

答案和解析

1. 【答案】C

【解析】解：由题意， $\frac{1+i}{z} = i$ ，解得 $z = \frac{1+i}{i} = 1 - i$ ，

$\therefore$ 复数 z 的共轭复数 $\bar{z} = 1 + i$ 。

故选C。

2. 【答案】C

【解析】解：向量 $\vec{a} = (1, 0)$ ， $\vec{b} = (x, 1)$ ，

则 $\vec{b} - 2\vec{a} = (x - 2, 1)$ ，

所以 $\vec{b} \cdot (\vec{b} - 2\vec{a}) = x(x - 2) + 1 \times 1 = 0$ ，

解得 $x = 1$

故选：C。

3. 【答案】B

【解析】【分析】本题考查计数原理的应用，考查排列的应用，属于基础题。

乙车与货车甲相邻停放，货车甲占两个车位，则乙车只能停在货车甲的两边，有2种停法；剩下三辆车在三个车位自由停放，利用分步乘法计数原理计算求得结果即可。

【解答】解：乙车与货车甲相邻停放，货车甲占两个车位，则乙车只能停在货车甲的两边，有2种停法；剩下三辆车在三个车位自由停放，有 A_3^3 种停法；

则共有 $2 \times A_3^3 = 12$ 种停法。

4. 【答案】B

【解析】解：因为 $S_{12} = 63 + S_3$ ， $a_3 + a_{12} = 12$ ，

$$\text{所以} \begin{cases} 12a_1 + \frac{12 \times 11}{2}d = 63 + (3a_1 + \frac{3 \times 2}{2}d), \\ a_1 + 2d + a_1 + 11d = 12 \end{cases}$$

解得 $d = 2$ ， $a_1 = -7$ 。

5. 【答案】D

【解析】解：函数 $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6}) - \cos x$ 可以化简为 $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{6})$ ，

由于 $f(x)$ 在区间 $[0, t]$ 上的最小值为 $-\frac{1}{2}$ ，因此 $x - \frac{\pi}{6}$ 的取值范围应包含 $-\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{7\pi}{6}$ ，

为了使 $f(x)$ 在区间 $[0, t]$ 上的最小值不小于 $-\frac{1}{2}$ ， $t - \frac{\pi}{6}$ 的最大值为 $\frac{7\pi}{6}$ ，解得 t 的最大值为 $\frac{4\pi}{3}$ ，

故选D。



6. 【答案】A

【解析】解：根据题意，圆 $C: (x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$ ，其圆心为 $C(-1, -1)$ ，半径 $r = 1$ ，

过点 P 作圆 $C: (x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$ 的切线 PA ，

则 $\angle PCA = 90^\circ$ ，

$$\text{则 } \cos \angle PCA = \frac{r}{|PC|} = \frac{1}{|PC|},$$

设圆心 C 到直线 l 的距离为 d ，

$$\text{则 } |PC| \geq d = \frac{|-1-1-2|}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{2},$$

$$\text{故 } \cos \angle PCA = \frac{1}{|PC|} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

所以 $\cos \angle PCA$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

故选A.

7. 【答案】D

【解析】解：根据题意，函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，则 $f(0) = 0$ ，

又由 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，且 $f(1) = 0$ ，

则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为增函数，且 $f(-1) = 0$ ，

则在区间 $(0, 1)$ 上， $f(x) < 0$ ，在区间 $(1, +\infty)$ 上， $f(x) > 0$ ，

在区间 $(-1, 0)$ 上， $f(x) > 0$ ，在区间 $(-\infty, -1)$ 上， $f(x) < 0$ ，

$$\text{不等式 } \frac{f(x)}{4^{x+1} - 17 \cdot 2^x + 4} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ 4^{x+1} - 17 \cdot 2^x + 4 > 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ 4^{x+1} - 17 \cdot 2^x + 4 < 0 \end{cases},$$

解得： $x > 2$ 或 $-2 < x \leq -1$ 或 $0 \leq x \leq 1$ ，

即不等式的解集为 $(-2, -1] \cup [0, 1] \cup (2, +\infty)$.

故选D.

