

2023~2024 年七年级数学下学期期末培优测试

(尖子生专用 A)

考试时间：120 分钟；满分：140 分

学校：_____ 姓名：_____ 班级：_____ 考号：_____

一、单选题（共 18 分）

1. (本题 3 分) 若 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ ，是关于 x 和 y 的二元一次方程 $mx + ny = 3$ 的解，则 $2m - 4n$ 的值等于()

A. 3 B. 6 C. -1 D. -2

【答案】B

【详解】解：将 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ 代入方程 $mx + ny = 3$ 得： $m - 2n = 3$ ，

$$\therefore 2m - 4n = 2(m - 2n) = 2 \times 3 = 6.$$

故选：B.

2. (本题 3 分) 观察下列式子：

$$4 \times 6 - 2 \times 4 = 4 \times 4;$$

$$6 \times 8 - 4 \times 6 = 6 \times 4;$$

$$8 \times 10 - 6 \times 8 = 8 \times 4;$$

...

若第 n 个等式的右边的值大于 180，则 n 的最小值是 ()

A. 20 B. 21 C. 22 D. 23

【答案】C

【详解】解：第 1 个式子： $4 \times 6 - 2 \times 4 = 4 \times 4$ ；

第 2 个式子： $6 \times 8 - 4 \times 6 = 6 \times 4$ ；

第 3 个式子： $8 \times 10 - 6 \times 8 = 8 \times 4$ ；

...

$\therefore$ 第 n 个等式： $2(n+1)(2n+4) - 2n(2n+2) = 2(n+1) \times 4$ ；

$\therefore$ 第 n 个等式的右边的值大于 180，

即 $2(n+1) \times 4 > 180$ ，

$n > 21.5$ ，

$\therefore n$ 的最小值是 22.

故选: C.

3. (本题 3 分) 给出下列 4 个命题: ①四边形的内角和等于外角和; ②有两个角互余的三角形是直角三角形; ③若 $|x|=2$, 则 $x=2$; ④同旁内角的平分线互相垂直. 其中真命题的个数为 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】 B

【详解】 解: ①四边形的内角和和外角和都是 360° ,

$\therefore$ 四边形的内角和等于外角和, 是真命题;

②有两个角互余的三角形是直角三角形, 是真命题;

③若 $|x|=2$, 则 $x=\pm 2$, 本说法是假命题;

④两直线平行时, 同旁内角的平分线互相垂直, 本说法是假命题;

故选: B.

4. (本题 3 分) 若关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} 3x+y=k+1 \\ x+3y=1 \end{cases}$ 的解满足 $x+y>0$, 则 k 的取值范围是 ()

- A. $k < -2$ B. $k > -2$ C. $k < 2$ D. $k > 2$

【答案】 B

【详解】 解: $\begin{cases} 3x+y=k+1 \text{ ①} \\ x+3y=1 \text{ ②} \end{cases}$,

① $\times 3 -$ ②, 可得 $8x = 3k + 2$,

解得: $x = \frac{3}{8}k + \frac{1}{4}$,

把 $x = \frac{3}{8}k + \frac{1}{4}$ 代入 ②, 可得 $\frac{3}{8}k + \frac{1}{4} + 3y = 1$,

解得: $y = \frac{1}{4} - \frac{k}{8}$,

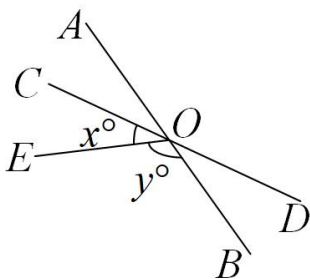
$\because x+y>0$,

$\therefore \frac{3}{8}k + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{k}{8} > 0$,

解得: $k > -2$,

故选: B.

