

江苏省南京市 2023-2024 学年春学期七年级期末模拟练习数学试卷

测试内容：八下第 7--12 章 测试时间：100 分钟 总分：100 分

一、选择题（本大题共 6 小题，每小题 2 分，共 12 分.）

1. 下列计算正确的是（ ）

A. $b^3 \cdot b^3 = 2b^3$

B. $(ab^2)^3 = ab^6$

C. $(a^3)^2 \cdot b^4 = a^9$

D. $(a^5)^2 = a^{10}$

【答案】D

【解析】

【分析】直接利用同底数幂乘法法则、幂的乘方运算法则和积的乘方运算法则，分别计算得出答案.

【详解】 $\because b^3 \cdot b^3 = b^6$,

$\therefore$ 选项 A 不符合题意;

$\because (ab^2)^3 = a^3b^6$,

$\therefore$ 选项 B 不符合题意;

$\because (a^3)^2 \cdot b^4 = a^6b^4$,

$\therefore$ 选项 C 不符合题意;

$\because (a^5)^2 = a^{10}$,

$\therefore$ 选项 D 符合题意.

故选：D.

【点睛】此题考查了同底数幂乘法法则、幂的乘方运算法则和积的乘方运算法则，解题的关键是熟练掌握以上运算法则.

2. 下列各式能用平方差公式计算的是（ ）

A. $(-a+b)(-a-b)$

B. $(a+b)(a-2b)$

C. $(-a+b)(a-b)$

D. $(-a-b)(a+b)$

【答案】A

【解析】

【分析】利用平方差公式的结构特征判断即可.

【详解】解：A、 $(-a+b)(-a-b) = a^2 - b^2$ 能用平方差公式计算，故选项 A 符合题意;

B、 $(a+b)(a-2b)$ 不符合平方差公式，故选项 B 不符合题意;

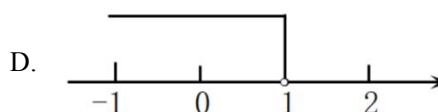
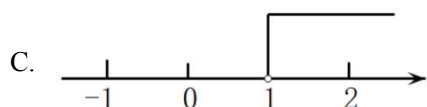
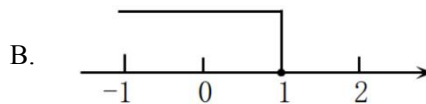
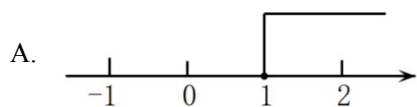
C、 $(-a+b)(a-b) = -(a-b)(a-b)$ ，不能用平方差公式计算，故选项 C 不符合题意；

D、 $(-a-b)(a+b) = -(a+b)(a+b)$ ，不能用平方差公式，故选项 D 不符合题意，

故选：A.

【点睛】此题考查了平方差公式，熟练掌握平方差公式的结构特征是解本题的关键.

3. 不等式 $1+2x \geq 3$ 的解集在数轴上表示正确的是 ()



【答案】A

【解析】

【分析】先求解不等式，求得解集，再用数轴表示这个解集即可得解.

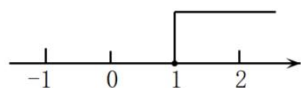
【详解】解： $1+2x \geq 3$

$$2x \geq 3-1,$$

$$2x \geq 2,$$

$$x \geq 1,$$

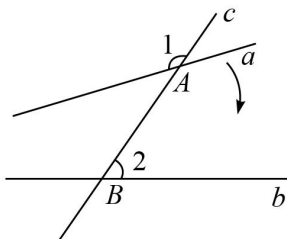
解集在数轴上表示为：



故选：A.

【点睛】本题考查解不等式，用数轴表示不等式的解集. 注意：“>”或“<”用空心圆圈，“≥”或“≤”用实心圆圈.