8. 【答案】C

【解析】解：设直线 l 的方程为 $y = kx + m$ ，

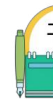
与双曲线的方程联立，得 $(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2a^2kmx - a^2m^2 - a^2b^2 = 0$ ，

设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{2a^2km}{b^2 - a^2k^2}, \quad x_1x_2 = \frac{a^2m^2 + a^2b^2}{a^2k^2 - b^2},$$

$\because OA \perp OB$,

$$\therefore x_1x_2 + y_1y_2 = 0,$$



$$\therefore x_1x_2 + (kx_1 + m)(kx_2 + m) = 0,$$

$$\therefore (1 + k^2)x_1x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2 = 0,$$

$$\therefore (1 + k^2) \cdot \frac{a^2m^2 + a^2b^2}{a^2k^2 - b^2} + km \cdot \frac{2a^2km}{b^2 - a^2k^2} + m^2 = 0,$$

$$\text{化简, 得 } m^2 = a^2k^2 + b^2,$$

$$\because \text{点 } O \text{ 到直线 } l \text{ 的距离不小于 } b,$$

$$\therefore \frac{|m|}{\sqrt{k^2 + 1}} \geq b,$$

$$\therefore m^2 \geq b^2(k^2 + 1),$$

$$\therefore a^2k^2 + b^2 \geq b^2(k^2 + 1),$$

$$\therefore k^2 \leq 1,$$

$$\therefore \frac{b^2}{a^2} \leq 1 + k^2 \leq 2,$$

$$\therefore e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} \leq 3,$$

$$\therefore e \leq \sqrt{3},$$

$$\because b > a,$$

$$\therefore e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} > 2,$$

$$\therefore e > \sqrt{2},$$

$$\therefore \text{双曲线离心率的取值范围是 } (\sqrt{2}, \sqrt{3}].$$

故选C.

9. 【答案】AC

【解析】解: $P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0 = \frac{1}{3}$, A 正确;

$$P(\bar{B}|A) = \frac{P(\bar{B}A)}{P(A)}, \text{ 又 } P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}, P(A) = \frac{1}{3}, \therefore P(\bar{B}|A) = \frac{1}{2}, B \text{ 错误};$$

$$P(AB) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}, P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}, C \text{ 正确};$$

$$\text{由题意 } P(A) = \frac{1}{3}, P(AB) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0 = \frac{1}{3},$$

$$P(AB) \neq P(A)P(B), \text{ 故 } A, B \text{ 不独立, } D \text{ 错误};$$

故选: AC.

10. 【答案】BCD

【解析】解：对于 A，连接 BC_1 ， A_1C_1 ，因为 E，F 分别是棱 BC， CC_1 的中点，所以 $EF \parallel BC_1$ ，所以直线 EF 与 A_1B 所成的角为 $\angle A_1BC_1$ ，因为几何体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，所以 $\triangle A_1BC_1$ 为等边三角形，所以 $\angle A_1BC_1 = \frac{\pi}{3}$ ，即直线 EF 与 A_1B 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$ ，故 A 错误；

对于 B，连接 AD_1 ， D_1F ，因为 $AD_1 \parallel EF$ ，所以平面 AEF 截正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 所得的截面为梯形 $AEFD_1$ ，因为 $AD_1 = 2\sqrt{6}$ ， $EF = \sqrt{6}$ ，梯形 $AEFD_1$ 的高为 $\sqrt{(\sqrt{15})^2 - (\frac{\sqrt{6}}{2})^2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$ ，所以梯形 $AEFD_1$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times$

$(2\sqrt{6} + \sqrt{6}) \times \frac{3\sqrt{6}}{2} = \frac{27}{2}$ ，故 B 正确。

对于 C，因为 $\overrightarrow{BP} = \cos^2 \theta \overrightarrow{BC} + \sin^2 \theta \overrightarrow{BB_1}$ 其中 $\theta \in R$ ，所以 $\overrightarrow{BP} = \cos^2 \theta \overrightarrow{BC} + \sin^2 \theta \overrightarrow{BB_1} = \cos^2 \theta \overrightarrow{BC} + (1 - \cos^2 \theta) \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BB_1} + \cos^2 \theta (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BB_1}) = \overrightarrow{BB_1} + \cos^2 \theta \overrightarrow{B_1C}$