5. (本题 3 分) 如图, 直线 AB 与 CD 相交于点 O , 且 $\angle AOD=150^\circ$. $\angle EOB$ 比 $\angle COE$ 大 90° , 设 $\angle COE=x^\circ$, $\angle EOB=y^\circ$, 则可得到的方程组为 ()



- A. $\begin{cases} x = y - 90 \\ x + y = 150 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = y + 90 \\ x + y = 150 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = y - 90 \\ x + y = 180 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = y + 90 \\ x + y = 180 \end{cases}$

【答案】A

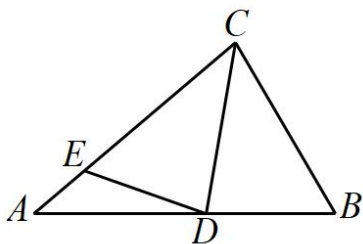
【详解】解：∵ $\angle AOD = 150^\circ$ ，

$$\therefore \angle COE + \angle EOB = \angle BOC = \angle AOD = 150^\circ,$$

$$\text{由题意可得: } \begin{cases} x = y - 90 \\ x + y = 150 \end{cases}$$

故选：A.

6. (本题3分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 80^\circ$ ，点D在AB上，将 $\triangle BCD$ 沿CD折叠，点B落在边AC的点E处. 若 $\angle ADE = 24^\circ$ ，则 $\angle A$ 的度数为 ()



- A. 24° B. 32° C. 38° D. 48°

【答案】C

【详解】解：∵ 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 80^\circ$ ，

$$\therefore \angle B = 180^\circ - \angle A - \angle ACB,$$

$$= 100^\circ - \angle A,$$

∵ 将 $\triangle BCD$ 沿CD折叠，点B落在边AC的点E处，

$$\therefore \angle CED = \angle B = 100^\circ - \angle A,$$

∵ $\angle CED$ 是 $\triangle ADE$ 的一个外角， $\angle ADE = 24^\circ$ ，

$$\therefore \angle CED = \angle A + \angle ADE,$$

$$100^\circ - \angle A = \angle A + 24^\circ,$$

解得： $\angle A=38^\circ$.

故选：C.

二、填空题（共 40 分）

7.（本题 4 分）已知 $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases} x-2y=2m \\ nx+y=-3 \end{cases}$ 的解，则 $m+n$ 的值是_____.

【答案】 0

【详解】 解：把 $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$ 代入方程组 $\begin{cases} x-2y=2m \\ nx+y=-3 \end{cases}$ 得：

$$\begin{cases} -2-2=2m \\ -2n+1=-3 \end{cases},$$

解得： $m=-2$ ， $n=2$ ，

则 $m+n=-2+2=0$ ，

故答案为：0.

8.（本题 4 分）已知 $AB//CD$ ， P 是平面内一点，作 $PE\perp AB$ ，垂足为 E ， F 为 CD 上一点，且 $\angle PFD=130^\circ$ ，则 $\angle EPF$ 的度数是_____.

【答案】 140° 或 40°

【详解】 解：如图所示，当 P 在 AB 与 CD 之间时，过点 P 作 $PG//AB$ ，

$\because AB//CD$ ，

$\therefore AB//CD//PG$ ，

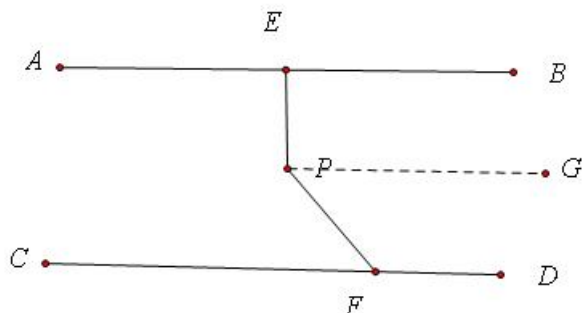
$\therefore \angle BEP+\angle GPE=180^\circ$ ， $\angle GPF=\angle PFC$ ，

$\because PE\perp AB$ ， $\angle PFD=130^\circ$ ，

$\therefore \angle PEB=90^\circ$ ， $\angle PFC=180^\circ-\angle PFD=50^\circ$ ，

$\therefore \angle GPE=180^\circ-\angle PEB=90^\circ$ ， $\angle GPF=\angle PFC=50^\circ$ ，

$\therefore \angle EPF=\angle GPE+\angle GPF=140^\circ$ ；



如图所示当 P 在 AB 与 CD 外则时，过点 P 作 $PG//AB$ ，

$\because AB//CD$ ，

$$\therefore AB \parallel CD \parallel PG,$$

$$\therefore \angle BEP + \angle GPE = 180^\circ, \quad \angle GPF = \angle PFC,$$