4. 如图，直线 c 与直线 a 相交于点 A ，与直线 b 相交于点 B ， $\angle 1 = 130^\circ$ ， $\angle 2 = 60^\circ$ ，若要使直线 $a \parallel b$ ，则将直线 a 绕点 A 按如图所示的方向至少旋转 ()



A. 10°

B. 20°

C. 60°

D. 130°

【答案】A

【解析】

【分析】根据平行线的判定可得，当 c 与 a 的夹角为 60° 时，存在 $b \parallel a$ ，由此得到直线 a 绕点 A 顺时针旋转 $60^\circ - 50^\circ = 10^\circ$ 。

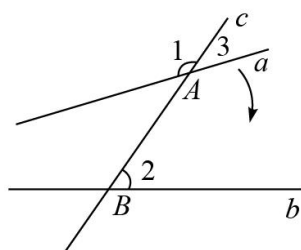
【详解】解： $\because \angle 2 = 60^\circ$ ，

$\therefore$ 若要使直线 $a \parallel b$ ，则 $\angle 3$ 应该为 60° ，

又 $\because \angle 1 = 130^\circ$ ，

$\therefore \angle 3 = 50^\circ$ ，

$\therefore$ 直线 a 绕点 A 按顺时针方向至少旋转： $60^\circ - 50^\circ = 10^\circ$ ，



故选：A.

【点睛】本题主要考查了旋转的性质以及平行线的判定，解题时注意：同位角相等，两直线平行.

5. 已知 $9^m = 27^n$ ，则 m, n 满足的关系是（ ）

A. $m = 3n$

B. $n = 3m$

C. $3m = 2n$

D. $2m = 3n$

【答案】D

【解析】

【分析】直接利用幂的乘方运算法则将原式变形，进而得出答案

【详解】 $\because 9^m = 27^n$ ，

$\therefore (3^2)^m = (3^3)^n$ ，

$\therefore 3^{2m} = 3^{3n}$

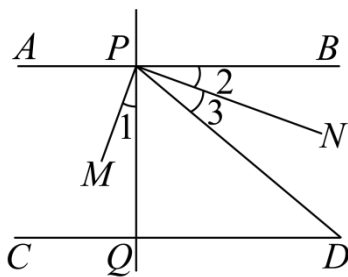
$\therefore 2m = 3n$ ，

故选择：D

【点睛】本题主要考查幂的乘方运算，正确的掌握运算法则是解题的关键.

6. 如图，已知 $AB \parallel CD$ ， PM 平分 $\angle APD$ ， $PN \perp PM$ ， $PQ \perp AB$ ， $\angle CDP = 40^\circ$ ，则下列结论：

① $\angle DPM = 70^\circ$ ；② PN 平分 $\angle BPD$ ；③ $\angle 1 = \angle 2$ ；④ $\angle DPQ = 2\angle 3$ ．其中正确的结论有（ ）



A. ①②③

B. ①②④

C. ①③④

D. ①②③④

【答案】A

【解析】

【分析】根据两直线平行，同旁内角互补得到 $\angle APD = 180^\circ - \angle CDP = 140^\circ$ ，再根据角平分线的定义可得 $\angle DPM = \angle APM = \frac{1}{2} \angle APD$ ，可判断①；根据已知可得 $\angle APQ = 90^\circ$ ，根据两直线平行，内错角相等可得 $\angle PQD = \angle APQ = \angle 1 + \angle APM = 90^\circ$ ，继而得到 $\angle 1 = 90^\circ - \angle APM$ ，再根据已知可得 $\angle MPN = \angle 2 + \angle DPM = 90^\circ$ ，继而得到 $\angle 2 = 90^\circ - \angle DPM$ ，可判断③；根据两直线平行，内错角相等可得 $\angle BPD = \angle CDP = 40^\circ$ ，得到 $\angle 3 = \angle BPD - \angle 2$ ，可判断②；根据两直线平行，同旁内角互补求得 $\angle BPQ = 90^\circ$ ，继而得到 $\angle DPQ = \angle BPQ - \angle 2 - \angle 3$ ，再计算 $2\angle 3 = 40^\circ$ ，可判断④。

【详解】解：∵ $AB \parallel CD$ ， $\angle CDP = 40^\circ$ ，

∴ $\angle APD = 180^\circ - \angle CDP = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$ ，

∵ PM 平分 $\angle APD$ ，

∴ $\angle DPM = \angle APM = \frac{1}{2} \angle APD = \frac{1}{2} \times 140^\circ = 70^\circ$ ，故结论①正确；

∵ $PQ \perp AB$ ，

∴ $\angle APQ = 90^\circ$ ，

∵ $AB \parallel CD$ ，

∴ $\angle PQD = \angle APQ = \angle 1 + \angle APM = 90^\circ$ ，

∴ $\angle 1 = 90^\circ - \angle APM = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$ ，

∵ $PN \perp PM$ ，

∴ $\angle MPN = \angle 2 + \angle DPM = 90^\circ$ ，

∴ $\angle 2 = 90^\circ - \angle DPM = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$ ，

