千里之行 始于足下 更多资料请加 vx:18006193975

决胜高考—2025高三年级大联考

数学

注意事项

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求

1．本试卷共4页，包含[单选题（1~8）多选题9-11．填空题（第12题~第14题，共73分）.解答题（第15~19题，共77分），本次考试时间120分钟，满分150分、考试结束后，请将答题卡交回．

2．答题前，请考生务必将自己的姓名、学校、班级、座位号、考试证号用0.5毫米的黑色签字笔写在答题卡上相应的位置，并将考试证号用2B铅笔正确填涂在答题卡的相应位置．

3．答题时请用0.5毫米的黑色签字笔在答题卡指定区域作答，在试卷或草稿纸上作答一律无效．

4．如有作图需要，可用2B铅笔作图，并请加黑加粗，描写清楚．

一、单选题：本大题共8小题，每题5分，共40分．在每小题提供的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知 $A=\left\{x\middle|\mathrm{e}^{x}<\mathrm{e}\right\}$，$B=\left\{x\middle|\ln x<1\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $(0,1)$　　B. $(0,\mathrm{e})$　　C. $(-\infty,1)$　　D. $(-\infty,\mathrm{e})$

【答案】A

【解析】

【分析】先分别求出集合A，B，由此利用交集的定义能求出 $A\cap B$.

【详解】$A=\left\{x\middle|\mathrm{e}^{x}<\mathrm{e}\right\}=\left\{x\middle|x<1\right\}$，$B=\left\{x\middle|\ln x<1\right\}=\left\{x\middle|0<x<\mathrm{e}\right\}$，

则 $A\cap B=\left\{x\middle|0<x<1\right\}$，

故选：A.

2. 已知向量 $\vec{a}=(0,1,0)$，$\vec{b}=(0,-1,1)$，则 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影向量为（　　）

A. $\vec{a}$　　B. $-\vec{a}$　　C. $-\vec{b}$　　D. $\vec{b}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据投影向量的公式结合数量积的坐标运算公式和模的坐标公式求结论，

【详解】因为 $\vec{a}=(0,1,0)$，$\vec{b}=(0,-1,1)$，

千里之行 始于足下 更多资料请加 vx:18006193975

所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0+(-1)+0=-1$，$|\vec{a}|=\sqrt{0^2+(-1)^2+0^2}=1$，

所以 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影向量为 $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{-1}{1}\cdot\vec{a}=-\vec{a}$，

故选：B.

3. 某普通高中高二年级学生参加体育学业水平考试立定跳远项目模拟测试，甲、乙两位同学连续 5 次的测试数据如下表(单位：cm)：

甲	210	220	216	220	230
乙	215	212	216	223	249

下列说法错误的是（　）

A. 甲同学测试数据的众数为 220　　B. 乙同学测试数据的极差为 37

C. 甲同学测试数据的 80% 分位数为 220　　D. 乙同学测试数据的平均数为 223

【答案】C

【解析】

【分析】根据众数、极差、百分位数及平均数的计算方法计算即可判断.

【详解】对于 A，220 出现的次数最多，所以为众数，故 A 正确；

对于 B，因为 $249-212=37$，所以极差为 37，故 B 正确；

对于 C，将甲同学测试数据从小到大排列：$210,216,220,220,230$.

因为 $5\times80\%=4$，所以 80% 分位数为 $\frac{220+230}{2}=225$，故 C 错误；

对于 D，因为 $\frac{215+212+216+223+249}{5}=223$，故 D 正确.

故选：C

4. 已知 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$，则 $\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$（　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{10}$　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$　　C. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$　　D. $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据诱导公式以及同角三角函数之间的关系得到 $\tan\alpha=3$，再利用二倍角公式得到 $\cos2\alpha$ 以及 $\sin2\alpha$ 的值，最后根据两角差的余弦公式得到结果.

千里之行 始于足下 更多资料请加 vx:18006193975

【详解】因为$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$，所以$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$，

即$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=-2$，所以$\tan\alpha=3$，

所以$\cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-\frac{4}{5}$，$\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{3}{5}$，

即$\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha)=-\frac{\sqrt{2}}{10}$.

故选：B.

5. 已知F_1，F_2分别为椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左，右焦点，A为$C$上的一点，且$AF_1\perp F_1F_2$，$|AF_1|=3$，$|F_1F_2|=6\sqrt{2}$，则$C$的短轴长为（　　）

A. $3\sqrt{2}$　　B. $6\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $4\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】由题设列出关于a,b,c的方程求出a,b,c即可求解.

【详解】由题意得$\begin{cases}|AF_1|=\frac{b^2}{a}=3\\|F_1F_2|=2c=6\sqrt{2}\\a^2-b^2=c^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=6\\b=3\sqrt{2}\\c=3\sqrt{2}\end{cases}$，

所以C的短轴长为$2b=6\sqrt{2}$.

故选：B.

6. 已知圆锥的底面半径为3，圆锥内的最大球的表面积为9π，则该圆锥的侧面积为（　　）

A. 9π　　B. 15π　　C. $10\sqrt{2}\pi$　　D. $20\sqrt{3}\pi$

【答案】B

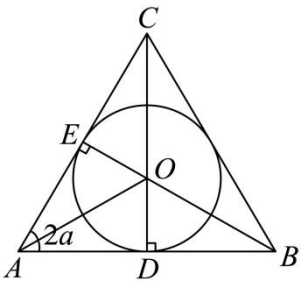
【解析】

【分析】先由题设得到圆锥内的最大球的直径，再借助圆锥轴截面以及截面图中性质$\angle COE=\angle CAB=2\alpha$，结合三角函数定义和倍角公式依次求出$\sin\alpha$、$\cos\alpha$和$\cos 2\alpha$，进而由$\cos 2\alpha=\frac{OE}{OC}$求出$OC$，即可依次求出圆锥的高和母线长，进而由圆锥侧面积公式即可求解.