所以 $\overrightarrow{B_1P} = \cos^2 \theta \overrightarrow{B_1C}$ ，所以 P 点在线段 B_1C 上， $V_{D-A_1C_1P} = V_{P-A_1C_1D}$ ，又因为 B_1C 与 A_1D 平行， $B_1C \not\subset$ 平面 A_1C_1D ， $A_1D \subset$ 平面 A_1C_1D ，所以 P 到平面 A_1C_1D 的距离为定值，三角形 A_1C_1D 的面积为定值，所以 $V_{P-A_1C_1D}$ 为定值。故 C 正确；

对于 D，因为 $\triangle B_1BC$ ， $\triangle B_1BA$ 是直角三角形，球面与这两个面的交线为以 B_1 为圆心，圆心角为 $\frac{\pi}{6}$ 以 4 为半径，的圆弧，其弧长为 $\frac{\pi}{6} \times 4 = \frac{2\pi}{3}$ ， $\triangle ABC$ 是直角三角形，球面与这个面的交线是以 B 为圆心，圆心角 $\frac{\pi}{2}$ ，半径为 2 的圆弧，其弧长为 $\frac{\pi}{2} \times 2 = \pi$ ， $\triangle AB_1C$ 是等边三角形，球面与这个面的交线是以 B_1 为圆心，圆心角 $\frac{\pi}{3}$ ，半径为 4 的圆弧，其弧长为 $\frac{\pi}{3} \times 4 = \frac{4\pi}{3}$ ，所以球面与三棱锥 $B_1 - ABC$ 表面的交线长为 $\frac{2\pi}{3} + \pi + \frac{4\pi}{3} = 3\pi$ 故 D 正确；

故选：BCD。

11. 【答案】ACD

【解析】解：对于选项 A：因为函数 $f(x+1) = f(x) - x$ ，

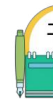
当 $0 < x \leq 1$ 时， $f(x) = \sqrt{x} - x + 1$ ，

当 $1 < x \leq 2$ 时， $f(x) = f(x-1) - (x-1) = \sqrt{x-1} - (x-1) + 1 - (x-1) = \sqrt{x-1} - 2x + 3$ ，

当 $2 < x \leq 3$ 时， $f(x) = f(x-1) - (x-1) = \sqrt{x-2} - 2(x-1) + 3 - (x-1) = \sqrt{x-2} - 3x + 6$ ，故 A 正确；

对于选项 C： $f(n) = f(n-1) - (n-1)$ ， $n \in N_+$ ，且 $f(1) = 1$ ，

则 $f(n) - f(n-1) = -(n-1)$ ， $f(n-1) - f(n-2) = -(n-2)$ ， $\dots$ ， $f(2) - f(1) = -1$ ，



累加可得:

$$f(n) - f(1) = -(n-1) - (n-2) - (n-3) - \cdots - 1 = -\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n-n^2}{2},$$

所以 $f(n) = \frac{2+n-n^2}{2}$, 故 C 正确;

对于选项 B: 由 A 选项的规律知, 当 $n-1 < x \leq n$ 时, $f(x) = \sqrt{x-n+1} - nx + \frac{n(n+1)}{2}$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-n+1}} - n,$$

令 $f'(x) > 0$, 解得 $n-1 < x < n-1 + \frac{1}{4n^2}$;

令 $f'(x) < 0$, 解得 $n-1 + \frac{1}{4n^2} < x < n$,

所以 $f(x)$ 在 $(n-1, n-1 + \frac{1}{4n^2})$ 内单调递增, 在 $(n-1 + \frac{1}{4n^2}, n)$ 内单调递减,

所以在 $x \in (n-1, n]$ 仅有一个极大值点 $x = n-1 + \frac{1}{4n^2}$,

列举几个极大值点 $\frac{1}{4}, \frac{17}{16}, \frac{73}{36}, \frac{193}{64}, \frac{401}{100}$,

取 $k = \frac{1}{5}$, $(k, k+1) = (\frac{1}{5}, \frac{6}{5})$, 然而 $\frac{1}{4}, \frac{17}{16} \in (\frac{1}{5}, \frac{6}{5})$,

即有两个极大值点, 故 B 错误;

对于选项 D: 若 $f(x)$ 在区间 $(0, k]$ 内有四个极大值点,

则 k 的取值范围为 $[\frac{193}{64}, \frac{401}{100})$, 故 D 正确.