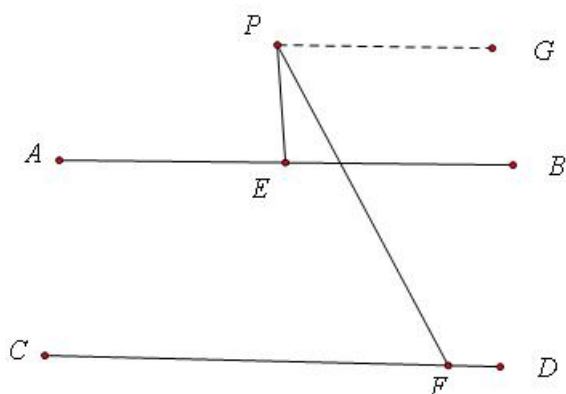
$$\because PE \perp AB, \quad \angle PFD = 130^\circ,$$

$$\therefore \angle PEB = 90^\circ, \quad \angle PFC = 180^\circ - \angle PFD = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle GPE = 180^\circ - \angle PEB = 90^\circ, \quad \angle GPF = \angle PFC = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle EPF = \angle GPE - \angle GPF = 40^\circ;$$

故答案为： 140° 或 40° .



9. (本题 4 分) 已知 $a^m = 4$, $a^n = 2$, 则 a^{2m-n} 的值为_____.

【答案】 8

【详解】 解: $\because a^m = 4$,

$$\therefore (a^m)^2 = 16, \text{ 即 } a^{2m} = 16,$$

$$\because a^n = 2,$$

$$\therefore a^{2m-n} = a^{2m} \div a^n = 16 \div 2 = 8,$$

故答案为: 8.

10. (本题 4 分) 已知 $a > 0$, $b > 0$, $(3a + 3b + 1)(3a + 3b - 1) = 899$, 则 $a + b =$ _____.

【答案】 10

【详解】 解: 设 $a + b = x$,

$$\text{则原式化成 } (3x + 1)(3x - 1) = 899,$$

$$\text{整理得: } 9x^2 - 1 = 899,$$

$$\text{即 } x^2 = 100,$$

$$\text{解得: } x = \pm 10,$$

$$\because a > 0, \quad b > 0,$$

$$\therefore a + b = 10,$$

故答案为：10.

11. (本题4分) 计算： $2023^{2023} \times \left(\frac{1}{2023}\right)^{2022} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】2023

【详解】解： $2023^{2023} \times \left(\frac{1}{2023}\right)^{2022}$

$$= 2023 \times 2023^{2022} \times \left(\frac{1}{2023}\right)^{2022}$$

$$= 2023.$$

故答案为：2023.

12. (本题4分) 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x \leq 2 \\ x > m \end{cases}$ 无解，则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \geq 2$

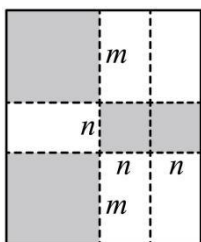
【详解】解：关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x \leq 2 \\ x > m \end{cases}$ 无解，也就是两个不等式解集没有公共部分，

即 $x \leq 2$ ， $x > m$ 没有公共部分，

$$\therefore m \geq 2,$$

故答案为： $m \geq 2$.

13. (本题4分) 如图，将一张长方形纸板按图中虚线裁剪成九块，其中有两块是边长都为 m 的大正方形，两块是边长都为 n 的小正方形，五块是长为 m ，宽为 n 的全等小长方形，且 $m > n$ (以上长度单位：cm). 观察图形，可以发现代数式 $2m^2 + 5mn + 2n^2$ 可以因式分解为_____.



【答案】 $(2m + n)(m + 2n)$

【详解】解：由图可知，长方形的两条邻边的长分别为： $(2m + n)$ ， $(m + 2n)$ ，

$$\therefore \text{长方形纸板的面积为：}(2m + n)(m + 2n),$$

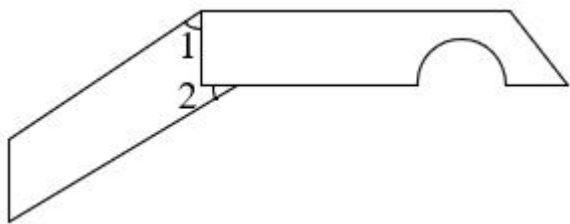
$$\text{又长方形纸板的面积} = 2m^2 + 5mn + 2n^2,$$

$$\therefore 2m^2 + 5mn + 2n^2 = (2m + n)(m + 2n);$$

故答案为： $(2m + n)(m + 2n)$.