千里之行 始于足下 更多资料请加 vx:18006193975

【详解】由球的表面积公式 $S=4\pi R^2=9\pi \Rightarrow R=\frac{3}{2}$，即圆锥内的最大球的直径为 $\frac{3}{2}$，

圆锥轴截面如图，则 $AD=BD=3$，$OD=OE=\frac{3}{2}$，



因为 $\angle COE+\angle DOE=\angle CAB+\angle DOE=\pi$，

所以 $\angle COE=\angle CAB$，设 $\angle COE=\angle CAB=2\alpha$，

则 $\sin\alpha=\frac{OD}{OA}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+3^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\frac{AD}{OA}=\frac{3}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+3^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

则 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{3}{5}$，

在 $\triangle COE$ 中，$\cos 2\alpha=\frac{OE}{OC}\Rightarrow OC=\frac{OE}{\cos 2\alpha}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{5}}=\frac{5}{2}$，

所以 $CD=CO+OD=4$，所以 $BC=\sqrt{CD^2+BD^2}=5$，

所以圆锥的侧面积为 $\pi\times 3\times 5=15\pi$.

故选：B.

7. 已知函数 $f(x)=2\cos^2\omega x+\sin 2\omega x-1(\omega>0)$ 的图象关于直线 $x=\frac{5\pi}{12}$ 对称，且 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 上有最大值没有最小值，则 ω 的值为（　　）

A. $\frac{3}{10}$　　B. $\frac{27}{10}$　　C. $\frac{39}{10}$　　D. $\frac{3}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】利用三角函数降幂公式以及辅助角公式整理函数解析式，根据整体思想，结合正弦函数的单调性以及对称性，建立不等式与方程，可得答案.

【详解】$f(x)=2\cos^2\omega x+\sin 2\omega x-1=2\cdot\frac{1+\cos 2\omega x}{2}+\sin 2\omega x-1$

$=\cos 2\omega x+\sin 2\omega x=\sqrt{2}\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，

千里之行 始于足下 更多资料请加 vx:18006193975

则 $2\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{2\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right]$，

因为 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 既没有最大值也没有最小值，所以 $\frac{2\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}$，$0<\omega\le\frac{3}{8}$，

又因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{5\pi}{12}$ 对称，则 $\frac{5\omega\pi}{6}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathrm{Z}$，

解得 $\omega=\frac{6k}{5}+\frac{3}{10}$，$k\in\mathrm{Z}$，所以当 $k=0$ 时，$\omega=\frac{3}{10}$ 符合要求.

故选：A.

8. 若 $\triangle ABC$ 的三个内角均小于 120°，点 M 满足 $\angle AMB=\angle AMC=\angle BMC=120°$，则点 M 到三角形三个顶点的距离之和最小，点 M 被人们称为费马点．根据以上性质，已知 $\vec{a}$ 是平面内的任意一个向量，向量 $\vec{b}$，$\vec{c}$ 满足 $\vec{b}\perp\vec{c}$，且 $|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=\sqrt{3}$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|+|\vec{a}-\vec{c}|+|\vec{a}+\vec{c}|$ 的最小值是（　　）

A. 9　　B. $4\sqrt{3}$　　C. 6　　D. $3\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，$A(x,y)$，$B(3,0)$，$C(0,\sqrt{3})$，$D(0,-\sqrt{3})$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|+|\vec{a}-\vec{c}|+|\vec{a}+\vec{c}|$ 即为点 $A(x,y)$ 到 $B(3,0)$，$C(0,\sqrt{3})$，$D(0,-\sqrt{3})$ 三点的距离之和，由费马点的性质可得当点 A 位于 $\triangle BCD$ 的中心时，$|AB|+|AC|+|AD|$ 取最小值，即可求解.

【详解】设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，$A(x,y)$，$B(3,0)$，$C(0,\sqrt{3})$，$D(0,-\sqrt{3})$，

则 $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=(x-3,y)$，$\vec{a}-\vec{c}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=(x,y-\sqrt{3})$，$\vec{a}+\vec{c}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=(x,y+\sqrt{3})$，

所以

$$|\vec{a}-\vec{b}|+|\vec{a}-\vec{c}|+|\vec{a}+\vec{c}|=\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-\sqrt{3})^2}+\sqrt{x^2+(y+\sqrt{3})^2}$$

$$=|AB|+|AC|+|AD|,$$

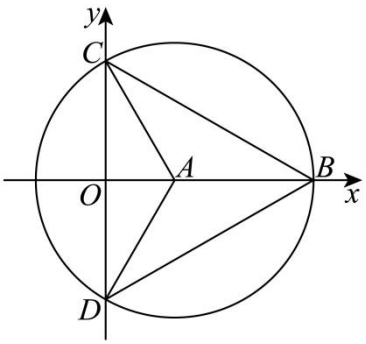
因为 $\triangle BCD$ 为等边三角形，由题意，等边 $\triangle BCD$ 的费马点为 $\triangle BCD$ 的中心，

此时 $|AB|+|AC|+|AD|$ 取最小值，

所以 $\left(|AB|+|AC|+|AD|\right)_{\min}=\frac{2}{3}|OB|\times3=6$，

故选：C.

千里之行 始于足下 更多资料请加 vx:18006193975



二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 已知复数 $z_1=3-4\mathrm{i}$，$z_2=x+yi$（$x,y\in\mathbf{R}$）（i 为虚数单位），则（　　）

A. $|\overline{z_2}|=|z_2|$　　B. $z_1^2=|z_1|^2$

C. $|z_1\overline{z_2}|=|z_1z_2|$　　D. 若 $|z_2-z_1|\le 2$，则 $|z_2|\le 7$

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据共轭复数的概念求 $\overline{z_2}$，复数模的定义求 $|\overline{z_2}|,|z_2|$，判断 A，根据复数的乘法运算法则求 z_1^2，结合复数的模的定义求 $|z_1|^2$，由此判断 B，结合复数的乘法法则，模的定义求 $|z_1\overline{z_2}|,|z_1z_2|$ 判断 C，结合复数的模的几何意义判断 D.