故选 ACD.

12. 【答案】7

【解析】解: 因为第五项的二项式系数最大, 所以 $n = 8$,

故 $(\sqrt{x} - \frac{1}{2x})^n (n \in N^*)$ 的展开式通项为 $T_{r+1} = C_8^r (\sqrt{x})^{8-r} (-\frac{1}{2x})^r = (-\frac{1}{2})^r C_8^r x^{4-\frac{3}{2}r}$,

令 $4 - \frac{3}{2}r = 1$, 解得 $r = 2$,

所以展开式中 x 的系数为 $(-\frac{1}{2})^2 C_8^2 = 7$

13. 【答案】4048

【解析】解: 设数列的公比为 q , 由已知得 $q = \frac{a_{2025}}{a_{2024}} = 2$, $a_{2024} = 1 = a_1 \cdot 2^{2023}$, 则 $a_1 = \frac{1}{2^{2023}}$

由于 $\{a_n\}$ 是等比数列, 所以 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是首项为 $\frac{1}{a_1} = 2^{2023}$, 公比为 $\frac{1}{q} = \frac{1}{2}$ 的等比数列.

要使 $(a_1 - \frac{1}{a_1}) + (a_2 - \frac{1}{a_2}) + \cdots + (a_m - \frac{1}{a_m}) > 0$ 成立



则 $a_1 + a_2 + \cdots + a_m > \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_m}$,

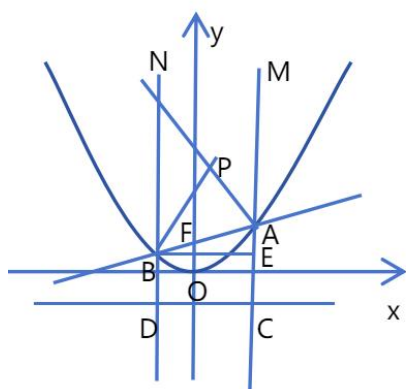
即 $\frac{a_1(1-2^m)}{1-2} > \frac{\frac{1}{a_1}(1-\frac{1}{2^m})}{1-\frac{1}{2}}$, 得 $2^m > \frac{2}{a_1^2} = 2^{4047}$

故最小正整数 $m = 4048$.

故答案为: 4048.

14. 【答案】 $8 + \frac{8\sqrt{3}}{3}$

【解析】解: 作出抛物线的准线 $l: y = -1$, 设 A 、 B 在 l 上的射影分别是 C 、 D , 连接 AC 、 BD , 过 B 作 $BE \perp AC$ 于 E ,



设 $BF = m$, 则 $BD = m$, $AF = AC = 3m$,

$\therefore \cos \angle BAE = \frac{AE}{AB} = \frac{2m}{4m} = \frac{1}{2}$, $\therefore \angle BAE = 60^\circ$, $\angle ABE = 30^\circ$

$\therefore$ 直线 AB 的倾斜角 30° ,

$\therefore$ 直线 l 的方程为: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$,

联立方程组 $\begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1 \\ x^2 = 4y \end{cases}$ 可得 $x^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}x - 4 = 0$,

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore |AB| = y_1 + y_2 + 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x_1 + x_2) + 4 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} + 4 = \frac{16}{3}$,

$\therefore \angle ABN$ 和 $\angle BAM$ 的平分线且相交于 P 点, $AM \parallel BN$,

$\therefore PA \perp PB$, $\angle PBA = \frac{1}{2} \angle NBA = 30^\circ$,

$\therefore |AP| = \frac{|AB|}{2} = \frac{8}{3}$, 则 $|BP| = |AP| \cdot \tan 60^\circ = \frac{8}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$,

所以 $\triangle PAB$ 的周长为: $PA + AB + PB = 8 + \frac{8\sqrt{3}}{3}$.