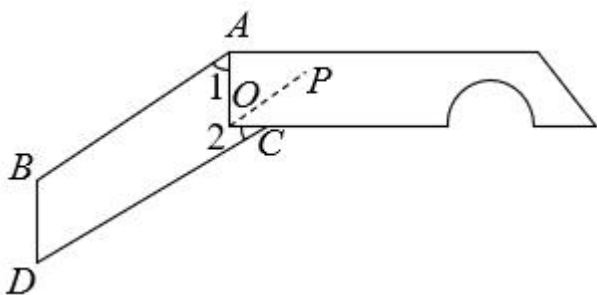
14. (本题4分) 如图所示，是我们生活中经常接触的小刀，刀柄外形是一个直角梯形（挖去一小半圆），刀片上

下是平行的，转动刀片时会形成 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ ，则 $\angle 1 + \angle 2 =$ _____.



【答案】 90°

【详解】解：如图，过点 O 作 $OP \parallel AB$ ，则 $\angle 1 = \angle AOP$.



$\because AB \parallel CD$,

$\therefore OP \parallel CD$,

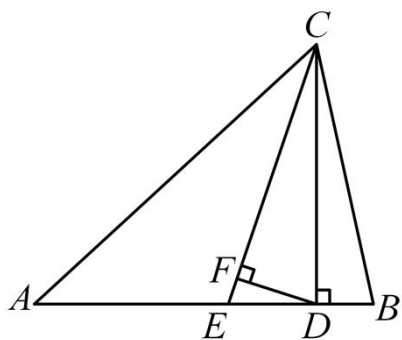
$\therefore \angle 2 = \angle POC$,

$\because$ 刀柄外形是一个直角梯形，

$\therefore \angle AOP + \angle POC = 90^\circ$,

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$.

15. (本题 4 分) 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 40^\circ$ ， $\angle B = 80^\circ$ ， CE 平分 $\angle ACB$ ， $CD \perp AB$ 于 D ， $DF \perp CE$ ，则 $\angle CDF$ 的度数=_____



【答案】 $70^\circ/70$ 度

【详解】解： $\because \angle A = 40^\circ$ ， $\angle B = 80^\circ$ ，

$\therefore \angle ACB = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 40^\circ - 80^\circ = 60^\circ$ ，

$\because CE$ 平分 $\angle ACB$,

$$\therefore \angle BCE = \frac{1}{2} \angle ACB = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ,$$

$\because CD \perp AB$,

$$\therefore \angle CDB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DCB = 180^\circ - \angle CDB - \angle B = 180^\circ - 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ,$$

$$\therefore \angle DCF = \angle BCE - \angle BCD = 30^\circ - 10^\circ = 20^\circ,$$

$\because DF \perp CE$,

$$\therefore \angle DFC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDF = 180^\circ - \angle DCF - \angle CFD = 180^\circ - 20^\circ - 90^\circ = 70^\circ,$$

故答案为: 70° .

16. (本题4分) 已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases} 2x+1 > x+a \\ x-1 \leq \frac{2x+a+2}{3} \end{cases}$ (a 为整数) 的所有整数解的和 S 满足 $21.6 \leq S < 33.6$,

则所有这样的 a 的和为_____.

【答案】 5

【详解】
$$\begin{cases} 2x+1 > x+a \text{ ①} \\ x-1 \leq \frac{2x+a+2}{3} \text{ ②} \end{cases},$$

$\because$ 解不等式①得: $x > a-1$,

解不等式②得: $x \leq a+5$,

$\therefore$ 不等式组的解集为 $a-1 < x \leq a+5$,

$\therefore$ 不等式组的整数解 $a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5$,

$\because$ 所有整数解的和 S 满足 $21.6 \leq S < 33.6$,

$$\therefore 21.6 \leq 6a+15 \leq 33.6,$$

$$\therefore 1.1 \leq a \leq 3.1,$$

$\therefore a$ 的值为 2, 3,

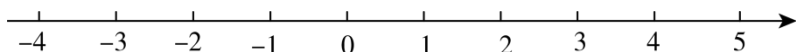
$$\therefore 2+3=5,$$

故答案为 5.

