江苏省 G4 联考 2025 届高三下学期 2 月联考数学试题❖

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $M=\{y|y=2x,x\in[-1,1]\}$，$N=\{x|y=\log_2(1-x)\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A. $(1,2]$　　B. $[1,2]$　　C. $[-2,1)$　　D. $[-2,1]$

【答案】C

【解析】

【分析】由函数值域求出集合 M，函数定义域求出集合 N，由交集定义求得 $M\cap N$.

【详解】依题意，$M=\{y|y=2x,x\in[-1,1]\}=[-2,2]$，

$\because 1-x>0$，$\therefore x<1$，

$\therefore N=\{x|y=\log_2(1-x)\}=(-\infty,1)$，

所以 $M\cap N=[-2,1)$

故选：C.

2. 已知复数 $z=\dfrac{3-4\text{i}}{2+\text{i}}$ 的共轭复数为 $\overline{z}$，则 $z\cdot\overline{z}=$（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

【答案】C

【解析】

【分析】利用复数的除法运算以及共轭复数的定义，再结合乘法运算即可求得结果.

【详解】$z=\dfrac{3-4\text{i}}{2+\text{i}}=\dfrac{(3-4\text{i})(2-\text{i})}{(2+\text{i})(2-\text{i})}=\dfrac{6-3\text{i}-8\text{i}+4\text{i}^2}{2^2-\text{i}^2}=\dfrac{2-11\text{i}}{5}=\dfrac{2}{5}-\dfrac{11}{5}\text{i}$，

所以 $\overline{z}=\dfrac{2}{5}+\dfrac{11}{5}\text{i}$，

所以 $z\cdot\overline{z}=\left(\dfrac{2}{5}-\dfrac{11}{5}\text{i}\right)\left(\dfrac{2}{5}+\dfrac{11}{5}\text{i}\right)=\left(\dfrac{2}{5}\right)^2-\left(\dfrac{11}{5}\right)^2\text{i}^2=\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+\left(\dfrac{11}{5}\right)^2=5$.

故选：C

3. 若命题“$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-2ax+6a>0$”是假命题，则 a 的取值范围是（　　）

A. $(0,6)$　　B. $(-\infty,0)\cup(6,+\infty)$

C. $[0,6]$　　D. $(-\infty,0]\cup[6,+\infty)$

【答案】D

【解析】

【分析】由题意可知命题的否定为真命题，由判别式得到不等式，解得 a 的取值范围》

【详解】命题“$\forall x\in \mathrm{R}$，$x^2-2ax+6a>0$”是假命题，

则 $\exists x\in \mathrm{R}$，$x^2-2ax+6a\le 0$ 是真命题，

$\therefore \Delta=4a^2-24a\ge 0$，

解得：$a\ge 6$ 或 $a\le 0$，

即 a 的范围是 $\left(-\infty,0\right]\cup\left[6,+\infty\right)$ ·

故选：D.

4. 高三某研究学习小组共 10 人，他们各自统计了自己一周每天的数学回家作业所花费的平均时间 (单位：min) 分别为 38，41，48，48，58，63，68，68，70，82，则这组数据的（　　）

A. 众数是 48　　B. 极差是 38　　C. 中位数是 60.5　　D. 下四分位数是 68

【答案】C

【解析】

【分析】根据众数、极差、中位数、百分位数的概念计算求解即可.

【详解】数据的众数是 48 和 68，故 A 错误;

极差是 $82-38=44$，故 B 错误;

中位数是 $\dfrac{58+63}{2}=60.5$，故 C 正确;

因为 $10\times 25\%=2.5$，所以下四分位数是 48，故 D 错误.

故选：C

5. 过点 $A\left(-5,0\right)$ 作曲线 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 的切线，则切线条数最多为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【答案】B

【解析】

【分析】设切点为 $\left(x_0,y_0\right)$，根据条件，利用导数的几何意义，得到 $2x_0\ln x_0+5\ln x_0-x_0-5=0$，构造函数 $f\left(x\right)=2x\ln x+5\ln x-x-5\left(x>0\right)$，利用导数与函数单调性间的关系，得到 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，利用零点存在性原理，可得 $2x_0\ln x_0+5\ln x_0-x_0-5=0$ 只有一解，即可求解.

【详解】设切点为$\left(x_0,y_0\right)$，则$y_0=\dfrac{\ln x_0}{x_0}$，

又$y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，所以切线斜率为$k=\dfrac{1-\ln x_0}{x_0^2}$，

又切线过点$A\left(-5,0\right)$，所以$\dfrac{\dfrac{\ln x_0}{x_0}-0}{x_0-\left(-5\right)}=\dfrac{1-\ln x_0}{x_0^2}$，整理并化简得$2x_0\ln x_0+5\ln x_0-x_0-5=0$，

令$f\left(x\right)=2x\ln x+5\ln x-x-5\left(x>0\right)$，则$f'\left(x\right)=2\ln x+\dfrac{5}{x}+1$，

令$g\left(x\right)=2\ln x+\dfrac{5}{x}+1$，则$g'\left(x\right)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{x^2}=\dfrac{2x-5}{x^2}$，

易知$x\in\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$时，$g'\left(x\right)<0$，$x\in\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$时，$g'\left(x\right)>0$，

则$g\left(x\right)$在区间$\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$上单调递减，在区间$\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$上单调递增，

所以$g\left(x\right)\geq g\left(\dfrac{5}{2}\right)=2\ln\dfrac{5}{2}+3>0$在区间$\left(0,+\infty\right)$上恒成立，

所以$f\left(x\right)$在区间$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，又$f\left(1\right)=-6<0$，$f\left(\mathrm{e}\right)=2\mathrm{e}+5-\mathrm{e}-5=\mathrm{e}>0$，

所以存在唯一$x_0\in\left(1,\mathrm{e}\right)$，使$f\left(x_0\right)=0$，所以切线只有一条，

故选：B.

6. 在$\triangle ABC$中，$A=\dfrac{\pi}{6}$，$BC=2$，若满足上述条件的$\triangle ABC$恰有一解，则边长AC的取值范围是（　　）

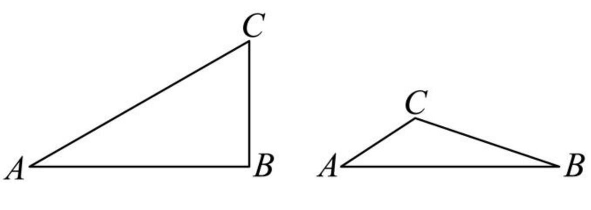
A. $\left(0,2\right)$　　B. $\left(0,2\right]$　　C. $\left(0,2\right)\cup\left\{4\right\}$　　D. $\left(0,2\right]\cup\left\{4\right\}$

【答案】D

【解析】

【分析】由题意$CB\perp AB$，或$AC\leq BC$，进而可得.