15. 【答案】解: (1)法 1:由余弦定理可知 $(3\sqrt{2})^2 = c^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot c \cdot \cos \frac{\pi}{3}$,

$$\therefore c^2 - 2\sqrt{3}c - 6 = 0,$$

$$\therefore c = \sqrt{3} \pm 3, \text{ 又 } c > 0,$$

$$\therefore c = \sqrt{3} + 3,$$

$$\text{由正弦定理知: } \frac{c}{\sin C} = \frac{3\sqrt{2}}{\sin \frac{\pi}{3}},$$

$$\sin C = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

$$\text{法 2:因 } AC = 2\sqrt{3}, \text{ 由正弦定理知: } \frac{AC}{\sin B} = \frac{3\sqrt{2}}{\sin \frac{\pi}{3}}, \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\because AC < BC, \therefore B < A = \frac{\pi}{3}, \therefore B = \frac{\pi}{4},$$

$$\sin C = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

(2)由条件知: 由余弦定理可知 $(3\sqrt{2})^2 = c^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \frac{\pi}{3}$,

$$18 = c^2 + b^2 - b \cdot c, 18 = (b + c)^2 - 3b \cdot c \text{ ①}$$

$$\because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \sin \angle BAD + \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AC \sin \angle DAC,$$

$$\frac{1}{2} \cdot bc \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore bc = b + c \text{ ②}$$

由①②得: $bc = 6$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

【解析】详细解答和解析过程见【答案】

16. 【答案】解: (1)取 PE 中点 G , 连接 GB , GF ,

$$\text{已知 } BC // ED, BC = \frac{1}{2}ED$$

$$\text{在 } \triangle PED \text{ 中, } GF // ED, GF = \frac{1}{2}ED \quad \} \Rightarrow GF // BC, GF = BC,$$

$$FC \not\subset \text{面 } PBE$$

$$\Rightarrow \text{四边形 } BCFG \text{ 为平行四边形} \Rightarrow FC // GB \quad \} \Rightarrow FC // \text{面 } PBE.$$

$$GB \subset \text{面 } PBE$$

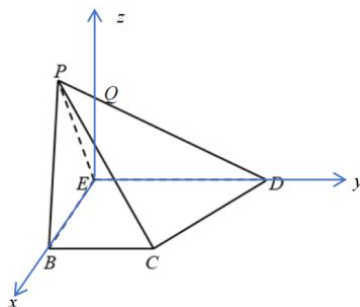
$$(2) BE \perp AD \Rightarrow BE \perp PE \text{ 且 } BE \perp ED \Rightarrow \begin{matrix} BE \subset \text{面 } BCDE \\ BE \perp \text{面 } PDE \end{matrix} \Rightarrow \text{面 } PDE \perp \text{面 } BCDE,$$

在平面 PDE 内，过点 E 作 $EQ \perp ED$ 交 PD 于点 Q ，

$DE = \text{面} PDE \cap \text{面} BCDE$ ，

$\therefore EQ \perp \text{面} BCDE$ ，

以 $\{\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EQ}\}$ 为正交基底建立如图坐标系，



$$P(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), D(0, 2, 0),$$

$$\therefore F(0, \frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}), B(1, 0, 0), C(1, 1, 0),$$

$$\overrightarrow{PC} = (1, \frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}), \overrightarrow{BC} = (0, 1, 0), \overrightarrow{BF} = (-1, \frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}),$$

设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 为面 BCF 的法向量，

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BF} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -x + \frac{\sqrt{3}}{4}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = (\sqrt{3}, 0, 4),$$

$$|\cos(\vec{n}, \overrightarrow{PC})| = |\frac{-\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{19}}| = \frac{\sqrt{57}}{38},$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{57}}{38}.$$

【解析】详细解答和解析过程见【答案】

17. 【答案】解：(1) 记“获得 a 元开幕式门票”为事件 A ，“获得 b 元开幕式门票”为事件 B ，“获得开幕式门票”为事件 C ，

$$\text{则 } P(A) = 0.2, P(B) = 0.3, P(\bar{A}) = 0.8,$$

$$P(C) = P(A) + P(\bar{A}B) = P(A) + P(\bar{A})P(B) = 0.2 + 0.8 \times 0.3 = 0.44 = \frac{11}{25},$$