三、解答题 (共 82 分)

17. (本题 8 分) (1) 解方程组: $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$

(2) 解不等式组: $\begin{cases} 5x-1 \geq 3x-5 \\ \frac{x-1}{2} < 1 \end{cases}$, 把解集表示在数轴上.



【答案】 (1) $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$; (2) $-2 \leq x < 3$, 图见解析

【详解】 (1) $\begin{cases} x-y=1 \text{ ①} \\ 2x+y=5 \text{ ②} \end{cases}$

①+②, 得 $3x=6$,

解得: $x=2$,

将 $x=2$ 代入①, 得 $y=1$,

$\therefore$ 原方程组的解为 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

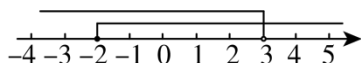
(2) $\begin{cases} 5x-1 \geq 3x-5 \text{ ①} \\ \frac{x-1}{2} < 1 \text{ ②} \end{cases}$

由①, 得 $x \geq -2$

由②, 得 $x < 3$,

$\therefore$ 原不等式组的解集为 $-2 \leq x < 3$.

解集表示在数轴上, 如图所示,



18. (本题 8 分) 分解因式:

(1) $3x^2 - 3y^2$

(2) $m^3 + 6m^2 + 9m$

【答案】 (1) $3(x+y)(x-y)$

(2) $m(m+3)^2$

【详解】 (1) 原式 $= 3(x^2 - y^2)$

$= 3(x+y)(x-y)$;

(2) 原式 $= m(m^2 + 6m + 9)$

$= m(m+3)^2$.

19. (本题 8 分) 计算:

(1) $(3-\pi)^0 + (-1)^{2023} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

(2) $x \cdot x^5 - (2x^3)^2 + x^9 \div x^3$

【答案】 (1) 2

(2) $-2x^6$

【详解】(1) 解：原式 = $1 - 1 + 2 = 2$ ；

(2) 解：原式 = $x^6 - 4x^6 + x^6 = -2x^6$ 。

20. (本题 10 分) 已知 $a^2 - 2a + 1 = 0$ ，求代数式 $a(a - 4) + (a + 1)(a - 1) + 1$ 的值。

【答案】-2

【详解】解： $a(a - 4) + (a + 1)(a - 1) + 1$

$$= a^2 - 4a + a^2 - 1 + 1$$

$$= 2a^2 - 4a$$

$$= 2(a^2 - 2a),$$

$$\because a^2 - 2a + 1 = 0,$$

$$\therefore a^2 - 2a = -1,$$

$$\therefore \text{原式} = 2 \times (-1) = -2.$$

21. (本题 8 分) 某公司有甲、乙两个口罩生产车间，甲车间每天生产普通口罩 6 万个，N95 口罩 2.2 万个。乙车间每天生产普通口罩和 N95 口罩共 10 万个，且每天生产的普通口罩比 N95 口罩多 6 万个。

(1) 求乙车间每天生产普通口罩和 N95 口罩各多少万个？

(2) 现接到市防疫指挥部要求：需要该公司提供至少 156 万个普通口罩和尽可能多的 N95 口罩。因受原料和生产设备的影响，两个车间不能同时生产，且当天只能确保一个车间的生产。已知该公司恰好用 20 天完成防疫指挥部下达的任务。

问：①该公司至少安排乙车间生产多少天？

②该公司最多能提供多少万个 N95 口罩？

【答案】(1) 乙车间每天生产普通口罩 8 万个，乙车间每天生产 N95 口罩 2 万个；(2) ①该公司至少安排乙车间生产 18 天；②该公司最多能提供 40.4 万个 N95 口罩

【详解】解：(1) 设乙车间每天生产普通口罩 x 万个，乙车间每天生产 N95 口罩 y 万个，

$$\text{依题意得：} \begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 6 \end{cases}.$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 8 \\ y = 2 \end{cases}.$$