【详解】若满足条件的$\triangle ABC$恰有一解，如图



则$CB\perp AB$，或$AC\leq BC$，

当 $CB \perp AB$ 时，$AC=\frac{BC}{\sin A}=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{6}}=4$，

当 $AC \le BC$ 时，$AC \in (0,2]$，

所以 AC 的取值范围是 $(0,2] \cup \{4\}$.

故选：D

7. 已知点 $P(-m,0)$，$Q(m,0)$，若圆 $(x-5)^2+(y-12)^2=4$ 上存在点 R，使得 $\angle PRQ=90°$，则正数 m 的取值范围是（　　）

A. $[11,15]$　　B. $[11,17]$　　C. $[9,15]$　　D. $[9,17]$

【答案】A

【解析】

【分析】把问题转化为根据两圆的位置关系求参数的取值范围求解.

【详解】圆 $(x-5)^2+(y-12)^2=4$ 的圆心为 $(5,12)$，半径为 2，

由题意，R 在以 PQ 为直径的圆上，

$\because P(-m,0)$，$Q(m,0)$，

$\therefore$ 以 PQ 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2=m^2$，

$\because$ 圆 $(x-5)^2+(y-12)^2=4$ 上存在点 R，使得 $\angle PRQ=90^\circ$，

$\therefore$ 两圆有交点，又 m 为正数，

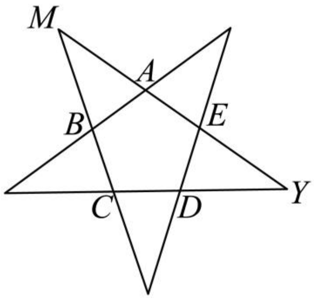
$\therefore |m-2| \le \sqrt{5^2+12^2} \le m+2$，

又 m 为正数，解得 $11 \le m \le 15$，

即正数 m 的取值范围是 $[11,15]$.

故选：A

8. 如图，将边长为 1 的正五边形 $ABCDE$ 的各边延长，得到一个正五角星.若点 P,Q 在正五角星的内部（含边界），则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$ 的最小值为（　　）



A. $-3-\sqrt{5}$　　B. $-2-\sqrt{5}$　　C. $-1-\sqrt{5}$　　D. $-\sqrt{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】按照 PQ 所处的位置分类，结合向量数量积的几何意义及图形特征可得 P,Q 点分别在图中的 M,Y 处时取最小值，利用黄金分割即可求解.

【详解】要使 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$ 最小，它们夹角必定为钝角或平角，若 P，Q 在五角星内，

只要延长 AP,AQ 与边界相交于点 P',Q'，在保持 $\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}$ 夹角不变情形下，$\left|\overrightarrow{AP'}\right|>\left|\overrightarrow{AP}\right|,\left|\overrightarrow{AQ'}\right|>\left|\overrightarrow{AQ}\right|$，则

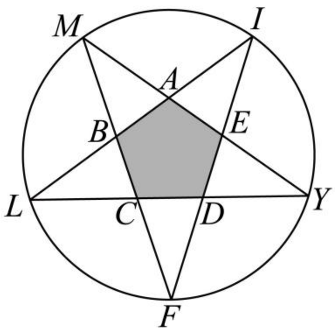
$\overrightarrow{AP'}\cdot\overrightarrow{AQ'}<\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$，

所以 P，Q 必定在五角星边界上先考察点 P 位置，根据对称性，分两种情形：

1．点 P 在 $\triangle EYD$ 边 DY 上：

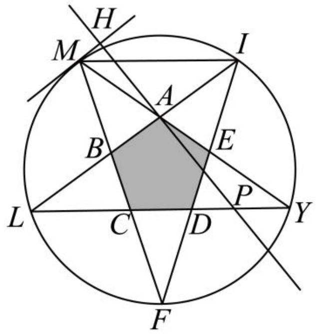
①先考虑极端情形：若点 P 与右顶点 Y 重合，

则 $\overrightarrow{AQ}$ 在 $\overrightarrow{AP}$ 上投影向量的模最长且与 $\overrightarrow{AP}$ 反向的就是 $\overrightarrow{AM}$（即 Q 与 M 重合），所以此时 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$ 最小，



②再考虑一般情形：利用微调法分析，当点 P 在边 DY 上由 Y 向 D 移动时，$|\overrightarrow{AP}|$ 变小，

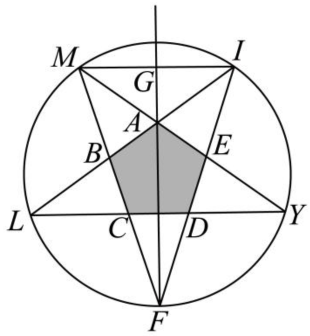
且 $\overrightarrow{AQ}$ 在 $\overrightarrow{AP}$ 上投影向量的模 $|\overrightarrow{AM}|$ 也变小为 $|\overrightarrow{AH}|$，故 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$ 变大，不合题意；



2．点 P 在 $\triangle CDF$ 的边 DF 上：

①先考虑极端情形：若点 P 与顶点 F 重合，则此时 $|\overrightarrow{AF}|>|\overrightarrow{AY}|$，但注意到 $\overrightarrow{AQ}$ 在 $\overrightarrow{AP}$ 上投影向量的模最长且反向的是 $\overrightarrow{AG}$，

且根据相交弦定理知：$|\overrightarrow{AY}|\cdot|\overrightarrow{AM}|>|\overrightarrow{AF}|\cdot|\overrightarrow{AG}|$，所以此时 $\overrightarrow{AY}\cdot\overrightarrow{AM}<\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AG}$

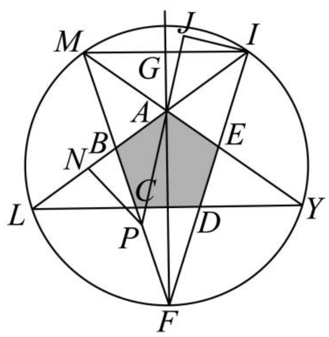


②再考虑一般情形：利用微调法分析，当点 P 在边 CF 上由 F 向 C 移动时，$|\overrightarrow{AP}|$ 变小，而 $\overrightarrow{AQ}$ 在 $\overrightarrow{AP}$ 上投影向量 $\overrightarrow{AJ}$ 的模会变大，