【详解】对于 A，复数 $z_2=x+yi$ 的共轭复数 $\overline{z_2}=x-y\mathrm{i}$，

所以 $|z_2|=\sqrt{x^2+y^2}$，$|\overline{z_2}|=\sqrt{x^2+(-y)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$，

所以 $|\overline{z_2}|=|z_2|$，A 正确；

对于 B，$z_1^2=(3-4\mathrm{i})^2=9-24\mathrm{i}-16=-7-24\mathrm{i}$，$|z_1|^2=\left(\sqrt{3^2+(-4)^2}\right)^2=25$，B 错误；

对于 C，因为 $|z_1\overline{z_2}|=|z_1||\overline{z_2}|$，$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$，因为 $|\overline{z_2}|=|z_2|$，所以 $|z_1\overline{z_2}|=|z_1z_2|$，C 正确；

对于 D，若 $|z_2-z_1|\le 2$，则 $\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2}\le 2$，

所以点 (x,y) 到点 $(3,-4)$ 的距离小于等于 2，

故点 (x,y) 在以 $(3,-4)$ 为圆心，2 为半径的圆上或圆内，

所以原点到 (x,y) 的距离的最大值为原点到圆心 $(3,-4)$ 的距离加半径，

千里之行 始于足下 更多资料请加 vx:18006193975

所以$|z_2|=\sqrt{x^2+y^2}\le\sqrt{(-3)^2+4^2}+2=7$，D 正确，

故选：ACD．

10. 已知$F(3,0)$是抛物线$C:y^2=2px$的焦点，M，N是C上的点，O为坐标原点．则（　　）

A. $p=6$

B. 若$MF+NF=10$，则线段MN的中点到y轴的距离为2

C. 以MN为直径的圆与C的准线相切

D. 当$\angle MON=90°$时，$|OM||ON|\ge 288$

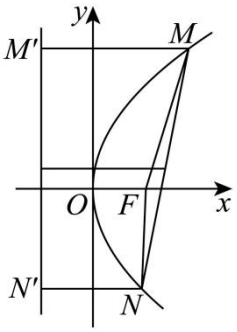
【答案】ABD

【解析】

【分析】根据抛物线的焦点与标准方程的关系，可得A的正误；根据抛物线的定义作图，结合梯形中位线的性质，可得BC的正确；设出动点坐标，利用向量数量积为零，根据基本不等式，可得D的正误.

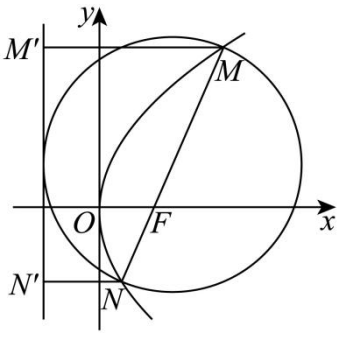
【详解】由题意可得$\frac{p}{2}=3$，解得$p=6$，A 正确；

如图，作$MM'\perp$准线$x=3$，垂足为M'，作$NN'\perp$准线$x=3$，垂足为N'，



由抛物线性质得$MF+NF=MM'+NN'=10$，所以线段MN的中点到准线的距离为$\frac{MM'+NN'}{2}=5$，

所以线段MN的中点到y轴的距离为$5-3=2$，B 正确：



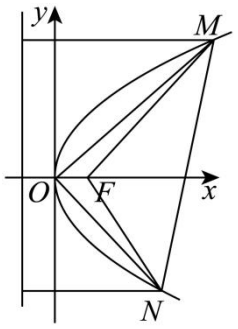
由B可知，MN的中点到准线$x=-3$的距离$d=\frac{MM'+NN'}{2}=\frac{MF+NF}{2}$，

以MN为直径的圆的半径为r，当$r=d=\frac{1}{2}MN$时，圆与准线相切，

所以只有当线段MN过抛物线焦点时，以MN为直径的圆与C的准线相切，否则不正确，C 错误；

千里之行 始于足下 更多资料请加 vx:18006193975

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，



若$\angle MON=90°$．则$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{144}(y_1y_2)^2+y_1y_2=0$，$y_1y_2=-144$，$x_1x_2=144$，

所以$|OM||ON|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}=\sqrt{x_1^2+12x_1}\cdot\sqrt{x_2^2+12x_2}=\sqrt{x_1x_2\,(x_1+12)(x_2+12)}$

$=12\sqrt{(x_1+12)(x_2+12)}=12\sqrt{x_1x_2+144+12(x_1+x_2)}\geq12\sqrt{288+12\times2\sqrt{x_1x_2}}=288$，

当且仅当$x_1=x_2=12$时取等.

故选 ABD.

11. 在经济增长模型中，假设某种经济指标的增长与一种特殊函数关系密切相关．定义增长正弦函数为$\sin_g x=\frac{a^x-a^{-x}}{2}(a>1)$，增长余弦函数为$\cos_g x=\frac{a^x+a^{-x}}{2}(a>1)$，增长正切函数$\tan_g x=\frac{\sin_g x}{\cos_g x}$．则（　　）

A. 增长余弦函数是偶函数

B. 增长正弦函数是增函数

C. 若$\tan_g x=\frac{1}{2}$，则$x=\log_a 3$

D. 若$\tan_g x_1+\tan_g x_2=1$，则$\tan_g(x_1+x_2)\geq\frac{4}{5}$

【答案】ABD

【解析】

【分析】对于 A，由函数得奇偶性的定义，即可判断；对于 B，由函数得单调性的性质，即可判断；对于 C，由$\tan_g x=\frac{1}{2}$可得$a^x=\sqrt{3}$，从而可求得x，即可判断；对于 D，推导得$\tan_g(x_1+x_2)=\frac{\tan_g x_1+\tan_g x_2}{1+\tan_g x_1\cdot\tan_g x_2}$，再结合基本不等式的应用，即可求解判断.

【详解】对于 A，$\cos_g(-x)=\frac{a^{-x}+a^x}{2}=\cos_g x$，故增长余弦函数是偶函数，故 A 正确；

千里之行 始于足下 更多资料请加 vx:18006193975

对于 B，$\sin_g x=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$ 的定义域为 R，$y=\dfrac{a^x}{2}$ 为增函数，$y=\dfrac{a^{-x}}{2}$ 为减函数，故 $\sin_g x=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$ 为增函数，故 B 正确；

对于 C，若 $\tan_g x=\dfrac{1}{2}$，则 $\dfrac{\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}}{\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}}=\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\dfrac{1}{2}$，解得 $a^x=\sqrt{3}$，所以 $x=\log_a\sqrt{3}$，故 C 错误；