答：乙车间每天生产普通口罩 8 万个，乙车间每天生产 N95 口罩 2 万个；

(2) ①设安排乙车间生产 m 天，则甲车间生产 $(20 - m)$ 天，

$$\text{依题意得：} 8m + 6(20 - m) \geq 156.$$

$$\text{解得 } m \geq 18.$$

答：该公司至少安排乙车间生产 18 天。

②由题意得，乙车间生产的天数可能是 18，19 或 20 天，即有三种生产方案：

方案一：乙车间生产 18 天，甲车间生产 2 天；

生产口罩总量为： $18 \times 2 + 2 \times 2.2 = 40.4$ （万个）；

方案二：乙车间生产 19 天，甲车间生产 1 天；

生产口罩总量为： $19 \times 2 + 2.2 = 40.2$ （万个）；

方案三：乙车间生产 20 天，甲车间生产 0 天；

生产口罩总量为： $20 \times 2 = 40$ （万个）；

答：该公司最多能提供 40.4 万个 A95 口罩。

22.（本题 8 分）计算

(1) 已知 $2^x = 5$ ， $2^y = 3$ ，求： 2^{x-2y} 的值.

(2) $x - 2y + 3 = 0$ ，求： $2^x \div 4^y \times 8$ 的值.

【答案】 (1) $\frac{5}{9}$

(2) 1

【详解】 (1) 解： $\because 2^x = 5$ ， $2^y = 3$ ，

$$\therefore 2^{x-2y} = 2^x \div (2^y)^2 = 2^x \div (2^y)^2 = 5 \div 3^2 = \frac{5}{9};$$

(2) $2^x \div 4^y \times 8$

$$= 2^x \div 2^{2y} \times 2^3$$

$$= 2^{x-2y+3}$$

$$\because x - 2y + 3 = 0,$$

$$\therefore \text{原式} = 2^0 = 1.$$

23.（本题 10 分）探究问题：已知 $\angle ABC$ ，画一个角 $\angle DEF$ ，使 $DE \parallel AB$ ， $EF \parallel BC$ ，且 DE 交 BC 于点 P 。 $\angle ABC$ 与 $\angle DEF$ 有怎样的数量关系？

(1) 我们发现 $\angle ABC$ 与 $\angle DEF$ 有两种位置关系：如图 1 与图 2 所示。

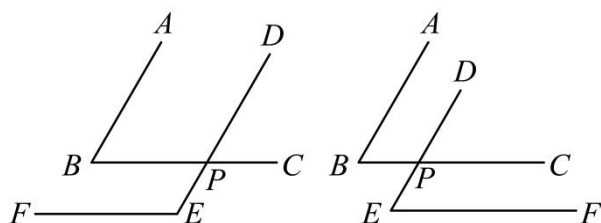


图1

图2

①图 1 中 $\angle ABC$ 与 $\angle DEF$ 数量关系为_____；图 2 中 $\angle ABC$ 与 $\angle DEF$ 数量关系为_____；

②由①得出一个真命题（用文字叙述）：_____.

(2)应用②中的真命题，解决以下问题：

若两个角的两边互相平行，且一个角比另一个角的2倍少 30° ，请直接写出这两个角的度数.

【答案】(1)① $\angle ABC + \angle DEF = 180^\circ$; $\angle ABC = \angle DEF$; ②如果两个角的两边互相平行，那么这两个角相等或互补

(2)这两个角的度数为 30° ， 30° 或 70° ， 110°

【详解】(1)解：①如图1， $\because EF \parallel BC$,

$$\therefore \angle DPB = \angle DEF,$$

$$\because DE \parallel AB,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle DPB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle DEF = 180^\circ;$$

如图2， $\because EF \parallel BC$,

$$\therefore \angle DPC = \angle DEF,$$

$$\because DE \parallel AB,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle DPC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle DEF;$$

故答案为： $\angle ABC + \angle DEF = 180^\circ$; $\angle ABC = \angle DEF$;

②由①得：如果两个角的两边互相平行，那么这两个角相等或互补；

故答案为：如果两个角的两边互相平行，那么这两个角相等或互补.

(2)解：设两个角的度数分别为 x 和 $2x - 30^\circ$,

由(1)得： $x = 2x - 30^\circ$ 或 $x + 2x - 30^\circ = 180^\circ$,

解得 $x = 30^\circ$ 或 $x = 70^\circ$,

$\therefore$ 这两个角的度数为 30° ， 30° 或 70° ， 110° .