过 P 作 AB 的垂线 PN，垂足为 N，则 P，N，J，I 四点共圆，

由相交弦定理知 $|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AJ}|=|\overrightarrow{AI}|\cdot|\overrightarrow{AN}|<|\overrightarrow{AI}|\cdot|\overrightarrow{AL}|=|\overrightarrow{AY}|\cdot|\overrightarrow{AM}|$，

所以此时 $\overrightarrow{AY}\cdot\overrightarrow{AM}<\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AJ}$，



综上，当 P，Q 分别与顶点 Y，M 重合时，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$ 取最小值

由于黄金分割比 $\frac{AE}{AP}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，而 $AE=1$，则 $AP=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，

同理 $EQ=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，则 $AQ=\frac{\sqrt{5}+1}{2}+1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$，

所以 $\left(\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}\right)_{\min}=\overrightarrow{AY}\cdot\overrightarrow{AM}=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\times\frac{3+\sqrt{5}}{2}=-\frac{4\sqrt{5}+5+3}{4}=-\frac{4\sqrt{5}+8}{4}$

$=-2-\sqrt{5}$，

故选：B

二、多选题：本题共 3 小题，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知 $a>0$，$b>0$，满足 $a+2b=4$，则下列说法正确的是（　　）

A. $ab\le 2$　　B. $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\le 1$　　C. $a^2+b^2\ge\frac{16}{5}$　　D. $3^a+9^b\ge 18$

【答案】ACD

【解析】

【分析】选项 A，据基本不等式可得；选项 B，$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\frac{1}{4}(a+2b)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)$进而根据基本不等式可得；选项 C，将 $a=4-2b$ 代入 a^2+b^2，得 $a^2+b^2=5\left(b-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{16}{5}$，进而可得；选项 D，利用基本不等式 $3^a+9^b\ge 2\sqrt{3^a3^{2b}}$，进而根据指数的运算可得

【详解】$ab=\frac{1}{2}\cdot a\cdot 2b\le\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a+2b}{2}\right)^2=2$，当且仅当 $a=2b=2$ 时取等号，故 A 确；

$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\frac{1}{4}(a+2b)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)=\frac{1}{4}\left(5+\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}\right)\ge\frac{1}{4}\left(5+2\sqrt{\frac{2b}{a}\times\frac{2a}{b}}\right)=\frac{9}{4}$，

当且仅当 $a=b=\frac{4}{3}$ 时取等号，故 B 错误；

$a^2+b^2=(4-2b)^2+b^2=5b^2-16b+16=5\left(b-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{16}{5}\ge\frac{16}{5}$，

当 $b=\frac{8}{5}$，$a=\frac{4}{5}$ 时取等号，故 C 正确；

$3^a+9^b=3^a+3^{2b}\ge 2\sqrt{3^a3^{2b}}=2\sqrt{3^{a+2b}}=18$，

当且仅当 $a=2b=2$ 时取等号，故 D 正确，

故选：ACD

10. 已知函数 $f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(\omega>0,\left|\varphi\right|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的周期为 $\dfrac{\pi}{2}$，且向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位后所得到的函数为奇函数，则下列说法正确的是（　　）

A. 函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{24},\dfrac{\pi}{6}\right]$ 上单调递减

B. 函数 $f\left(x\right)$ 的图象关于点 $\left(-\dfrac{\pi}{48},0\right)$ 中心对称

C. 函数 $f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=-\dfrac{5\pi}{24}$ 对称

D. 函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=\dfrac{5\pi}{12}$ 处取最值

【答案】AC

【解析】

【分析】先根据题意得到 $f\left(x\right)=\sin\left(4x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，在根据正弦函数的性质整体代入判断即可.

【详解】因函数 $f\left(x\right)$ 的周期为 $\dfrac{\pi}{2}$，故 $\omega=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$，故 $f\left(x\right)=\sin\left(4x+\varphi\right)$，

将函数的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位后，得到 $y=\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{3}+\varphi\right)$，

由题意 $-\dfrac{\pi}{3}+\varphi=k\pi,k\in Z$，得 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}+k\pi,k\in Z$，又 $\left|\varphi\right|<\dfrac{\pi}{2}$，故 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，

故 $f\left(x\right)=\sin\left(4x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，

当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{24},\dfrac{\pi}{6}\right]$ 时，$4x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$，由正弦函数的性质可知函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{24},\dfrac{\pi}{6}\right]$ 上单调递减，故 A 正确；

$f\left(-\dfrac{\pi}{48}\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故函数 $f\left(x\right)$ 的图象不关于点 $\left(-\dfrac{\pi}{48},0\right)$ 中心对称，故 B 不正确；

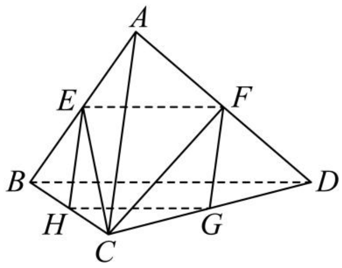
$f\left(-\dfrac{5\pi}{24}\right)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$，故函数 $f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=-\dfrac{5\pi}{24}$ 对称，故 C 正确；

$f\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)=\sin 2\pi=0$，故 D 不正确.

故选：AC

11. 如图所示，已知正三棱锥 $A-BCD$ 底面边长为 m，侧棱长为 n，E，F，G，H 分别为 AB，AD，CD，BC 的

中点，连接 EF，FG，GH，HE，CE，CF，则下列说法正确的是（　　）



A. 四边形 $EFGH$ 为矩形

B. 向量 $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{HF}$ 不共面

C. 点 P 在 $\triangle ABC$ 内，点 P 到点 A 距离与到底面 BCD 距离相等，则点 P 的轨迹是椭圆的一部分

D. 若侧棱长 $n=m$，则直线 AC 与平面 CEF 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{22}}{11}$

【答案】ACD

【解析】

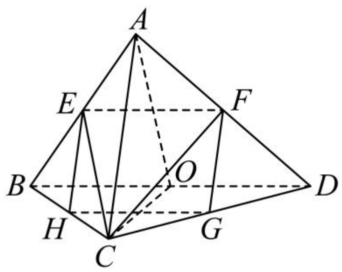
【分析】对于A，根据中位线性质得到四边形 $EFGH$ 为平行四边形，取 BD 中点 O，连接 OC,OA，再证明 $BD\perp$ 平面 OAC，再得到线线垂直即可；对于B，运用线共面的判定定理即可得；对于C，先证线面垂直，进而得到线线垂直，得到 $\angle PNM$ 为二面角 $A-BC-D$ 的平面角 θ，θ 是定值，得到 $\dfrac{PA}{PN}$ 定值，根据椭圆第二定义，可解；对于D，建立空间直角坐标系如图所示：运用向量法计算即可.