∴ $\angle 1 = \angle 2$ ，故结论③正确；

∵ $AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle BPD = \angle CDP = 40^\circ$,
 $\therefore \angle 3 = \angle BPD - \angle 2 = 40^\circ - 20^\circ = 20^\circ$,
 $\therefore \angle 3 = \angle 2$,
 $\therefore PN$ 平分 $\angle BPD$, 故结论②正确;
 $\because AB \parallel CD$, $\angle PQD = 90^\circ$,
 $\therefore \angle BPQ = 180^\circ - \angle PQD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$,
 $\therefore \angle DPQ = \angle BPQ - \angle 2 - \angle 3 = 90^\circ - 20^\circ - 20^\circ = 50^\circ$,
 $\therefore 2\angle 3 = 2 \times 20^\circ = 40^\circ$,
 $\therefore \angle DPQ \neq 2\angle 3$, 故结论④不正确,
 $\therefore$ 正确的结论有①②③.

故选: A.

【点睛】本题考查平行线的性质, 角平分线的定义, 垂直的定义. 熟练掌握平行线的性质, 角平分线的定义是解题的关键.

二、填空题(本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 共 20 分.)

7. 计算: $(\pi - 3)^0 - 2^{-2} + |-3| =$ _____.

【答案】 $\frac{15}{4}$

【解析】

【分析】原式利用零指数幂、负整数指数幂法则, 以及绝对值的代数意义计算即可求出值.

【详解】解: $(\pi - 3)^0 - 2^{-2} + |-3|$
 $= 1 - \frac{1}{4} + 3$
 $= \frac{15}{4}$,
 故答案为: $\frac{15}{4}$.

【点睛】本题考查了实数的运算, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

8. 太阳的主要成分是氢, 氢原子的半径约为 0.000000000053m . 这个数用科学记数法可以表示为 _____.

【答案】 5.3×10^{-11}

【解析】

【分析】本题主要考查科学记数法，根据科学记数法的表示方法求解即可．科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数．解题关键是正确确定 a 的值以及 n 的值．

【详解】0.000000000053 用科学记数法可以表示为 5.3×10^{-11} ．

故答案为： 5.3×10^{-11} ．

9. 请你写出一个含有 x 、 y 的二元一次方程，使它的一个解为 $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$ ，这个方程是_____．

【答案】 $x - y = -4$ （答案不唯一）

【解析】

【分析】利用方程的解构造一个等式，然后将数值换成未知数即可．

【详解】解：如 $-1 - 3 = -4$ ，

∴ 将数字换为未知数得： $x - y = -4$ （答案不唯一）．

【点睛】本题考查了对二元一次方程的解的理解和运用，注意：二元一次方程的定义包括三方面的含义：

①是整式方程，②含有两个未知数，③所含未知数的项的最高次数是 1 次，此题答案不唯一．

10. “对顶角相等”的逆命题是_____（填“真”或者“假”）命题．

【答案】假

【解析】

【分析】本题考查了对顶角相等，逆命题的真假判断，先写出逆命题再判断真假即可．

【详解】解：“对顶角相等”的逆命题是：相等的角是对顶角，此命题为假命题．

故答案为：假．

11. 一个多边形的每一个内角都是其相邻外角的 2 倍，则这个多边形的边数是_____．

【答案】6

【解析】

【分析】本题考查多边形的内角和与外角和，假设多边形的边数是 n ，则每一个内角是 $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$ ，内角所对的外角为 $180^\circ - \frac{180^\circ(n-2)}{n}$ ，根据题意列出方程，即可求解．

【详解】解：假设多边形边数为 n ，则多边形的每一个内角是 $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$ ，

$$\therefore \text{内角所对的外角为 } 180^\circ - \frac{180^\circ(n-2)}{n},$$

$$\therefore \frac{180^\circ(n-2)}{n} = 2 \left[180^\circ - \frac{180^\circ(n-2)}{n} \right]$$

解得： $n = 6$ ，

故答案为： 6 .