24. (本题10分)当我们利用两种不同的方法计算同一图形的面积时，可以得到一个等式，由图1，可得等式：

$$(a + 2b)(a + b) = a^2 + 3ab + 2b^2.$$

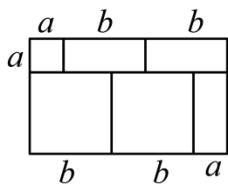


图1

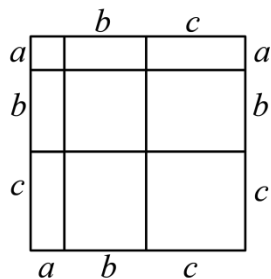


图2

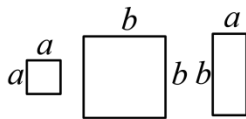


图3

(1) 由图 2 可得等式: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

(2) 利用 (1) 中所得到的结论, 解决下面的问题:

已知 $a + b + c = 11$, $ab + bc + ac = 38$, 求 $a^2 + b^2 + c^2$ 的值;

(3) 利用图 3 中的纸片 (足够多), 画一种拼图, 使该拼图可用来验证等式: $2a^2 + 5ab + 2b^2 = (2a + b)(a + 2b)$.

【答案】 (1) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;

(2) 45;

(3) 见解析.

【详解】 (1) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$,

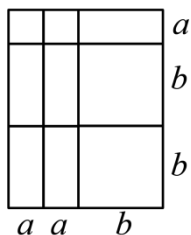
故答案为: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;

(2) $\because a + b + c = 11$, $ab + bc + ac = 38$,

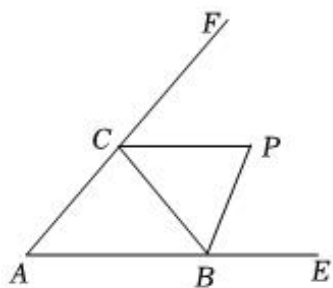
$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc)$,

$= 121 - 76 = 45$;

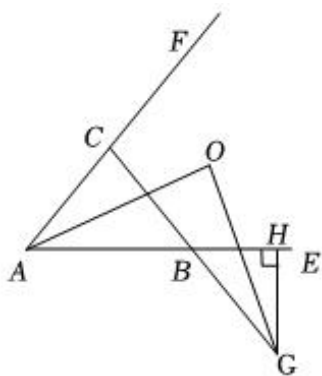
(3) 如图所示:



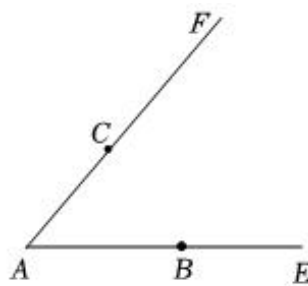
25. (本题 12 分) 如图, 锐角 $\angle EAF$, 点 B, C 分别在 AE, AF 上.



(图1)



(图2)



(备用图)

(1) 如图 1, 若 $\angle EAF = 56^\circ$, 连接 BC , $\angle ABC = \alpha$, $\angle ACB = \beta$, $\angle CBE$ 的平分线与 $\angle BCF$ 的平分线交于点 P , 则 $\alpha + \beta =$ _____ $^\circ$, $\angle P =$ _____ $^\circ$;

(2) 若点 Q 在 $\angle EAF$ 内部 (点 Q 不在线段 BC 上), 连接 BQ , QC , $\angle EAF = 56^\circ$, $\angle CQB = 104^\circ$, BM , CN 分别平分 $\angle QBE$ 和 $\angle QCF$, 且 BM 与 CN 交于点 D , 求 $\angle BDC$ 的度数;

(3) 如图 2, 点 G 是线段 CB 延长线上一点, 过点 G 作 $GH \perp AE$ 于点 H , $\angle EAF$ 与 $\angle CGH$ 的平分线交于点 O , 请直接写出 $\angle ACG$ 与 $\angle AOG$ 的数量关系.