对于 D，$\tan_g x_1+\tan_g x_2=\dfrac{a^{x_1}-a^{-x_1}}{a^{x_1}+a^{-x_1}}+\dfrac{a^{x_2}-a^{-x_2}}{a^{x_2}+a^{-x_2}}=1$，

$$\tan_g\left(x_1+x_2\right)=\frac{a^{x_1+x_2}-a^{-x_1-x_2}}{a^{x_1+x_2}+a^{-x_1-x_2}}=\frac{2\left(a^{x_1+x_2}-a^{-x_1-x_2}\right)}{2\left(a^{x_1+x_2}+a^{-x_1-x_2}\right)}$$

$$=\frac{\left(a^{x_1+x_2}+a^{x_1-x_2}-a^{-x_1+x_2}-a^{-x_1-x_2}\right)+\left(a^{x_1+x_2}-a^{x_1-x_2}+a^{-x_1+x_2}-a^{-x_1-x_2}\right)}{\left(a^{x_1+x_2}+a^{x_1-x_2}+a^{-x_1+x_2}+a^{-x_1-x_2}\right)+\left(a^{x_1+x_2}-a^{x_1-x_2}-a^{-x_1+x_2}+a^{-x_1-x_2}\right)}$$

$$=\frac{(a^{x_1}-a^{-x_1})(a^{x_2}+a^{-x_2})+(a^{x_1}+a^{-x_1})(a^{x_2}-a^{-x_2})}{(a^{x_1}+a^{-x_1})(a^{x_2}+a^{-x_2})+(a^{x_1}-a^{-x_1})(a^{x_2}-a^{-x_2})}=\frac{\dfrac{a^{x_1}-a^{-x_1}}{a^{x_1}+a^{-x_1}}+\dfrac{a^{x_2}-a^{-x_2}}{a^{x_2}+a^{-x_2}}}{1+\dfrac{(a^{x_1}-a^{-x_1})(a^{x_2}-a^{-x_2})}{(a^{x_1}+a^{-x_1})(a^{x_2}+a^{-x_2})}}$$

$$=\frac{\tan_g x_1+\tan_g x_2}{1+\tan_g x_1\cdot\tan_g x_2},$$

$\because \tan_g x_1+\tan_g x_2=1$，$\therefore \tan_g x_1\cdot\tan_g x_2\le\dfrac{\left(\tan_g x_1+\tan_g x_2\right)^2}{4}=\dfrac{1}{4}$，

$$\therefore \tan_g\left(x_1+x_2\right)=\frac{\tan_g x_1+\tan_g x_2}{1+\tan_g x_1\cdot\tan_g x_2}=\frac{1}{1+\tan_g x_1\cdot\tan_g x_2}\ge\frac{4}{5},$$

当且仅当 $\tan_g x_1=\tan_g x_2=\dfrac{1}{2}$ 时等号成立，$\tan_g\left(x_1+x_2\right)$ 取到最小值 $\dfrac{4}{5}$.

故 D 正确.

故选：ABD.

【点睛】关键点睛：本题关键需推导出 $\tan_g\left(x_1+x_2\right)=\dfrac{\tan_g x_1+\tan_g x_2}{1+\tan_g x_1\cdot\tan_g x_2}$，再利用基本不等式，可得 $\tan_g x_1\cdot\tan_g x_2\le\dfrac{\left(\tan_g x_1+\tan_g x_2\right)^2}{4}=\dfrac{1}{4}$，即可证得 $\tan_g\left(x_1+x_2\right)\ge\dfrac{4}{5}$.

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．不需写出解答过程，请把答案直接填写在答题卡相应位置上．

12. 已知 $(1+2x)^5+(2-x)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6$，则 $a_3=$_____.

千里之行 始于足下 更多资料请加 vx:18006193975

【答案】-80

【解析】

【分析】分别求出$(1+2x)^5$与$(2-x)^6$展开式中x^3的系数，再求和即可.

【详解】因为a_3为$(1+2x)^5+(2-x)^6$展开式中x^3的系数，

$(1+2x)^5$展开式中x^3的系数为$C_5^3\cdot 2^3$，

$(2-x)^6$展开式中x^3的系数$(-1)^3C_6^3\cdot 2^3$，

所以$a_3=C_5^3\cdot 2^3-C_6^3\cdot 2^3=-80$.

故答案为：-80.

13. 已知函数$f(x)$的定义域为R，$f(x)=g(x-1)+2$．若函数$g(x)$为奇函数，$g(x+1)$为偶函数，则$f(2025)=$_____.

【答案】2

【解析】

【分析】根据函数$g(x)$为奇函数，$g(x+1)$为偶函数，得到$g(x)$为周期函数，从而$f(x)$为周期函数求解.

【详解】因为函数$g(x)$为奇函数，$g(x+1)$为偶函数，

所以$g(-x)=-g(x)$，$g(-x+1)=g(x+1),g(x)=g(2-x)$，

则$g(x)=g(4+x)$，所以$g(x)$为周期函数，且周期为4，

因为$f(x)=g(x-1)+2$，所以$f(x)$为周期函数，且周期为4，

所以$f(2025)=f(1)=g(0)+2=0+2=2$.

故答案为：2

14. 如图1，一圆形纸片的圆心为O，半径为$4\sqrt{3}$，以O为中心作正六边形$ABCDEF$，以正六边形的各边为底边作等腰三角形，使其顶角的顶点恰好落在圆O上，现沿等腰三角形的腰和中位线裁剪，裁剪后的图形如图2所示，将该图形以正六边形的边为折痕将等腰梯形折起，使得相邻的腰重合得到正六棱台．若该正六棱台的高为$\sqrt{6}$，则其体积为_____.

千里之行 始于足下 更多资料请加 vx:18006193975

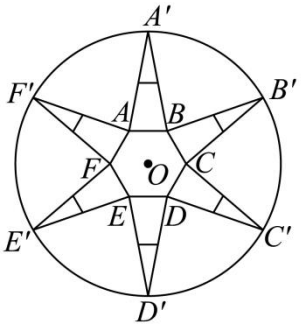


图1

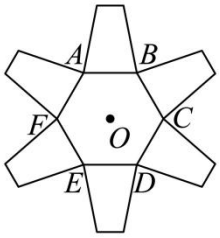


图2

【答案】$\frac{21\sqrt{2}}{2}$##$\frac{21}{2}\sqrt{2}$

【解析】

【分析】连接OA'，分别交A_1B_1，AB与点M，N，由条件可得裁剪前$MN=\frac{4\sqrt{3}-\sqrt{3}a}{2}$，由六棱台性质可得$MN^2=6+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2$，列方程求$a$，再结合台体体积公式求结论.