12. 已知关于 x 的方程 $3k - 2x = 6$ 的解是非负数，则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k \geq 2$

【解析】

【分析】 本题考查一元一次方程的解的情况、解一元一次不等式，掌握解方程和解不等式的方法是解题关键．求出方程的解，根据题意得出 $\frac{3k-6}{2} \geq 0$ ，求出不等式的解集即可．

【详解】 解：解方程 $3k - 2x = 6$ ，得 $x = \frac{3k-6}{2}$ ，

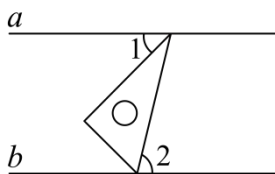
$\because$ 方程 $3k - 2x = 6$ 的解是非负数，

$$\therefore \frac{3k-6}{2} \geq 0,$$

解得 $k \geq 2$ ，

故答案为： $k \geq 2$.

13. 如图， $a \parallel b$ ，将 30° 的直角三角板 30° 与 60° 的内角顶点分别放在直线 a 、 b 上，若 $\angle 1 + \angle 2 = 110^\circ$ ，则 $\angle 1 =$ _____ $^\circ$.



【答案】 40

【解析】

【分析】 本题考查平行线的性质，解题的关键是掌握平行线的性质，根据 $a \parallel b$ ，则 $\angle 1 + 30^\circ = \angle 2$ ，再根据 $\angle 1 + \angle 2 = 110^\circ$ ，等量代换，即可．

【详解】 $\because a \parallel b$ ，

$$\therefore \angle 1 + 30^\circ = \angle 2,$$

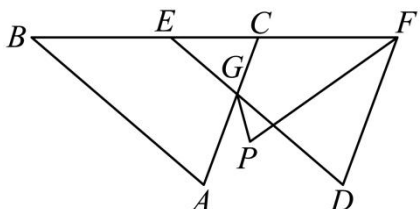
$$\because \angle 1 + \angle 2 = 110^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 1 + 30^\circ = 110^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = 40^\circ,$$

故答案为：40.

14. 如图，将 $\triangle ABC$ 沿 BC 方向平移到 $\triangle DEF$ (B 、 E 、 F 在同一条直线上)，若 $\angle B = 46^\circ$ ， AC 与 DE 相交于点 G ， $\angle AGD$ 和 $\angle DFB$ 的平分线 GP 、 FP 相交于点 P ，则 $\angle P =$ _____ $^\circ$.



【答案】67

【解析】

【分析】由 $DF \parallel AC$ ， $AB \parallel DE$ ，推出 $\angle DEF = \angle B = 46^\circ$ ， $\angle D = \angle AGD$ ，推出 $\angle DFE + \angle D = 180^\circ - 46^\circ = 134^\circ$ ，再由三角形内角和定理可得 $\angle P + \angle DGP = \angle D + \angle DFP$ ，由此即可解决问题.

【详解】解： $\because \triangle ABC$ 沿 BC 方向平移到 $\triangle DEF$ (B 、 E 、 F 在同一条直线上)，

$$\therefore DF \parallel AC, AB \parallel DE,$$

$$\therefore \angle DEF = \angle B = 46^\circ, \angle D = \angle AGD,$$

$$\therefore \angle DFE + \angle D = 180^\circ - 46^\circ = 134^\circ,$$

$$\therefore \angle P + \angle DGP = \angle D + \angle DFP,$$

$$\therefore \angle P = \angle D + \angle DFP - \angle DGP$$

$$= \angle D + \frac{1}{2} \angle DFE - \frac{1}{2} \angle D$$

$$= \frac{1}{2} (\angle DFE + \angle D) = 67^\circ.$$

故答案为：67.

本题考查平行线的性质、三角形内角和定理、角平分线的定义等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型.

15. 已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x - a \geq 0 \\ 3 - 2x > -1 \end{cases}$ 有 9 个整数解，则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $-8 < a \leq -7$

【解析】

【分析】首先确定不等式组的解集，根据整数解的个数就可以确定有哪些整数解，根据解的情况可以得到关于 a 的不等式，从而求出 a 的范围.

【详解】解：
$$\begin{cases} x-a \geq 0 \\ 3-2x > -1 \end{cases}$$

解不等式组可得 $a \leq x < 2$,

$\therefore$ 9 个整数解为 1, 0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7,

$\therefore -8 < a \leq -7$.

故答案为: $-8 < a \leq -7$

【点睛】本题主要考查了学生对不等式组知识点的掌握，先求出不等式组范围，再根据具体解逆推出 a 的取值范围.

16. 若多项式 $2x^3 + ax^2 + bx - 8$ 有两个因式 $x+1$ 和 $x-2$ ，则 $a+b$ 的值为_____.