【答案】 (1) 124; 62

(2) 24° 或 62°

(3) $\angle AOG - \frac{1}{2}\angle ACG = 45^\circ$

【详解】 (1) 解: $\because \angle EAF = 56^\circ$,

$$\therefore \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ - \angle EAF = 124^\circ,$$

$$\therefore \alpha + \beta = 124^\circ,$$

$\because CP, BP$ 分别平分 $\angle FCB, \angle CBE$,

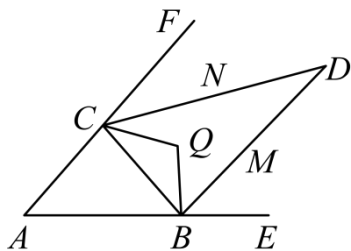
$$\therefore \angle PCB = \frac{1}{2}\angle BCF, \angle CBP = \frac{1}{2}\angle CBE,$$

$$\because \angle BCF + \angle CBE = 360^\circ - (\alpha + \beta) = 236^\circ,$$

$$\therefore \angle PCB + \angle CBP = \frac{1}{2}(\angle BCF + \angle CBE) = 118^\circ,$$

$$\therefore \angle P = 180^\circ - (\angle BCP + \angle CBP) = 62^\circ.$$

(2) ① 点 Q 在 BC 上方时, 如图,



$$\because \angle ACQ + \angle ABQ = 360^\circ - (\angle EAF + \angle CQB) = 360^\circ - (56^\circ + 104^\circ) = 200^\circ,$$

$$\therefore \angle FCQ + \angle QBE = 360^\circ - (\angle ACQ + \angle ABQ) = 160^\circ,$$

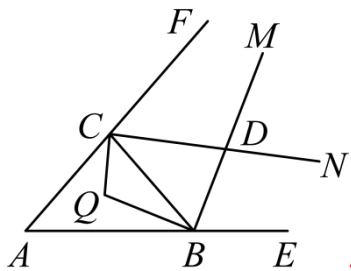
$$\because BM, CN \text{ 分别平分 } \angle QBE, \angle QCF,$$

$$\therefore \angle DCQ + \angle QBD = \frac{1}{2}(\angle FCQ + \angle QBE) = 80^\circ,$$

$$\because \angle QCB + \angle CBQ = 180^\circ - \angle CQB = 76^\circ, \angle DCB + \angle DBC = 80^\circ + 76^\circ = 156^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = 180^\circ - (\angle DCB + \angle DBC) = 180^\circ - 156^\circ = 24^\circ;$$

②点Q在BC下方时，如图，



$$\because \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ - \angle EAF = 124^\circ,$$

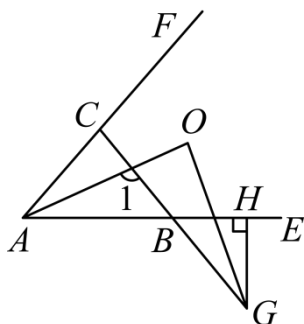
$$\therefore \angle FCB + \angle CBE = 360^\circ - 124^\circ = 236^\circ,$$

$$\therefore \angle DCB + \angle DBC = \frac{1}{2}(\angle FCB + \angle CBE) = 118^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = 180^\circ - 118^\circ = 62^\circ,$$

综上所述， $\angle BDC$ 的度数为 24° 或 62° 。

(3) $\angle AOG - \frac{1}{2}\angle ACG = 45^\circ$ ，理由如下：



$\because AO, OG$ 分别是 $\angle FAE$ 和 $\angle CGH$ 的平分线，

$$\therefore \angle CAO = \frac{1}{2}\angle EAF, \angle CGO = \frac{1}{2}\angle CGH,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle CAO + \angle ACG = \angle CGO + \angle AOG,$$

$$\therefore \frac{1}{2}\angle EAF + \angle ACG = \frac{1}{2}\angle CGH + \angle AOG,$$

$$\text{即 } \angle AOG - \angle ACG = \frac{1}{2}(\angle EAF - \angle CGH),$$

$$\because \angle ABC = \angle GBH,$$

$$\therefore \angle EAF = 180^\circ - \angle ACG - \angle ABC = 180^\circ - \angle ACG - \angle GBH, \quad \angle CGH = 90^\circ - \angle GBH,$$

$$\therefore \angle AOG - \angle ACG = \frac{1}{2}(90^\circ - \angle ACG),$$

$$\therefore \angle AOG - \frac{1}{2}\angle ACG = 45^\circ.$$