【详解】如图3，以AB为底边的等腰三角形的中位线为A_1B_1，

连接OA'，分别交A_1B_1，AB与点M，N，则M，N分别为A_1B_1，AB的中点，

设$AB=2a$，则由中位线和正六边形性质得$A_1B_1=AN=a$，$OA=2a$，$ON=\sqrt{3}a$，

折叠后形成的正六棱台如图4所示，由正六边形性质得$O_1A_1=A_1B_1=a$，$O_1M=\frac{\sqrt{3}a}{2}$，$MN=\frac{4\sqrt{3}-\sqrt{3}a}{2}$，

连接O_1O，则O_1O是正六棱台$ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$的高，即$O_1O=\sqrt{6}$，

过点M作$MG//O_1O$，交ON于点G，

由正六棱台结构特征可知$O_1O\perp$平面$ABCDEF$，

$MG\perp$平面$ABCDEF$，$\therefore MG=O_1O=\sqrt{6}$，

在$\mathrm{Rt}\triangle MNG$中，$MN^2=MG^2+NG^2\Rightarrow\left(\frac{4\sqrt{3}-\sqrt{3}a}{2}\right)^2=6+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2$，解得$a=1$，

$\therefore$正六棱台$ABCDEF-A_1B_1CD_1E_1F_1$的上下底面的边长分别为$A_1B_1=a=1$和$AB=2a=2$，

正六棱锥上底面面积为$S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2\times6=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，下底面面积为$S_2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2\times6=6\sqrt{3}$，

千里之行 始于足下 更多资料请加 vx:18006193975

∴该正六棱台的体积为$V=\frac{1}{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+6\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot 6\sqrt{3}}\right)\times\sqrt{6}=\frac{21\sqrt{2}}{2}$.

故答案为：$\frac{21\sqrt{2}}{2}$.

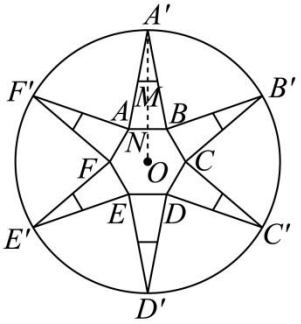


图3

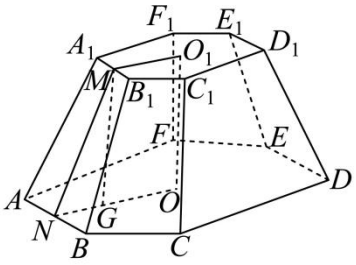


图4

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分．请在答题卡指定区域内作答．解答时应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

15. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=4$，$a_{n+1}=\frac{4a_n}{a_n+3}$

（1）求数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前$n$项和$S_n$；

（2）证明：$1<a_{n+1}<a_n$.

【答案】（1）$S_n=-3\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]+n$

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）利用取倒数的方法化简等式，再利用构造法可得数列$\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$为等比数列，利用等比数列求和公式，可得答案；

（2）根据指数函数以及反比例函数的单调性，由复合函数的单调性可得数列$\{a_n\}$的单调性，可得答案.

【小问 1 详解】

由$a_{n+1}=\frac{4a_n}{a_n+3}$，取倒数可得$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{1}{4}$，令$\frac{1}{a_{n+1}}+\lambda=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{a_n}+\lambda\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{3}{4}\cdot\lambda$，

化简可得$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{3}{4}\lambda-\lambda$，则$\frac{3}{4}\lambda-\lambda=\frac{1}{4}$，解得$\lambda=-1$，

千里之行 始于足下 更多资料请加 vx:18006193975

由$\frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$，则数列$\left\{\frac{1}{a_n}+\lambda\right\}$是以$\frac{1}{a_1}-1$为首项，以$\frac{3}{4}$为公比的等比数列，

所以$\frac{1}{a_n}-1=\left(\frac{1}{a_1}-1\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=-\left(\frac{3}{4}\right)^n$，可得$\frac{1}{a_n}=-\left(\frac{3}{4}\right)^n+1$，

则$S_n=\frac{-\frac{3}{4}\times\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{3}{4}}+n=-3\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]+n$.

【小问 2 详解】

由（1）可得$\frac{1}{a_n}=1-\left(\frac{3}{4}\right)^n$，则$a_n=\frac{1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}$，由$\left(\frac{3}{4}\right)^n>0$，则$a_n>1$，$a_{n+1}>1$，

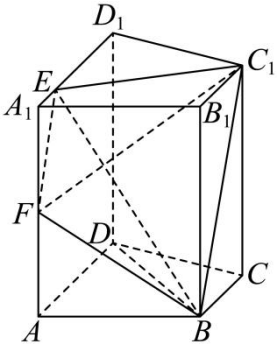
由函数$y=\left(\frac{3}{4}\right)^x$在R上单调递减，当$x\in(0,+\infty)$时，$\left(\frac{3}{4}\right)^x\in(0,1)$，

则$y=1-\left(\frac{3}{4}\right)^x$在$(0,+\infty)$上单调递增，当$x\in(0,+\infty)$时，$1-\left(\frac{3}{4}\right)^x\in(0,1)$，

由$y=\frac{1}{x}$在$(0,1)$上单调递减，则$y=\frac{1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^x}$在$(0,+\infty)$上单调递减，

所以$1<a_{n+1}<a_n$.

16. 如图，在直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AD//BC$，$AD\perp AB$，$AA_1=AD=2BC=2$，$AB=\sqrt{2}$.点E在棱A_1D_1上，平面BC_1E与棱AA_1交于点F.



（1）求证：$BD\perp C_1F$；

（2）若BE与平面$ABCD$所成角的正弦值是$\frac{4}{5}$，求三角形C_1EF的面积.

千里之行 始于足下 更多资料请加 vx:18006193975

【答案】（1）证明见解析

（2）$\frac{\sqrt{11}}{4}$

【解析】

【分析】（1）根据线面垂直的性质可得 $AA_1 \perp BD$，根据锐角三角函数可得 $AC \perp BD$，即可根据线面垂直的判定求解 $BD \perp$ 平面 ACC_1A_1，进而可求解，

（2）建立空间直角坐标系，求解平面法向量，根据向量的夹角公式 x，利用向量共面定理求解 $m=-\frac{1}{2}$，$n=\frac{3}{2}$，$z=1$，即可根据向量夹角，结合面积公式求解.