【答案】 -6

【解析】

【分析】根据题意可得 $2x^3 + ax^2 + bx - 8 = (x+1)(x-2)(2x+k)$ (k 为任意实数)，再根据多项式乘多项式的乘法法则，求出 a 与 b ，进一步求得 $a+b$.

【详解】解：由题意知： $2x^3 + ax^2 + bx - 8 = (x+1)(x-2)(2x+k)$ (k 为任意实数)，

$$\therefore x^3 + ax^2 + bx - 8 = (x^2 - x - 2)(2x + k),$$

$$\therefore 2x^3 + ax^2 + bx - 8 = 2x^3 + (k-2)x^2 + (-k-4)x - 2k,$$

$$\therefore \begin{cases} k-2 = a \\ -k-4 = b \\ -2k = -8 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = 2 \\ b = -8 \\ k = 4 \end{cases}$$

$$\therefore a+b = 2 + (-8) = -6,$$

故答案为: -6.

【点睛】本题考查了因式分解，多项式乘多项式，熟练掌握知识点是解题的关键.

三、解答题（本大题共 10 小题，共 68 分.）

17. 计算:

$$(1) m \cdot m^7 - (2m^4)^2;$$

$$(2) 3x(2x-y) - (x-2y)(-3x+y).$$

【答案】(1) $-3m^8$

$$(2) 9x^2 - 10xy + 2y^2$$

【解析】

【分析】(1) 原式利用同底数幂的乘法，以及积的乘方运算法则计算，合并即可得到结果；

(2) 原式利用单项式乘以多项式，以及多项式乘以多项式法则计算，去括号合并即可得到结果.

【小问 1 详解】

$$m \cdot m^7 - (2m^4)^2 = m^8 - 4m^8 = -3m^8;$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned} & 3x(2x-y) - (x-2y)(-3x+y) \\ &= 6x^2 - 3xy - (-3x^2 + 7xy - 2y^2) \\ &= 6x^2 - 3xy + 3x^2 - 7xy + 2y^2 \\ &= 9x^2 - 10xy + 2y^2. \end{aligned}$$

【点睛】此题考查了整式的混合运算，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

18. 把下列各式分解因式:

$$(1) 4a^2 - 64;$$

$$(2) 16a^2b - 16a^3 - 4ab^2.$$

【答案】(1) $4(a-4)(a+4)$

$$(2) 4ab(4a - 4a^2 - b)$$

【解析】

【分析】(1) 根据提公因式法和公式法即可求解；

(2) 利用提公因式法即可求解.

【小问 1 详解】

解: $4a^2 - 64$

$$=4(a^2-16)$$

$$=4(a-4)(a+4);$$

【小问2详解】

$$\text{解: } 16a^2b-16a^3-4ab^2$$

$$=4ab(4a-4a^2-b).$$

【点睛】 本题考查了多项式的因式分解，熟练掌握提公因式法和公式法分解因式是解题的关键.

$$19. \text{先化简，再求值: } (m-2n)^2-(m-n)(m+n)+2mn, \text{ 其中 } m=-\frac{1}{2}, n=2.$$

$$\text{【答案】 } 5n^2-2mn, 22$$

【解析】

【分析】 直接利用平方差公式以及完全平方公式化简，再合并同类项，把已知代入得出答案.

$$\text{【详解】解: } (m-2n)^2-(m-n)(m+n)+2mn$$

$$=m^2+4n^2-4mn-m^2+n^2+2mn$$

$$=5n^2-2mn,$$

$$\text{当 } m=-\frac{1}{2}, n=2 \text{ 时, 原式 } =5 \times 2^2-2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 2=22.$$

【点睛】 此题主要考查了整式的混合运算—化简求值，正确运用乘法公式化简是解题关键.

$$20. \text{解方程组 } \begin{cases} x+2y=3 \\ 2x-3y=13 \end{cases}$$

$$\text{【答案】 } \begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}$$

【解析】

【分析】 方程组利用加减消元法求出解即可.

$$\text{【详解】解: } \begin{cases} x+2y=3 \text{ ①} \\ 2x-3y=13 \text{ ②} \end{cases},$$

$$\text{①} \times 2 - \text{②} \text{得: } 7y = -7,$$

$$\text{解得: } y = -1,$$

$$\text{把 } y = -1 \text{ 代入①得: } x = 5,$$

则方程组的解为 $\begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}$.