【详解】解：对于A，$\because E,F,G,H$ 分别为 AB,AD,CD,BC 的中点，

根据中位线定理得 $EF//BD,EF=\dfrac{1}{2}BD,HG//BD,HG=\dfrac{1}{2}BD$，

$\therefore EF//HG,EF=HG$，所以四边形 $EFGH$ 为平行四边形，

取 BD 中点 O，连接 OC,OA，



$\because$ 正三棱锥 $A-BCD$，$AB=AD$，得 $BD\perp OA$，

$BC=DC$ 得 $BD\perp OC$，$OA\cap OC=O,OA,OC\subset$ 平面 OAC，

$BD\perp$ 平面 OAC，$AC\subset$ 平面 OAC，

$\therefore BD\perp AC$，又$\because EH//AC,HG//BD$，$\therefore EH\perp HG$，四边形 $EFGH$ 为矩形，A 正确；

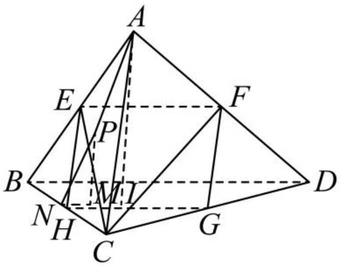
对于 B，四边形 $EFGH$ 为矩形，$\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{HG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$，

向量 $\overrightarrow{HF}$ 可以由向量 $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD}$ 线性表示，向量 $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{HF}$ 共面，B 错误；

对于 C，点 P 在 $\triangle ABC$ 内，过点 P 作 $PM\perp$ 底面 BCD，$BC\subset$ 底面 BCD，则 $PM\perp BC$，

过点 P 作 $PN\perp BC$，连接 MN，

$\because PM\cap PN=P,PM,PN\subset$ 平面 PMN，所以 $BC\perp$ 平面 PMN，$MN\subset$ 平面 PMN，得 $BC\perp MN$，



所以 $\angle PNM$ 为二面角 $A-BC-D$ 的平面角 θ，

当 m,n 确定时，二面角 $A-BC-D$ 的平面角 θ 是定值，$\frac{PM}{PN}=\sin\theta$，

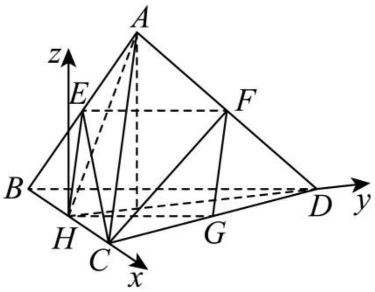
$\because$ 点 P 到点 A 距离与到底面 BCD 距离 PM 相等，

$\therefore \frac{PA}{PN}=\sin\theta$ 定值，且 $0<\sin\theta<1$，

根据椭圆第二定义，到定点 A 和到定直线 BC 的距离比为定值 $\sin\theta\in(0,1)$ 的点的轨迹为椭圆.C 正确；

对于 D，若侧棱长 $n=m$，正三棱锥 $A-BCD$ 为正四面体，设 $m=2$，

以 BC 中点 H 为坐标原点，HC,HD,HZ 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系如图所示：



$C(1,0,0)$，$A\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，$B(-1,0,0)$，$D(0,\sqrt{3},0)$，$E\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，$F\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

$\overrightarrow{AC}=\left(1,-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，

设平面 CEF 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{CE}=\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right),\overrightarrow{CF}=\left(-1,\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$，

$\begin{cases}-\frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{6}y+\frac{\sqrt{6}}{3}z=0\\ -x+\frac{2\sqrt{3}}{3}y+\frac{\sqrt{6}}{3}z=0\end{cases}$，解得其中一个解为$\begin{cases}x=\sqrt{6}\\ y=-\sqrt{2}\\ z=5\end{cases}$，

法向量$\vec{n}=\left(\sqrt{6},-\sqrt{2},5\right)$，$\sin\alpha=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AC},\vec{n}\right\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|\sqrt{6}+\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{10\sqrt{6}}{3}\right|}{2\cdot\sqrt{33}}=\frac{\sqrt{22}}{11}$，D 正确.

故选：ACD.

【点睛】关键点点睛：B 选项借助线共面得向量定理计算判定；C 选项关键找出$\angle PNM$为二面角$A-BC-D$的平面角，得到$\frac{PA}{PN}=\sin\theta$为定值，再结合椭圆定义得解；D 选项借助向量法.综合性较强，属于难题.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知随机变量ξ服从正态分布$N\left(12,\sigma^2\right)$，且$P(10<\xi<12)=0.4$，则 $P\left(\xi>14\right)=$________.

【答案】0.1##$\frac{1}{10}$

【解析】

【分析】根据已知概率应用对称轴结合正态分布的性质计算即可.

【详解】随机变量ξ服从正态分布$N\left(12,\sigma^2\right)$，

这组数据对应的正态曲线的对称轴$\xi=12$，

则$P(10<\xi<12)=P(12<\xi<14)=0.4$，所以$P(\xi>14)=0.5-0.4=0.1$.

故答案为：0.1.

13. 已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=3$，$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, & a_n\le 7\\ a_n-7, & a_n>7\end{cases}$，数列$\left\{a_n\right\}$的前 2025 项的和为_______.

【答案】14580

【解析】

【分析】根据数据列的递推公式，求出数列的前 9 项，确定数列数列的周期性，利用周期性求值即可.

【详解】由$a_1=3$，$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, & a_n\le 7\\ a_n-7, & a_n>7\end{cases}$，可得：

$a_2=6$，$a_3=12$，$a_4=5$，$a_5=10$，$a_6=3$，$a_7=6$，$a_8=12$，$a_9=5$，$\cdots$，

所以该数列的周期为 5，则数列$\left\{a_n\right\}$的前 2025 项的和为：

$405\times\left(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5\right)=405\times36=14580$.

故答案为：14580

14. 已知直线 l 的倾斜角为锐角，且过抛物线 $y=x^2$ 的焦点，与抛物线交于 A、B 两点.若在该抛物线的准线上存在一点 C，使得 $\triangle ABC$ 为正三角形，则直线 l 的斜率为______.

