

江苏省 G4 联考 2025 届高三下学期 2 月联考数学试题 ♦

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $M = \{y | y = 2x, x \in [-1, 1]\}$, $N = \{x | y = \log_2(1-x)\}$, 则 $M \cap N =$ ()

- A. $(1, 2]$ B. $[1, 2]$ C. $[-2, 1)$ D. $[-2, 1]$

2. 已知复数 $z = \frac{3-4i}{2+i}$ 的共轭复数为 $\bar{z}$, 则 $z \cdot \bar{z} =$ ()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

3. 若命题“ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2ax + 6a > 0$ ”是假命题, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(0, 6)$ B. $(-\infty, 0) \cup (6, +\infty)$
C. $[0, 6]$ D. $(-\infty, 0] \cup [6, +\infty)$

4. 高三某研究学习小组共 10 人, 他们各自统计了自己一周每天的数学回家作业所花费的平均时间(单位: $\min$) 分别为 38, 41, 48, 48, 58, 63, 68, 68, 70, 82, 则这组数据的 ()

- A. 众数是 48 B. 极差是 38 C. 中位数是 60.5 D. 下四分位数是 68

5. 过点 $A(-5, 0)$ 作曲线 $y = \frac{\ln x}{x}$ 的切线, 则切线条数最多为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

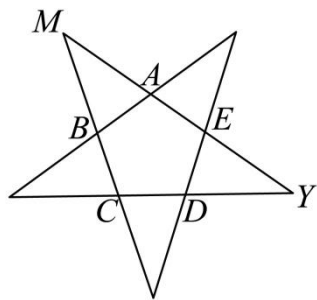
6. 在 $\triangle ABC$ 中, $A = \frac{\pi}{6}$, $BC = 2$, 若满足上述条件的 $\triangle ABC$ 恰有一解, 则边长 AC 的取值范围是 ()

- A. $(0, 2)$ B. $(0, 2]$ C. $(0, 2) \cup \{4\}$ D. $(0, 2] \cup \{4\}$

7. 已知点 $P(-m, 0)$, $Q(m, 0)$, 若圆 $(x-5)^2 + (y-12)^2 = 4$ 上存在点 R , 使得 $\angle PRQ = 90^\circ$, 则正数 m 的取值范围是 ()

- A. $[11, 15]$ B. $[11, 17]$ C. $[9, 15]$ D. $[9, 17]$

8. 如图, 将边长为 1 的正五边形 $ABCDE$ 的各边延长, 得到一个正五角星. 若点 P, Q 在正五角星的内部(含边界), 则 $\overline{AP} \cdot \overline{AQ}$ 的最小值为 ()



- A. $-3-\sqrt{5}$ B. $-2-\sqrt{5}$ C. $-1-\sqrt{5}$ D. $-\sqrt{5}$

二、多选题：本题共 3 小题，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

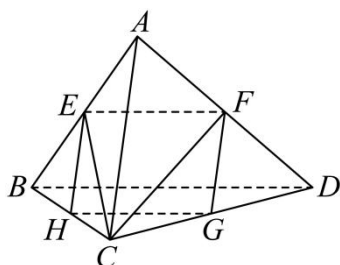
9. 已知 $a > 0$, $b > 0$, 满足 $a + 2b = 4$, 则下列说法正确的是 ()

- A. $ab \leq 2$ B. $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \leq 1$ C. $a^2 + b^2 \geq \frac{16}{5}$ D. $3^a + 9^b \geq 18$

10. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的周期为 $\frac{\pi}{2}$, 且向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位后所得到的函数为奇函数, 则下列说法正确的是 ()

- A. 函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{24}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递减
- B. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{48}, 0\right)$ 中心对称
- C. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{5\pi}{24}$ 对称
- D. 函数 $f(x)$ 在 $x = \frac{5\pi}{12}$ 处取最值

11. 如图所示, 已知正三棱锥 $A-BCD$ 底面边长为 m , 侧棱长为 n , E, F, G, H 分别为 AB, AD, CD, BC 的中点, 连接 EF, FG, GH, HE, CE, CF , 则下列说法正确的是 ()



- A. 四边形 $EFGH$ 为矩形
- B. 向量 $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{HF}$ 不共面
- C. 点 P 在 $\triangle ABC$ 内, 点 P 到点 A 距离与到底面 BCD 距离相等, 则点 P 的轨迹是椭圆的一部分

D. 若侧棱长 $n = m$ ，则直线 AC 与平面 CEF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{22}}{11}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(12, \sigma^2)$ ，且 $P(10 < \xi < 12) = 0.4$ ，则 $P(\xi > 14) =$ _____.