21. (1) 解不等式: $\frac{x-8}{3} > x-5$, 并把它的解集在数轴上表示出来;

(2) 解不等式组 $\begin{cases} x+2(1-2x) \geq -4 \\ \frac{3+5x}{2} > x-1 \end{cases}$ 并写出它的所有非负整数解.

【答案】(1) $x < \frac{7}{2}$, 数轴见解析; (2) $-\frac{5}{3} < x \leq 2$, 非负整数解为 0, 1, 2

【解析】

【分析】本题考查了一元一次不等式的求解, 在数轴上表示不等式解, 一元一次不等式组的解法, 求不等式解的整数解, 准确求解是解题关键

(1) 两边同时乘以 3, 再去括号, 称项合并同类项, 系数为 1, 再数轴上表示出来;

(2) 首先解每个不等式, 两个不等式的解集的公共部分就是不等式组的解集, 然后确定整数解即可.

【详解】解: (1) $\frac{x-8}{3} > x-5$,

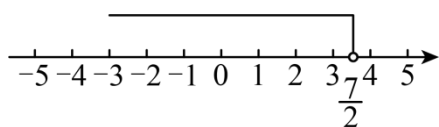
去分母, 得: $x-8 > 3(x-5)$,

去括号得: $x-8 > 3x-15$,

移项合并同类项得: $-2x > -7$,

系数化为 1, 得: $x < \frac{7}{2}$;

在数轴上表示如下:



(2) $\begin{cases} x+2(1-2x) \geq -4 \text{ ①} \\ \frac{3+5x}{2} > x-1 \text{ ②} \end{cases}$,

解不等式①得: $x \leq 2$,

解不等式②得: $x > -\frac{5}{3}$,

则不等式组的解集是: $-\frac{5}{3} < x \leq 2$, 则非负整数解有 0, 1, 2.

22. 我们知道, 一般的数学公式、法则、定义可以正向运用, 也可以逆向运用请运用幂的运算法则的逆用解

决下列问题：

$$(1) \left(-\frac{1}{4}\right)^{2025} \times 4^{2026} = \underline{\hspace{2cm}};$$

(2) 已知 $a=2^9, b=3^6, c=7^3$ ，请把 a, b, c 用 “<” 连接起来： $\underline{\hspace{2cm}}$ ；

(3) 若 $4^a=2, 4^b=3$ ，求 $4^{3a+2b-1}$ 的值；

【答案】(1) -4

(2) $c < a < b$

(3) 18

【解析】

【分析】 本题考查幂的运算的逆用：

(1) 逆用积的乘方，进行求解即可；

(2) 将 a, b, c 化为同指数幂的形式，比较底数的大小即可；

(3) 逆用同底数幂的乘除法，幂的乘法，进行计算即可．

【小问 1 详解】

$$\text{解：原式} = \left(-\frac{1}{4} \times 4\right)^{2025} \times 4 = -1 \times 4 = -4；$$

故答案为： -4 ；

【小问 2 详解】

$$a=2^9=(2^3)^3=8^3, b=3^6=(3^2)^3=9^3, c=7^3,$$

$$\because 9 > 8 > 7,$$

$$\therefore c < a < b;$$

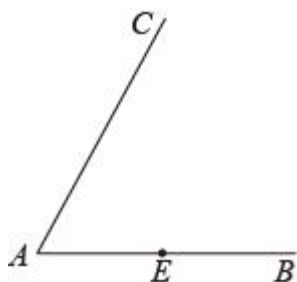
故答案为： $c < a < b$.

【小问 3 详解】

$$\because 4^a=2, 4^b=3,$$

$$\therefore 4^{3a+2b-1} = (4^a)^3 \cdot (4^b)^2 \div 4^1 = 2^3 \times 3^2 \div 4 = 8 \times 9 \times \frac{1}{4} = 18.$$

23. 已知 $\angle BAC$ ，点 E 在射线 AB 上．请用尺规作图法，过点 E 求作一条直线 MN ，使得 $MN \parallel AC$.