【答案】$\sqrt{2}$

【解析】

【分析】设直线 AB 的方程为 $y=kx+\frac{1}{4}(k>0)$，与抛物线的方程 $y=x^2$ 联立利用韦达定理得到弦长 $|AB|$，AB 的中点为 $H\left(\frac{k}{2},\frac{1}{4}+\frac{k^2}{2}\right)$，由 $\triangle ABC$ 为正三角形，可得 $CH\perp AB$，且 $|CH|=\frac{\sqrt{3}}{2}|AB|$，建立方程求解即可.

【详解】抛物线 $y=x^2$ 的焦点为 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$，准线方程为 $y=-\frac{1}{4}$，

设直线 AB 的方程为 $y=kx+\frac{1}{4}(k>0)$，代入抛物线的方程 $y=x^2$，

可得 $x^2-kx-\frac{1}{4}=0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，可得 $x_1+x_2=k$，$x_1x_2=-\frac{1}{4}$，AB 的中点为 $H\left(\frac{k}{2},\frac{1}{4}+\frac{k^2}{2}\right)$，

在该抛物线的准线上存在一点 C，使得 $\triangle ABC$ 为正三角形，

可得 $CH\perp AB$，且 $|CH|=\frac{\sqrt{3}}{2}|AB|$，

由 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{k^2+1}=k^2+1$，

可得 $|CH|=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(k^2+1\right)$，

设 $C\left(x_0,-\frac{1}{4}\right)$，

又 CH 的斜率为 $-\frac{1}{k}$，可得 $\dfrac{\frac{k^2}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{\frac{k}{2}-x_0}=-\frac{1}{k}$，

解得 C 的横坐标为 $x_0=\frac{k^3}{2}+k$，C 的纵坐标为 $-\frac{1}{4}$，

所以 $|CH|=\sqrt{\left(\frac{k^3}{2}+k-\frac{k}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{k^2}{2}\right)^2}=\left(\frac{k^2}{2}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{k^2+1}$，

由$|CH|=\frac{\sqrt{3}}{2}|AB|$，可得$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(k^{2}+1\right)=\left(\frac{k^{2}}{2}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{k^{2}+1}$，解得$k=\sqrt{2}$(负的舍去).

故答案为：$\sqrt{2}$.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15. $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为a,b,c，且$2a\sin B-\sqrt{3}c\cos B=\sqrt{3}b\cos C$.

（1）求角 B；

（2）若$b=2a$，求$\sin\left(2A-\frac{\pi}{4}\right)$

【答案】（1）$B=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$

（2）$\frac{\sqrt{78}-5\sqrt{2}}{16}$

【解析】

【分析】（1）先根据正弦定理把条件转化为$2\sin A\sin B-\sqrt{3}\sin C\cos B=\sqrt{3}\sin B\cos C$，再结合和角公式与三角形的内角和公式，可得$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，从而求角$B$.

（2）根据正弦定理，可得$\sin B=2\sin A$，根据（1）的结论，可得$\sin A$，再判断角 A 的范围，求$\cos A$，再利用倍角公式与和角公式求值.

【小问 1 详解】

在$\triangle ABC$中，由正弦定理及$2a\sin B-\sqrt{3}c\cos B=\sqrt{3}b\cos C$，

得$2\sin A\sin B-\sqrt{3}\sin C\cos B=\sqrt{3}\sin B\cos C$，

则$2\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin C\cos B+\sqrt{3}\sin B\cos C=\sqrt{3}\sin\left(B+C\right)=\sqrt{3}\sin A$，

又因为$\sin A>0$，所以$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又因为$B\in\left(0,\pi\right)$，所以$B=\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$.

【小问 2 详解】

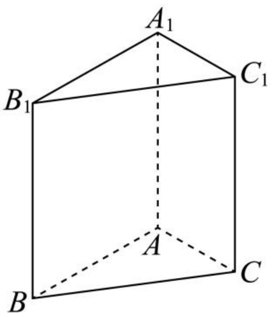
由$b=2a$及正弦定理，得$\sin B=2\sin A$，则$\sin A=\frac{\sin B}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

由于 $b>a$，则 $B>A$，则 A 为锐角，所以 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\dfrac{\sqrt{13}}{4}$，

于是 $\sin 2A=2\sin A\cos A=\dfrac{\sqrt{39}}{8}$， $\cos 2A=2\cos^2 A-1=\dfrac{5}{8}$，

所以 $\sin\left(2A-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2A-\cos 2A)=\dfrac{\sqrt{78}-5\sqrt{2}}{16}$.

16. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $ABB_1A_1\perp$ 平面 ABC，平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 ABC.



（1）证明：$AA_1\perp$ 平面 ABC；

（2）已知 $AA_1=3$，$AB=2$，$AC=1$，$BC=\sqrt{5}$，求直线 A_1B 与 AC_1 所成角的正弦值.

【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{7\sqrt{130}}{130}$

【解析】

【分析】（1）应用面面垂直的性质定理得出线线垂直进而应用线面垂直判定定理证明即可；

（2）应用空间向量法计算异面直线所成角的余弦值，最后根据同角三角函数关系计算正弦即可.

【小问 1 详解】

在$\triangle ABC$ 中，取点 P 并作 $PG\perp AB$，$PH\perp AC$，G，H 为垂足，

因为 $PG\perp AB$，平面 $ABB_1A_1\perp$ 平面 ABC，且平面 $ABB_1A_1\cap$ 平面 $ABC=AB$， $PG\subset$ 平面 ABC，

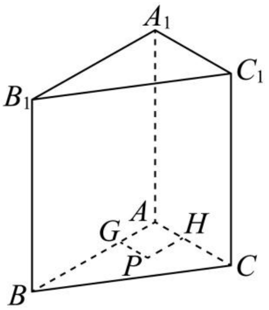
所以 $PG\perp$ 平面 ABB_1A_1，因为 $AA_1\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $PG\perp AA_1$，

又因为 $PH\perp AC$，平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 ABC，平面 $AA_1C_1C\cap$ 平面 $ABC=AC$，

$PH\subset$ 平面 ABC，所以 $PH\perp$ 平面 AA_1C_1C.