【小问 1 详解】

在直四棱柱中 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$，

$\because BD \subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore AA_1 \perp BD$，连接 AC，

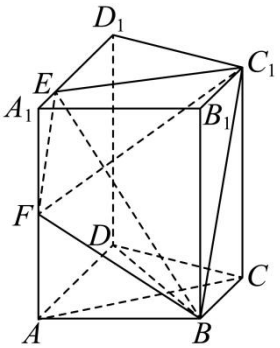
$\because \tan\angle ADB=\frac{AB}{AD}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan\angle CAB=\frac{CB}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore \angle ADB=\angle CAB$，又 $\angle ADB+\angle DBA=90°$，

$\therefore \angle CAB+\angle DBA=90°$，$\therefore AC \perp BD$，

$\because AA_1$，$AC \subset$ 平面 ACC_1A_1，$AA_1 \cap AC=A$，$\therefore BD \perp$ 平面 ACC_1A_1，

$\because C_1F \subset$ 平面 ACC_1A_1，$\therefore BD \perp C_1F$.



【小问 2 详解】

以 A 为坐标原点，AD 为 x 轴，AB 为 y 轴，AA_1 为 z 轴，建立空间直角坐标系，

则 $A(0,0,0)$，$B(0,\sqrt{2},0)$，$C\left(1,\sqrt{2},0\right)$，$C_1(1,\sqrt{2},2)$，设 $E(x,0,2)$，$x>0$，

平面 $ABCD$ 的法向量为 $\vec{n}=(0,0,1)$，$\overrightarrow{BE}=(x,-\sqrt{2},2)$，

千里之行 始于足下 更多资料请加 vx:18006193975

则 $\frac{4}{5}=\left|\cos\langle\overrightarrow{BE},\vec{n}\rangle\right|=\left|\frac{\overrightarrow{BE}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{BE}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}\right|=\frac{2}{\sqrt{x^2+6}}$，解得 $x=\frac{1}{2}$，

则 $E\left(\frac{1}{2},0,2\right)$，$\overrightarrow{BE}=\left(\frac{1}{2},-\sqrt{2},2\right)$，$\overrightarrow{C_1E}=\left(-\frac{1}{2},-\sqrt{2},0\right)$，

设 $F(0,0,z)$，$\overrightarrow{C_1F}=(-1,-\sqrt{2},z-2)$，因为 C_1,B,E,F 四点共面，

则 $\overrightarrow{C_1F}=m\overrightarrow{BE}+n\overrightarrow{C_1E}\Rightarrow(-1,-\sqrt{2},z-2)=m\left(\frac{1}{2},-\sqrt{2},2\right)+n\left(-\frac{1}{2},-\sqrt{2},0\right)$，

$\therefore\begin{cases}\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}n=-1\\-\sqrt{2}m-\sqrt{2}n=-\sqrt{2}\end{cases}$，解得 $m=-\frac{1}{2}$，$n=\frac{3}{2}$，$z=1$，

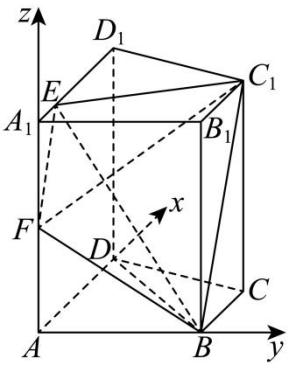
$\therefore F(0,0,1)$，$\therefore F$ 为棱 AA_1 的中点.

所以 $\overrightarrow{C_1F}=(-1,-\sqrt{2},-1)$，$\left|\overrightarrow{C_1E}\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+2}=\frac{3}{2}$，$\left|\overrightarrow{C_1F}\right|=\sqrt{1+2+1}=2$，

$\therefore\cos\overrightarrow{C_1E},\overrightarrow{C_1F}=\frac{\overrightarrow{C_1E}\cdot\overrightarrow{C_1F}}{\left|\overrightarrow{C_1E}\right|\cdot\left|\overrightarrow{C_1F}\right|}=\frac{\frac{1}{2}+2}{\frac{3}{2}\cdot2}=\frac{5}{6}$，

所以 $\sin\overrightarrow{C_1E},\overrightarrow{C_1F}=\sqrt{1-\cos^2\overrightarrow{C_1E},\overrightarrow{C_1F}}=\frac{\sqrt{11}}{6}$，

所以三角形 C_1EF 的面积 $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{C_1E}\right|\cdot\left|\overrightarrow{C_1F}\right|\cdot\sin\left\langle\overrightarrow{C_1E},\overrightarrow{C_1F}\right\rangle=\frac{\sqrt{11}}{4}$.



17. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 过点 $P(4,\sqrt{3})$，A_1，A_2 是双曲线 C 的左右顶点，且 $A_1A_2=4$.

（1）求双曲线 C 的方程；

（2）直线 l 过点 $Q(3,0)$ 交双曲线 C 于点 M，N，直线 MA_1，NA_2 交于点 B，求 $\left|BA_1-BP\right|$ 的最大值.

千里之行 始于足下 更多资料请加 vx:18006193975

【答案】（1）$\frac{x^2}{4}-y^2=1$

（2）$\frac{\sqrt{31}}{3}$.

【解析】

【分析】（1）由条件列关于a,b的方程，解方程求a,b可得椭圆方程；

（2）设直线$l:x=my+3$，$M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$，联立方程组结合设而不求法证明点B在直线$x=\frac{4}{3}$上，求点A_1关于直线$x=\frac{4}{3}$的对称点E，结合平面几何方法求结论.

【小问 1 详解】

因为A_1，A_2是双曲线C的左右顶点，且$A_1A_2=4$，即$2a=4$，得$a=2$，

将点$P(4,\sqrt{3})$代入双曲线方程得$\frac{16}{4}-\frac{3}{b^2}=1$，解得$b^2=1$，

所以双曲线方程为$\frac{x^2}{4}-y^2=1$.

