, 解题的关键是熟练掌握平方差公式和完全平方公式.

(1) 根据“优美数”的定义进行解答即可;

(2) 将 $N = x^2 - y^2 + 6x - 10y + k$ 化简为: $N = (x+3)^2 - (y+5)^2 + k + 16$, 根据 N 是“优美数”得出 $k + 16 = 0$, 求出 k 的值即可.

【小问 1 详解】

解: 48 是“优美数”

$$\because 13^2 - 11^2 = (13+11) \times (13-11) = 24 \times 2 = 48,$$

$$8^2 - 4^2 = (8+4) \times (8-4) = 12 \times 4 = 48,$$

$$7^2 - 1^2 = (7+1) \times (7-1) = 8 \times 6 = 48,$$

$\therefore$ 48 是“优美数”, 13 与 11, 8 与 4, 7 与 1 都是 48 的平方差分解;

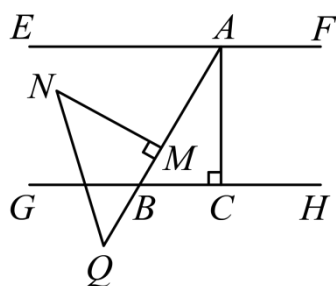
【小问 2 详解】

$$\text{解: } \because N = (x^2 + 6x + 9) - (y^2 + 10y + 25) + k + 16 = (x+3)^2 - (y+5)^2 + k + 16,$$

$$\therefore \text{当 } k + 16 = 0 \text{ 时, } N = (x+3)^2 - (y+5)^2 \text{ 为“优美数”, 此时 } k = -16,$$

故当 $k = -16$ 时, N 为“优美数”.

26. 如图, $EF \parallel GH$, 点 A 在 EF 上, 点 B, C 在 GH 上. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$. 点 M, Q 在直线 AB 上, 在 $\triangle MNQ$ 中, $\angle NMQ = 90^\circ$, $\angle MNQ = 45^\circ$.



(1) 将 $\triangle MNQ$ 沿直线 AB 平移, 当点 N 在 EF 上时, 请画出图形并求 $\angle ANQ$ 的度数;

(2) 将 $\triangle MNQ$ 沿直线 AB 平移, 当以 A 、 Q 、 N 为顶点的三角形中, 有两个角相等时, 请画出示意图并直接写出 $\angle QAN$ 的度数.

【答案】(1) 画图见解析, $\angle ANQ = 75^\circ$

(2) 90° 或 45° 或 22.5° 或 67.5°

【解析】

【分析】本题考查平行线的性质, 三角形的内角和与外角和定理, 掌握三角形的内角和定理是解题的关键.

(1) 先根据三角形的内角和得到 $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle NQM = 45^\circ$, 然后利用平行线的性质得到 $\angle EAQ = \angle ABC = 60^\circ$, 然后在 $\triangle AQN$ 中运用三角形的内角和解题即可;

(2) 分 $\angle ANQ = \angle AQN$ 、 $\angle QAN = \angle QNA$ 、 $\angle ANQ = \angle NAQ$, 三种情况分别画图计算即可解题.

【小问 1 详解】

解: 如图, $\because \angle ACB = 90^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$,

$\therefore \angle ABC = 90^\circ - \angle CAB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$,

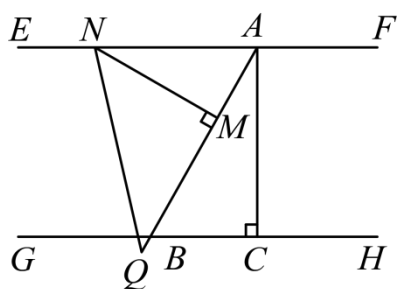
$\because EF \parallel GH$,

$\therefore \angle EAQ = \angle ABC = 60^\circ$,

又 $\because \angle NMQ = 90^\circ$, $\angle MNQ = 45^\circ$,

$\therefore \angle NQM = 45^\circ$,

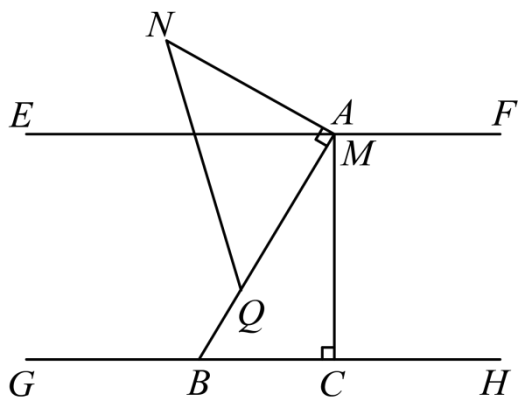
$\therefore \angle ANQ = 180^\circ - \angle NAQ - \angle NQA = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$;



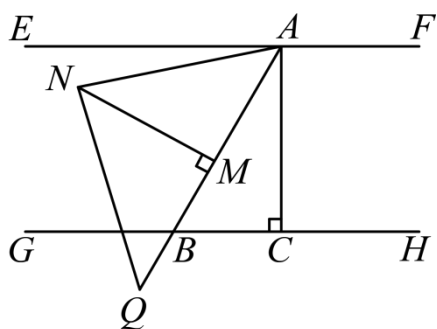
【小问 2 详解】

解: 如图, 当 $\angle ANQ = \angle AQN = 45^\circ$,

则 $\angle QAN = 180^\circ - \angle ANQ - \angle AQN = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$;



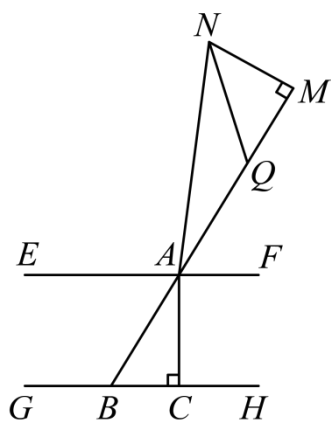
如图，当 $\angle NAQ = \angle NQA$ 时，则 $\angle QAN = 45^\circ$ ；



如图，当 $\angle ANQ = \angle NAQ$ 时，

$$\because \angle ANQ + \angle NAQ = \angle NQM = 45^\circ,$$

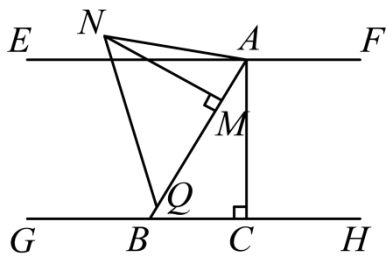
$$\therefore \angle QAN = 22.5^\circ;$$



如图，当 $\angle QAN = \angle QNA$ 时，

$$\because \angle NQA = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle QAN = \frac{180^\circ - \angle NQA}{2} = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67.5^\circ;$$



综上所述，以 A 、 Q 、 N 为顶点的三角形中，有两个角相等时， $\angle QAN$ 为 90° 或 45° 或 22.5° 或 67.5° .