又因为 $AA_1\subset$ 平面 AA_1C_1C，所以 $PH\perp AA_1$，

因为 $PG\cap PH=P$，且 PG， $PH\subset$ 平面 ABC，所以 $AA_1\perp$ 平面 ABC；



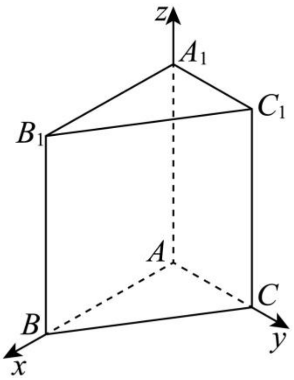
【小问 2 详解】

因为 $AB^2+AC^2=BC^2$，所以 $AB\perp AC$，

由（1）知，$AA_1\perp$ 平面 ABC，又因为 $AB\subset$ 平面 ABC， $AC\subset$ 平面 ABC，

所以 $AB\perp AA_1$，$AC\perp AA_1$，

以 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AA_1}$ 为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立空间直角坐标系，如图所示.



依题意 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$A_1(0,0,3)$，$C_1(0,1,3)$，

则 $\overrightarrow{A_1B}=(2,0,-3)$，$\overrightarrow{AC_1}=(0,1,3)$，

设直线 A_1B 与 AC_1 所成角为 θ，

则 $\cos\theta=\dfrac{\left|\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{AC_1}\right|}{\left|\overrightarrow{A_1B}\right|\left|\overrightarrow{AC_1}\right|}=\dfrac{9}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{10}}=\dfrac{9}{\sqrt{130}}$，

所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\left(\dfrac{9}{\sqrt{130}}\right)^2}=\dfrac{7\sqrt{130}}{130}$，

所以直线 A_1B 与 AC_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{7\sqrt{130}}{130}$.

17. 有一项高辐射的危险任务需要工作人员去完成，每次只进入一人，且每人只进入一次，在规定安全时间内未完成任务则撤出，换下一个人进入，但最多派三人执行任务．现在一共有 A、B、C 三个人可参加这项任务，他们各自能完成任务的概率分别为 p_1,p_2,p_3，且 p_1,p_2,p_3 互不相等，他们三个人能否完成任务的事件相互独立.

（1）$p_1=0.1,p_2=0.2,p_3=0.3$，如果按照 A、B、C 的顺序先后进入；

①求任务能被完成的概率；

②求所需派出人员数目 X 的分布列和数学期望；

（2）假定$1>p_1>p_2>p_3$，试分析以怎样的先后顺序派出 A、B、C 三个人，可使所需派出的人员数目 X 的数学期望达到最小.

【答案】（1）①$0.496$；②分布列见解析，$E\left(X\right)=2.62$；

（2）先派 A，再派 B，最后派 C 时，派出人员数目 X 的数学期望达到最小.

【解析】

【分析】（1）①利用互斥事件、相互独立事件的概率公式列式计算；②求出 X 的可能值及对应的概率，列出分布列并求出期望.

（2）求出按照某种顺序完成任务的期望，再作差比较大小即可得解.

【小问 1 详解】

①设按照 A、B、C 的顺序先后进入，任务被完成为事件 M，

则 $P(M)=p_1+(1-p_1)p_2+(1-p_1)(1-p_2)p_3=0.496$，

② X 可取 1，2，3，

$P(X=1)=p_1=0.1$，$P(X=2)=(1-p_1)p_2=0.18$，$P(X=3)=(1-p_1)(1-p_2)=0.72$，

所以其分布列为

X	1	2	3
P	0.1	0.18	0.72

数学期望 $E\left(X\right)=1\times0.1+2\times0.18+3\times0.72=2.62$.

【小问 2 详解】

若按照某一指定顺序派人，A、B、C 三人各自能完成任务的概率依次为 q_1，q_2，q_3，

其中 q_1，q_2，q_3 是 p_1，p_2，p_3 的一个排列，

结合（1）②知 $E\left(X\right)=1\times q_1+2\times\left(1-q_1\right)q_2+3\left(1-q_1\right)\left(1-q_2\right)=q_1q_2-2q_1-q_2+3=\left(1-q_1\right)\left(2-q_2\right)+1$，

由$1>p_1>p_2>p_3$，得要使 X 最小，前两人应从 A 和 B 中选，C 最后派出，

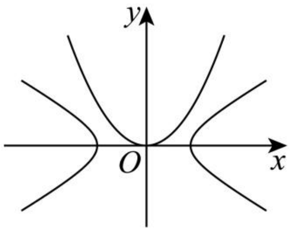
若先派 A，再派 B，最后派 C，则 $E\left(X_1\right)=p_1p_2-2p_1-p_2+3$；

若先派 B，再派 A，最后派 C，则 $E\left(X_2\right)=p_1p_2-2p_2-p_1+3$，

而 $E(X_1)-E(X_2)=p_2-p_1<0$，

所以先派 A，再派 B，最后派 C 时，派出人员数目 X 的数学期望达到最小.

18. 在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$，离心率为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，点 P 是 C_1 上任意一点．抛物线 $C_2:x^2=2y$，



（1）求 C_1 的方程；

（2）过点 P 作 C_1 的两条渐近线的平行线，分别与两条渐近线交于 A，B 两点，求证：平行四边形 $PAOB$ 的面积为定值；

（3）PC，PD 是 C_2 的两条切线，C，D 是切点，求 $\triangle PCD$ 面积的最小值.

【答案】（1）$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$.

（2）证明见解析　　（3）$\dfrac{16\sqrt{6}}{9}$

【解析】

【分析】（1）由离心率即可求解；

（2）$P(x_0, y_0)$，求得 A,B 坐标，进而得到 $|OA|,|OB|$ 再结合面积公式求解即可；

（3）设 $P(x_0, y_0)$，$C(x_1, y_1)$，$D(x_2, y_2)$，通过导数求得切线方程，结合韦达定理求得弦长，点到线的距离公式求得高，代入面积公式，进而可求解；

【小问 1 详解】

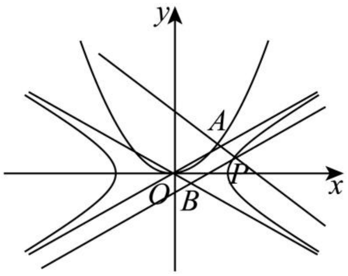
解：设双曲线的焦半距为 c，则 $c^2=a^2+1$，

又因为离心率为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，所以 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

代入得 $(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a)^2=a^2+1$，解得 $a=\sqrt{3}$，

所以双曲线 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$.