【小问 2 详解】

由已知可得直线l的斜率不为零，

所以设直线$l:x=my+3$，$M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$，

联立直线l方程与双曲线方程$\begin{cases}\frac{x^2}{4}-y^2=1\\ x=my+3\end{cases}$，

消去x得$\left(m^2-4\right)y^2+6my+5=0$，

方程$\left(m^2-4\right)y^2+6my+5=0$的判别式$\Delta=36m^2-20\left(m^2-4\right)=16m^2+80>0$，

由韦达定理得$y_1+y_2=\frac{-6m}{m^2-4}$，$y_1y_2=\frac{5}{m^2-4}$，且$my_1y_2=-\frac{5}{6}\left(y_1+y_2\right)$，

直线$MA_1:y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，直线$NA_2:y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，

联立直线MA_1与直线NA_2方程

千里之行 始于足下 更多资料请加 vx:18006193975

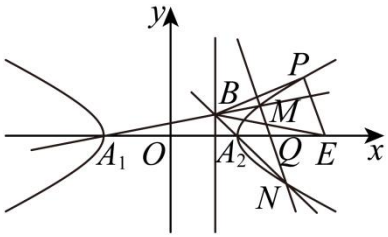
$$\begin{cases} y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2) \\ y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2) \end{cases} \Rightarrow \frac{x+2}{x-2}=\frac{x_1+2}{y_1}\cdot\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{(my_1+5)y_2}{(my_2+1)y_1}=\frac{my_1y_2+5y_2}{my_1y_2+y_1}$$

$$=\frac{-\frac{5}{6}(y_1+y_2)+5y_2}{-\frac{5}{6}(y_1+y_2)+y_1}=\frac{-\frac{5}{6}(y_1-5y_2)}{\frac{1}{6}(y_1-5y_2)}=-5$$，解得 $x=\frac{4}{3}$，

即直线 MA_1 与直线 NA_2 的交点 B 在直线 $x=\frac{4}{3}$ 上，点 A_1 关于直线 $x=\frac{4}{3}$ 的对称点 $E\left(\frac{14}{3},0\right)$，

所以 $|BA_1|=|BE|$，所以 $|BA_1-BP|=|BE-BP|\le|EP|=\sqrt{\left(\frac{14}{3}-4\right)^2+(0-\sqrt{3})^2}=\frac{\sqrt{31}}{3}$，

当点 B 在直线 EP 与直线 $x=\frac{4}{3}$ 的交点时，即点 E、P、B 共线时，$|BA_1-BP|$ 取到最大值 $\frac{\sqrt{31}}{3}$.



【点睛】方法点睛：（1）解答直线与椭圆的题目时，时常把两个曲线的方程联立，消去 x（或 y）建立一元二次方程，然后借助根与系数的关系，并结合题设条件建立有关参变量的等量关系.

（2）涉及到直线方程的设法时，务必考虑全面，不要忽略直线斜率为 0 或不存在等特殊情形.

18. 甲，乙两名围棋学员进行围棋比赛，规定每局比赛胜者得 1 分，负者得 0 分，平局双方均得 0 分，比赛中当一方比另一方多两分比赛中止，多得两分的一方赢得比赛. 已知每局比赛中，甲获胜的概率为 α，乙获胜的概率为 β，两人平局的概率为 $\gamma(\alpha+\beta+\gamma=1,\alpha>0,\beta>0,\gamma\ge0)$，且每局比赛结果相互独立.

（1）若 $\alpha=\frac{1}{4}$，$\beta=\frac{1}{4}$，$\gamma=\frac{1}{2}$，求进行 4 局比赛后甲学员赢得比赛的概率；

（2）当 $\gamma=0$ 时，

（i）若比赛最多进行 6 局（若到第 6 局时未分出胜负，也结束比赛），求比赛结束时比赛局数 X 的分布列及期望 $E(X)$ 的最大值；

（ii）若比赛不限制局数，写出“甲学员赢得比赛”的概率（用 α，β 表示），无需写出过程.

【答案】（1）$\frac{7}{128}$

千里之行 始于足下 更多资料请加 vx:18006193975

（2）（i）分布列见解析，$\frac{7}{2}$；（ii）$\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}$

【解析】

【分析】（1）明确四局比赛后甲学员赢得比赛的具体情况，然后根据独立事件概率乘法公式进行运算即可求解；

（2）（i）先确定 X 的所有可能取值，在计算每个取值对应的概率即可求得分布列，再根据期望公式计算期望即可.

（ii）记“甲学员赢得比赛”为事件 M，根据当甲，乙两名学员得分总数相同时，甲学员赢得比赛的概率与比赛一开始甲学员赢得比赛的概率相同结合 $\alpha+\beta=1$ 即可求出 $P(M)$.

【小问 1 详解】

4 局比赛结束后甲学员赢得比赛，甲乙学员的得分情况为 2：0，3：1，

若甲乙学员得分情况为 2：0，概率 $P=C_3^1\alpha\cdot\gamma\cdot\alpha=3\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{64}$，

若甲乙学员得分情况为 3：1，概率 $P=C_2^1\alpha\cdot\beta\cdot\alpha^2=2\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{128}$，

所以 4 局比赛结束甲学员赢得比赛的概率为 $\frac{3}{64}+\frac{1}{128}=\frac{7}{128}$.

【小问 2 详解】

（i）因为 $\gamma=0$，所以每局比赛结果仅有“甲获胜”和“乙获胜”，即 $\alpha+\beta=1$，

由题意得 X 的所有可能取值为 2，4，6，则 $P(X=2)=\alpha^2+\beta^2$，

$P(X=4)=(\alpha\beta+\beta\alpha)\alpha^2+(\alpha\beta+\beta\alpha)\beta^2=2\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)$，

$P(X=6)=(\alpha\beta+\beta\alpha)\cdot(\alpha\beta+\beta\alpha)\cdot\left(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\right)=4\alpha^2\beta^2$，

所以 X 的分布列为：

X	2	4	6
P	$\alpha^2+\beta^2$	$2\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)$	$4\alpha^2\beta^2$

所以 X 的期望

$E(X)=2\left(\alpha^2+\beta^2\right)+8\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)+24\alpha^2\beta^2$

$=2(1-2\alpha\beta)+8\alpha\beta(1-2\alpha\beta)+24\alpha^2\beta^2=8\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta+2$，