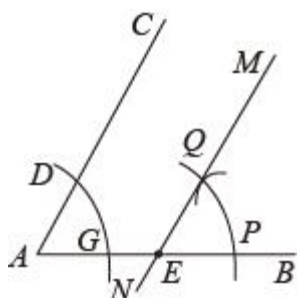


【答案】见解析

【解析】

【分析】根据尺规作图作已知直线的平行线的作法即可求解

【详解】解：如图所示，

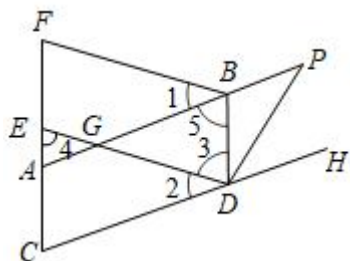


作法：

- (1) 以点 A 为圆心，以任意长度为半径画弧分别交 AC 于 D 、 AB 于 G ，
- (2) 以 E 为圆心，以相同长度为半径，画弧交 AB 于 P ，
- (3) 以 P 为圆心，以 DG 的长为半径画弧交前面的弧于 Q ，
- (4) 连接 EQ 并延长，则直线 MN 即为所求。

【点睛】本题考查了尺规作图，熟练掌握尺规作图的方法是解题的关键。

24. 如图，已知点 E, F 为四边形 $ABDC$ 的边 CA 的延长线上的两点，连接 DE, BF ，作 $\angle BDH$ 的平分线 DP 交 AB 的延长线于点 P 。若 $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ ， $\angle 5 = \angle C$ 。



- (1) 判断 DE 与 BF 是否平行？并说明理由；
- (2) 试说明： $\angle C = 2\angle P$ 。

【答案】(1) $DE \parallel BF$ ，理由见解析

(2) 说明见解析

【解析】

【分析】(1) 根据平行线的判定得出 $BD \parallel CE$ ，根据平行线的性质得出 $\angle 5 = \angle FAB$ ，求出 $\angle C = \angle FAB$ ，根据平行线的判定得出 $AB \parallel CD$ ，根据平行线的性质得出 $\angle 2 = \angle BGD$ 即可；

(2) 求出 $\angle BDP = \angle PDH = \angle P$ ，根据三角形的外角性质得出即可．

【小问 1 详解】

解：(1) $DE \parallel BF$ ，

理由是： $\because \angle 3 = \angle 4$ ，

$\therefore BD \parallel CE$ ，

$\therefore \angle 5 = \angle FAB$ ，

$\because \angle 5 = \angle C$ ，

$\therefore \angle C = \angle FAB$ ，

$\therefore AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle 2 = \angle BGD$ ，

$\because \angle 1 = \angle 2$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle BGD$ ，

$\therefore DE \parallel BF$ ；

【小问 2 详解】

$\because AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle P = \angle PDH$ ，

$\because DP$ 平分 $\angle BDH$ ，

$\therefore \angle BDP = \angle PDH$ ，

$\therefore \angle BDP = \angle PDH = \angle P$ ，

$\because \angle 5 = \angle P + \angle BDP$ ，

$\therefore \angle 5 = 2\angle P$ ，

$\because \angle C = \angle 5$ ，

$\therefore \angle C = 2\angle P$ ．

【点睛】本题考查了平行线的性质和判定、三角形外角性质，能熟练地运用定理进行推理是解此题的关键，注意：平行线的性质有：①两直线平行，同位角相等，②两直线平行，内错角相等，③两直线平行，同旁内角互补．

25. 某校七年级（6）班对半学期考试成绩优秀的学生进行奖励，颁发奖品，班主任安排生活委员到某文具店购买甲、乙两种奖品，若买甲种奖品 20 个，乙种奖品 10 个，共用 110 元，买甲种奖品 30 个比买乙种奖品 20 个少花 10 元.

（1）求甲、乙两种奖品的单价各是多少元；

（2）因奖品数量的需要和班费的限制，现要求本次购买甲种奖品的数量是乙种奖品的数量的 2 倍还少 10 个，而且购买这两种奖品的总金额不低于 280 元且不超过 320 元，请问有哪几种购买方案？哪种方案最省钱？

【答案】（1）甲种奖品的单价为 3 元，乙种奖品的单价是 5 元；（2）方案①购买乙种奖品 29 个，购买甲种奖品 48 个最省钱.

【解析】

【分析】（1）设甲种奖品的单价是 x 元，一种奖品的单价是 y 元，然后依据买甲种奖品 20 个，乙种奖品 10 个，共用 110 元，买甲种奖品 30 个比买乙种奖品 20 个少花 10 元列方程组求解即可；

（2）设购买乙种奖品的数量为 a 个，则购买甲种奖品的数量为 $(2a-10)$ 个，然后依据总费用在 280 元到 320 元之间列不等式组求解即可.

【详解】解：（1）设甲种奖品的单价是 x 元，一种奖品的单价是 y 元.