【小问 2 详解】



证明：设 $P\left(x_0, y_0\right)$，不妨设 OA 为渐近线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$，OB 为渐近线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$，

直线 AP 的方程为 $y-y_0=-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-x_0\right)$，

联立方程 $\begin{cases} y=\frac{\sqrt{3}}{3}x \\ y-y_0=-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-x_0\right) \end{cases}$，解得 $A\left(\frac{1}{2}x_0+\frac{\sqrt{3}}{2}y_0, \frac{\sqrt{3}}{6}x_0+\frac{1}{2}y_0\right)$，

所以 $|OA|=\frac{\left|x_0+\sqrt{3}y_0\right|}{\sqrt{3}}$

同理可得 $B\left(\frac{1}{2}x_0-\frac{\sqrt{3}}{2}y_0, -\frac{\sqrt{3}}{6}x_0+\frac{1}{2}y_0\right)$，所以 $|OB|=\frac{\left|x_0-\sqrt{3}y_0\right|}{\sqrt{3}}$

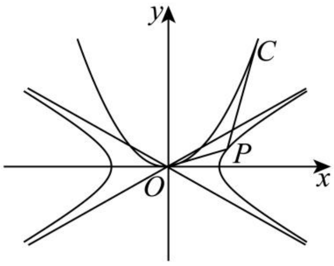
由于直线 OA 的斜率 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$，因此 $\angle AOx=30^{\circ}$，所以 $\angle AOB=2\angle AOx=60^{\circ}$，

所以平行四边形 $PAOB$ 的面积为 $S=OA\cdot OB\cdot sin\angle AOB=\frac{\sqrt{3}\left|x_0^2-3y_0^2\right|}{6}$，

因为点 P 在双曲线 C 上，所以 $\frac{x_0^2}{3}-y_0^2=1$，即 $x_0^2-3y_0^2=3$，

所以平行四边形 $PAOB$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【小问 3 详解】



解：设 $P\left(x_0, y_0\right)$，$C\left(x_1, y_1\right)$，$D\left(x_2, y_2\right)$，

因为函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的导数为 $y'=x$，所以直线 PC 的方程为 $y-y_1=x_1\left(x-x_1\right)$，

由于 $P\left(x_0, y_0\right)$ 在直线 PC 上，则 $y_0-y_1=x_1\left(x_0-x_1\right)=x_0x_1-2y_1$，$y_0+y_1=x_0x_1$，

同理 $y_0+y_2=x_0x_2$，

所以 $C\left(x_1, y_1\right)$，$D\left(x_2, y_2\right)$ 均满足方程 $y_0+y=x_0x$，

所以直线 CD 的方程为 $x_0x=y+y_0$，

联立方程 $\begin{cases} x_0x=y+y_0 \\ x^2=2y \end{cases}$，得 $x^2-2x_0x+2y_0=0$，

所以 $x_1+x_2=2x_0$，$x_1x_2=2y_0$，

则 $CD=\sqrt{1+x_0^2}\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{1+x_0^2}\cdot\sqrt{4x_0^2-8y_0}$，

又因为 P 到直线 CD 的距离 $d=\dfrac{\left|x_0^2-2y_0\right|}{\sqrt{1+x_0^2}}$，

所以 $\triangle PCD$ 面积 $T=\frac{1}{2}CD\cdot d=\frac{1}{2}\left|x_0^2-2y_0\right|\cdot\sqrt{4x_0^2-8y_0}=(x_0^2-2y_0)^{\frac{3}{2}}$，

又因为 $x_0^2-2y_0=3y_0^2-2y_0+3=3(y_0-\frac{1}{3})^2+\frac{8}{3}\geq\frac{8}{3}$，

所以 $T\geq(\frac{8}{3})^{\frac{3}{2}}=\frac{16\sqrt{6}}{9}$，当 P 为 $\left(\pm\frac{\sqrt{30}}{3},\frac{1}{3}\right)$ 时 T 取最小值 $\frac{16\sqrt{6}}{9}$，

所以 $\triangle PCD$ 面积最小值为 $\frac{16\sqrt{6}}{9}$.

【点睛】方法点睛：定值问题常见方法：

（1）从特殊入手，求出定值，再证明这个值与变量无关；

（2）直接推理计算，并在计算推理的过程中消去变量，从而得到定值.

19. 函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x-a\ln ax(a>0)$.

（1） $a=1$ 时，证明：$f(x)>2$；

（2）讨论函数 $f(x)$ 的零点个数；

（3）当 $a=k\left(k\in \mathrm{N}^*\right)$ 时，记 $f(x)$ 所有零点之和为 b_k（若 $f(x)$ 无零点则 $b_k=0$），证明：

$b_1+b_2+\cdots+b_n<\dfrac{(n+1)^2}{3}\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$.（参考数据：$\mathrm{e}\approx 2.718$）

【答案】（1）证明见解析

（2）答案见解析　　（3）证明见解析

【解析】

【分析】（1）写出函数 $f(x)$ 解析式，令 $g(x)=\mathrm{e}^x-x-1$，求出其导数 $g'(x)$，得到函数 $g(x)$ 的单调区间，从而知道 $g(x)$ 最小值，然后得到 $\mathrm{e}^x-x\geq 1$，得到 $x-\ln x\geq 1$，从而证明 $f(x)>2$；

（2）由 $f(x)=0$ 得到 $x\mathrm{e}^x=\ln ax\cdot \mathrm{e}^{\ln ax}$，因为 $y=x\mathrm{e}^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $x=\ln ax$，令 $h(x)=\mathrm{e}^x-ax$，$f(x)$ 的零点即为 $h(x)$ 的零点.对 $h(x)$ 求导，从而知道 $h(x)$ 的单调区间，然后得到 $h(x)$ 的最小值，讨论 x 与 $\ln a$ 的关系，得到最小值与 0 的关系，然后知道函数零点个数;

（3）由（2）的结论知 $f(x)$ 的零点即为 $h(x)$ 的零点，分类讨论 $a<\mathrm{e}$，得到 $n=1,n=2$ 时，不等式成立. $a>\mathrm{e}$ 时，设 x_1， x_2 为 $h(x)$ 恰有两个零点，设 $0<x_1<\ln a<x_2$，令 $H(x)=h(x)-h(2\ln a-x)$，求导数 $H'(x)$，得到函数 $H(x)$ 的单调性，从而得到 $H(x_1)<H(\ln a)=0$，则 $h(x_2)=h(x_1)<h(2\ln a-x_1)$，由函数单调性得到 $2\ln a-x_1>\ln a>x_2$，从而得到 $2\ln a>x_2+x_1$，即得到 $b_k<2\ln k\left(k\geq 3,\ k\in \mathrm{N}^*\right)$，分别取 $k=3,4,5$，代入后不等式成立.再设函数 $\varphi(x)=\ln x-\dfrac{x}{3}(x>3)$，求其导数 $\varphi'(x)$ 后得到函数 $\varphi(x)$ 在区间 $(3,+\infty)$ 上的单调性，从而得到 $b_k<2\ln k<\dfrac{2}{3}k$，然后当 $n\geq 6$ 时，列出不等式 $b_1+b_2+\cdots+b_n<12+\dfrac{2}{3}\cdot(6+7+8+\cdots n)$，然后数列求和即可得证.