千里之行 始于足下 更多资料请加 vx:18006193975

因为$\alpha+\beta=1\geq 2\sqrt{\alpha\beta}$，所以$\alpha\beta\leq\frac{1}{4}$，当且仅当$\alpha=\beta=\frac{1}{2}$时，等号成立．所以$\alpha\beta\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$，

所以$E(X)=8\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta+2\leq 8\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+4\times\frac{1}{4}+2=\frac{7}{2}$．

故$E(X)$的最大值为$\frac{7}{2}$；

（ii）记“甲学员赢得比赛”为事件M，当甲，乙两名学员得分总数相同时，甲学员赢得比赛的概率与比赛一开始甲学员赢得比赛的概率相同，

所以$P(M)=\alpha^2+\alpha\beta P(M)+\beta\alpha P(M)=\alpha^2+2\alpha\beta P(M)$，

所以$(1-2\alpha\beta)P(M)=\alpha^2$，即$P(M)=\frac{\alpha^2}{1-2\alpha\beta}$，

因为$\alpha+\beta=1$，所以$P(M)=\frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}=\frac{\alpha^2}{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-2\alpha\beta}=\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}$．

19. 设函数$y=f(x)$的定义域为D，其导函数为$f'(x)$，区间I是D的一个非空子集．若对区间I内的任意实数x，存在实数t，使得$x+t\in D$，且使得$f(x+t)\geq(t+1)\cdot f'(x)$成立，则称函数$y=f(x)$为区间$I$上的“$M(t)$函数”．

（1）判断函数$f(x)=\cos x$是否为$[0,\pi]$上的“$M\left(\frac{\pi}{2}\right)$函数”，并说明理由；

（2）若函数$g(x)=x^2-ax$是$[0,2]$上的“$M(2)$函数”．

（i）求a的取值范围；

（ii）证明：$\forall x\in[1,2]$，$g(x+2)\geq 6(\ln x-1)$．

【答案】（1）$f(x)=\cos x$是$[0,\pi]$上的“$M\left(\frac{\pi}{2}\right)$函数”，理由见解析

（2）（i）$-4\leq a\leq 4$；（ii）证明见解析

【解析】

【分析】（1）求出$f'(x)$，结合题中定义验证即可；

（2）（i）分析可知，$a(x-1)\leq(x-1)^2+3$任意的$x\in[0,2]$恒成立．$x=1$时，可得$a\in\mathbf{R}$，$0\leq x<1$时，可得出$a\geq(x-1)+\frac{3}{x-1}$，$1<x\leq 2$时，可得出$a\leq(x-1)+\frac{3}{x-1}$，利用导数分析函数$F(x)=x-1+\frac{3}{x-1}$

千里之行 始于足下 更多资料请加 vx:18006193975

在区间$[0,1)$、$(1,2]$上的单调性，综合可得出实数a的取值范围；

（ii）由题意可得$\forall x\in[1,2]$，$g(x+2)\geq 3g'(x)=3(2x-a)\geq 3(2x-4)$．利用导数先证明：$\forall x\in[1,2]$，$3(2x-4)\geq 6(\ln x-1)$，即证$x-1-\ln x\geq 0$，构造函数$G(x)=x-1-\ln x$，利用导数分析函数$G(x)$在区间$[1,2]$上的单调性，求其最小值，即可证得结论成立.

【小问 1 详解】

因为$f(x)=\cos x$，则$f'(x)=-\sin x$，

因为$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$，$\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\cdot f'(x)=-\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\cdot\sin x$.

又$x\in[0,\pi]$，所以$\sin x\geq 0$，

所以$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\geq\left(\frac{\pi}{2}+1\right)f'(x)$对于任意$x\in[0,\pi]$恒成立.

故$f(x)=\cos x$是$[0,\pi]$上的“$M\left(\frac{\pi}{2}\right)$函数”.

【小问 2 详解】

（i）$g'(x)=2x-a$，

由条件得$(x+2)^2-a(x+2)\geq 3(2x-a)$对任意的$x\in[0,2]$恒成立，

即$a(x-1)\leq(x-1)^2+3$任意的$x\in[0,2]$恒成立.

①当$x=1$时，对一切$a\in\mathbf{R}$成立.

②当$0\leq x<1$时，$a\geq(x-1)+\frac{3}{x-1}$恒成立.

设$F(x)=x-1+\frac{3}{x-1}$，则$F'(x)=1-\frac{3}{(x-1)^2}<0$对任意的$x\in[0,1)$恒成立，

所以$F(x)$在$[0,1)$上单调递减，可得$a\geq F(x)_{\max}=F(0)=-4$.

③当$1<x\leq 2$时，由$a\leq(x-1)+\frac{3}{x-1}$恒成立.

设$F(x)=x-1+\frac{3}{x-1}$，则$F'(x)=1-\frac{3}{(x-1)^2}<0$，所以$F(x)$在$(1,2]$上单调递减，

千里之行 始于足下 更多资料请加 vx:18006193975

可得$a \le F(x)_{\min} = F(2) = 4$.

综上所述，a的范围是$[-4,4]$.

（ii）证明：由（i）知，$-4 \le a \le 4$.

对$\forall x \in [1,2]$，$g(x+2) \ge 3g'(x) = 3(2x-a) \ge 3(2x-4)$.

下面证：$\forall x \in [1,2]$，$3(2x-4) \ge 6(\ln x - 1)$，

即证$\forall x \in [1,2]$，$x - 1 - \ln x \ge 0$.

设$G(x) = x - 1 - \ln x$，则$G'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} \ge 0$，所以$G(x)$在$[1,2]$上单调递增，

又$G(1) = 0$，所以$G(x) \ge 0$成立.

所以$x \in [1,2]$时，不等式$3(2x-4) \ge 6(\ln x - 1)$成立.

所以$\forall x \in [1,2]$，$g(x+2) \ge 6(\ln x - 1)$成立.

【点睛】方法点睛：利用导数证明不等式问题，方法如下：

（1）直接构造函数法：证明不等式$f(x) > g(x)$（或$f(x) < g(x)$）转化为证明$f(x) - g(x) > 0$（或$f(x) - g(x) < 0$），进而构造辅助函数$h(x) = f(x) - g(x)$；

（2）适当放缩构造法：一是根据已知条件适当放缩；二是利用常见放缩结论；

（3）构造“形似”函数，稍作变形再构造，对原不等式同解变形，根据相似结构构造辅助函数.