根据题意得：
$$\begin{cases} 20x+10y=110 \\ 30x-20y=-10 \end{cases},$$

解得： $x=3, y=5$.

答：甲种奖品的单价为 3 元，乙种奖品的单价是 5 元.

（2）设购买乙种奖品的数量为 a 个，则购买甲种奖品的数量为 $(2a-10)$ 个.

根据题意得

$$\begin{cases} 3(2a-10)+5a \geq 280 \\ 3(2a-10)+5a \leq 320 \end{cases}$$

解得： $28\frac{2}{11} \leq a \leq 31\frac{9}{11}.$

$\because a$ 只能取正整数，

$\therefore a=29, 30, 31.$

$\therefore$ 有 3 中购买方案.

方案①：购买乙种奖品 29 个，购买甲种奖品 48 个；

方案②：购买乙种奖品 30 个，购买甲种奖品 50 个；

方案③：购买乙种奖品 31 个，购买甲种奖品 52 个.

方案①最省钱.

$\because 3 \times 48 + 5 \times 29 = 289$ 元; $3 \times 50 + 5 \times 30 = 3009$ 元; $3 \times 52 + 5 \times 31 = 311$ 元,

$\therefore$ 方案①最省钱.

【点睛】本题主要考查的是二元一次方程组 and 一元一次不等式组的应用, 根据列出方程组和不等式组是解题的关键.

26. 如图, 直线 $AB \parallel CD$, 直线 EF 分别与 AB , CD 交于点 E , F , EM 平分 $\angle AEF$ 交 CD 于点 M , 若 G 是射线 MD 上一动点 (不与点 M , F 重合).

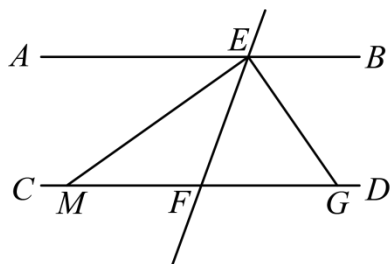


图1

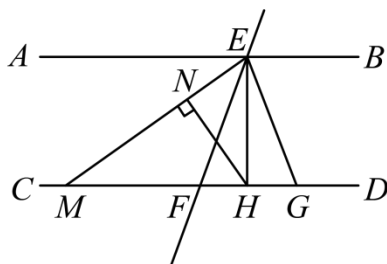


图2

(1) 如图 1, 若 EG 平分 $\angle BEF$, 试判断 EM 与 EG 的位置关系, 并说明理由;

(2) 如图 2, 若 EH 平分 $\angle FEG$ 交 CD 于点 H , 过点 H 作 $HN \perp EM$ 于点 N , 设 $\angle EHN = \alpha$, $\angle EGF = \beta$.

① 当点 G 在点 F 的右侧时, 若 $\beta = 60^\circ$, 求 α 的度数;

② 在点 G 运动的过程中, α 和 β 之间满足怎样的数量关系? 请直接写出你的猜想, 并说明理由.

【答案】(1) EM 与 EG 垂直, 理由见解析

(2) $\alpha = \frac{1}{2}\beta$, 理由见解析

【解析】

【分析】(1) 由角平分线的定义求得 $\angle MEG = 90^\circ$;

(2) 由 (1) 先求得 $\angle NEH = \frac{1}{2}\angle AEG$, 进一步可求得 $\alpha = \frac{1}{2}\beta$.

【小问 1 详解】

解: $\because EM, EG$ 分别是 $\angle AEF, \angle BEF$ 的角平分线

$$\therefore \angle AEM = \angle FEM = \frac{1}{2}\angle AEF, \angle BEG = \angle FEG = \frac{1}{2}\angle BEF$$

$$\therefore \angle MEG = \angle FEM + \angle FEG = \frac{1}{2}(\angle AEF + \angle BEF) = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$$

$\therefore EM$ 与 EG 垂直.

【小问 2 详解】

解: ① $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \beta = \angle BEG = 60^\circ,$$

由 (1) 知: $\angle NEH = \frac{1}{2} \angle AEG = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ,$

$$\therefore \alpha = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

②理由如下:

由①知, $\alpha = 90^\circ - \angle NEH = 90^\circ - \frac{1}{2} \times (180^\circ - \angle GEB),$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2} \times (180^\circ - \beta) = \frac{1}{2} \beta.$$

【点睛】 本题考查了角平分线的定义, 互余的概念, 平行线的性质, 解题的关键是要善于把握问题之间的联系, 从而获得思路.