【小问 1 详解】

$a=1$ 时 $f(x)=\mathrm{e}^x-\ln x$，

令 $g(x)=\mathrm{e}^x-x-1$， $g'(x)=\mathrm{e}^x-1$，

当 $x<0$ 时， $g'(x)<0$， $g(x)$ 单调递减;当 $x>0$ 时， $g'(x)>0$， $g(x)$ 单调递增，

所以 $g(x)\geq g(0)=0$，所以 $\mathrm{e}^x-x\geq 1$ 恒成立（当且仅当 $x=0$ 时等号成立）

令 $x=\ln t$，得 $t-\ln t\ge 1$，即 $x-\ln x\ge 1$ 恒成立（当且仅当 $x=1$ 时等号成立），

所以 $\left(\mathrm{e}^x-x\right)+\left(x-\ln x\right)\ge 2$，由于等号不能同时取到，

所以 $e^x-\ln x>2$，即 $f\left(x\right)>2$.

【小问 2 详解】

$f\left(x\right)=0$ 等价于 $\mathrm{e}^x=a\ln ax$，即 $x\mathrm{e}^x=\ln ax\cdot \mathrm{e}^{\ln ax}$，

因为 $\mathrm{e}^x>0$，$a>0$，所以 $\ln ax>0$，由 $f\left(x\right)$ 定义域知 $x>0$，

又因为 $y=x\mathrm{e}^x$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，所以 $x=\ln ax$，$\mathrm{e}^x=ax$，

令 $h\left(x\right)=\mathrm{e}^x-ax$，$f\left(x\right)$ 的零点即为 $h\left(x\right)$ 的零点.

因为 $h'\left(x\right)=\mathrm{e}^x-a$，

当 $x<\ln a$ 时，$h'\left(x\right)<0$，$h\left(x\right)$ 单调递减;当 $x>\ln a$ 时，$h'\left(x\right)>0$，$h\left(x\right)$ 单调递增.

所以 $h\left(x\right)_{\min}=h\left(\ln a\right)=a\left(1-\ln a\right)$，

当 $0<a<\mathrm{e}$ 时，因为 $h\left(x\right)\ge h\left(\ln a\right)>0$，所以 $h\left(x\right)$ 无零点，即 $f\left(x\right)$ 无零点;

当 $a=\mathrm{e}$ 时，因为 $h\left(x\right)\ge h\left(\ln a\right)=0$，（当且仅当 $x=\ln a$ 时等号成立），

所以 $h\left(x\right)$ 恰有一个零点，即 $f\left(x\right)$ 恰有一个零点;

当 $a>\mathrm{e}$ 时，$h\left(0\right)=1>0$，$h\left(\ln a\right)<0$，$h\left(a\right)=\mathrm{e}^a-a^2>0$，且 $0<\ln a<a$，

由于函数图像连续不间断，函数零点存在性定理，

存在 $x_1\in\left(0,\ln a\right)$，$x_2\in\left(\ln a, a\right)$，使得 $h\left(x_1\right)=h\left(x_2\right)=0$，

结合单调性，$h\left(x\right)$ 恰有两个零点，即 $f\left(x\right)$ 恰有两个零点.

综上所述，当 $0<a<\mathrm{e}$ 时，$f\left(x\right)$ 无零点;

当 $a=\mathrm{e}$ 时，$f\left(x\right)$ 恰有一个零点;

当 $a>\mathrm{e}$ 时，$f\left(x\right)$ 恰有两个零点.

【小问 3 详解】

由 $\left(2\right)$ 知，$f\left(x\right)$ 的零点即为 $h\left(x\right)$ 的零点，$b_1=b_2=0$，$n=1$，2 时命题成立;

当 $a>\mathrm{e}$ 时，$h\left(x\right)$ 恰有两个零点，设为 x_1，x_2，不妨设 $0<x_1<\ln a<x_2$，

令 $H(x)=h(x)-h(2\ln a-x)$，则 $H(\ln a)=0$，

因为 $H'(x)=\mathrm{e}^{x}+\dfrac{a^{2}}{\mathrm{e}^{x}}-2a\geq 0$，所以 $H(x)$ 在 R 上单调递增，

因为 $x_1<\ln a$，所以 $H(x_1)<H(\ln a)=0$，则 $h(x_2)=h(x_1)<h(2\ln a-x_1)$，

又因为 $x_2>\ln a$，$2\ln a-x_1>\ln a$，$h(x)$ 在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $x_2<2\ln a-x_1$，$x_1+x_2<2\ln a$，

所以 $b_k<2\ln k\left(k\geq 3,\ k\in\mathrm{N}^{*}\right)$，

所以 $b_1+b_2+b_3<2\ln 3<4<\dfrac{16}{3}$，$b_1+b_2+b_3+b_4<2\ln 3+2\ln 4<8<\dfrac{25}{3}$，

$b_1+b_2+b_3+b_4+b_5<2\ln 3+2\ln 4+2\ln 5<12=\dfrac{36}{3}$，$k=3$，4，5 时命题成立;

令 $\varphi(x)=\ln x-\dfrac{x}{3}(x>3)$，$\varphi'(x)=\dfrac{3-x}{3x}<0$，$\varphi(x)$ 在 $(3,+\infty)$ 上单调递减，

又因为 $\varphi(6)=\ln 6-2<0$，所以当 $k\geq 6$ 时，$\varphi(k)<0$，

所以 $\ln k<\dfrac{k}{3}$，$b_k<2\ln k<\dfrac{2}{3}k$，

当 $n\geq 6$ 时，$b_1+b_2+\cdots+b_n<12+\dfrac{2}{3}\cdot(6+7+8+\cdots n)=\dfrac{n^2+n+6}{3}<\dfrac{(n+1)^2}{3}$，

综上所述，$b_1+b_2+\cdots+b_n<\dfrac{(n+1)^2}{3}$.

【点睛】方法点睛，函数零点个数问题转化为求方程解的个数问题.再利用方程的特殊性建立新的函数，利用函数与方程的关系进行等价转换.再由函数的单调性和函数最值得到函数零点个数，从而知道函数零点个数.