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$ ， $a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n, & a_n \leq 7 \\ a_n - 7, & a_n > 7 \end{cases}$ ，数列 $\{a_n\}$ 的前 2025 项的和为_____.

14. 已知直线 l 的倾斜角为锐角，且过抛物线 $y = x^2$ 的焦点，与抛物线交于 A 、 B 两点.若在该抛物线的准线上存在一点 C ，使得 $\triangle ABC$ 为正三角形，则直线 l 的斜率为_____.

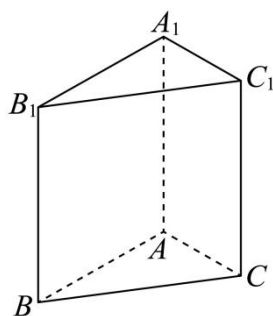
四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $2a \sin B - \sqrt{3}c \cos B = \sqrt{3}b \cos C$.

(1) 求角 B ;

(2) 若 $b = 2a$ ，求 $\sin\left(2A - \frac{\pi}{4}\right)$

16. 如图，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 ABC ，平面 $AA_1C_1C \perp$ 平面 ABC .



(1) 证明： $AA_1 \perp$ 平面 ABC ;

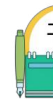
(2) 已知 $AA_1 = 3$ ， $AB = 2$ ， $AC = 1$ ， $BC = \sqrt{5}$ ，求直线 A_1B 与 AC_1 所成角的正弦值.

17. 有一项高辐射的危险任务需要工作人员去完成，每次只进入一人，且每人只进入一次，在规定安全时间内未完成任务则撤出，换下一个人进入，但最多派三人执行任务. 现在一共有 A 、 B 、 C 三个人可参加这项任务，他们各自能完成任务的概率分别为 p_1, p_2, p_3 ，且 p_1, p_2, p_3 互不相等，他们三个人能否完成任务的事件相互独立.

(1) $p_1 = 0.1, p_2 = 0.2, p_3 = 0.3$ ，如果按照 A 、 B 、 C 的顺序先后进入;

①求任务能被完成的概率;

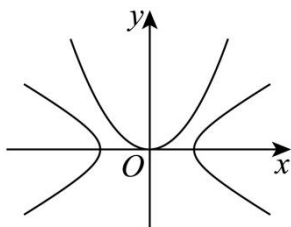
②求所需派出人员数目 X 的分布列和数学期望;



(2) 假定 $1 > p_1 > p_2 > p_3$, 试分析以怎样的先后顺序派出 A 、 B 、 C 三个人, 可使所需派出的人员数目 X 的数学期望达到最小.

18. 在平面直角坐标系 xOy 中, 双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$, 离心率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 点 P 是 C_1 上任意一点. 抛

物线 $C_2: x^2 = 2y$,



(1) 求 C_1 的方程;

(2) 过点 P 作 C_1 的两条渐近线的平行线, 分别与两条渐近线交于 A , B 两点, 求证: 平行四边形 $PAOB$ 的面积为定值;

(3) PC , PD 是 C_2 的两条切线, C , D 是切点, 求 $\triangle PCD$ 面积的最小值.

19. 函数 $f(x) = e^x - a \ln x (a > 0)$.

(1) $a = 1$ 时, 证明: $f(x) > 2$;

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的零点个数;

(3) 当 $a = k (k \in \mathbb{N}^*)$ 时, 记 $f(x)$ 所有零点之和为 b_k (若 $f(x)$ 无零点则 $b_k = 0$), 证明:

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n < \frac{(n+1)^2}{3} (n \in \mathbb{N}^*). (\text{参考数据: } e \approx 2.718)$$