$\therefore$ 这个人可以获得亚运会开幕式门票的概率为 0.44；

$$(2) X \in \{0, 1, 2, 3\},$$

$$P(X = 0) = (1 - 0.44) \times 0.5 \times 0.5 = 0.14 = \frac{7}{50}.$$

$$P(X = 1) = (1 - 0.44) \times 0.5 \times 0.5 \times 2 + 0.44 \times 0.5 \times 0.5 = 0.39 = \frac{39}{100},$$

$$P(X=2) = (1-0.44) \times 0.5 \times 0.5 + 0.44 \times 0.5 \times 0.5 \times 2 = 0.36 = \frac{9}{25},$$

$$P(X=3) = 0.44 \times 0.5 \times 0.5 = 0.11 = \frac{11}{100},$$

X	0	1	2	3
P	0.14	0.39	0.36	0.11

$$E(X) = 0 \times 0.14 + 1 \times 0.39 + 2 \times 0.36 + 3 \times 0.11 = 1.44 = \frac{36}{25}.$$

【解析】详细解答和解析过程见【答案】

18. 【答案】解：(1)当 $k=0$ 时， $f(x) = 3x - 2\sin x$,

因为 $f'(x) = 3 - 2\cos x$ ，所以切线的斜率为 $f'(\frac{\pi}{2}) = 3$ ，又因为切点为 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi - 2)$ ，

所以曲线 $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程为 $y = 3x - 2$ ，

(2)当 $k=1$ 时， $f(x) = 3x - 2\sin x - \ln x$ ，则 $f'(x) = 3 - 2\cos x - \frac{1}{x}$ ，

当 $x \geq 1$ 时， $f'(x) \geq 2 - 2\cos x \geq 0$ ，

故 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增，不存在极值点；

当 $0 < x < 1$ 时， $f'(x) = 3 - 2\cos x - \frac{1}{x}$ ，令 $p(x) = f'(x) = 3 - 2\cos x - \frac{1}{x}$ ，

则 $p'(x) = 2\sin x + \frac{1}{x^2} > 0$ 总成立，

故函数 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，且 $f'(1) = 2 - 2\cos 1 > 0$ ， $f'(\frac{1}{3}) = -2\cos \frac{1}{3} < 0$ ，

所以存在唯一 $x_0 \in (\frac{1}{3}, 1)$ ，使得 $f'(x_0) = 0$ ，

所以当 $0 < x < x_0$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减；当 $x_0 < x < 1$ 时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增；

故在 $(0,1)$ 上存在唯一极小值点，

综上，当 $k=1$ 时，函数 $f(x)$ 的极值点有且仅有一个。

(3)令 $e^{t_1} = x_1$ ， $e^{t_2} = x_2$ 。

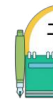
由 $f(x_1) = f(x_2)$ 知， $3x_1 - 2\sin x_1 - k\ln x_1 = 3x_2 - 2\sin x_2 - k\ln x_2$ ，

整理得， $3(x_1 - x_2) - 2(\sin x_1 - \sin x_2) = k(\ln x_1 - \ln x_2)(*)$ ，

不妨令 $g(x) = x - \sin x (x > 0)$ ，则 $g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ ，故 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

当 $0 < x_1 < x_2$ 时，有 $g(x_1) < g(x_2)$ ，即 $x_1 - \sin x_1 < x_2 - \sin x_2$ ，

那么 $\sin x_1 - \sin x_2 > x_1 - x_2$ ，



因此, (*) 即转化为 $k > \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2}$,

接下来证明 $\frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} > \sqrt{x_1 x_2} (0 < x_1 < x_2)$, 等价于证明 $\ln \frac{x_1}{x_2} > \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} - \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}$,

即 $\ln \frac{x_1}{x_2} - \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} + \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}} > 0$, 所以不妨令 $\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} = m (0 < m < 1)$,

建构新函数 $\varphi(m) = 2 \ln m - m + \frac{1}{m}$, $\varphi'(m) = \frac{2}{m} - 1 - \frac{1}{m^2} = \frac{-(m-1)^2}{m^2} < 0$,

则 $\varphi(m)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

所以 $\varphi(m) > \varphi(1) = 0$,

故 $\ln \frac{x_1}{x_2} > \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} - \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}$, 即 $\frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} > \sqrt{x_1 x_2} (0 < x_1 < x_2)$ 得证,

由不等式的传递性知 $\sqrt{x_1 x_2} < k$, 即 $x_1 x_2 < k^2$, 即 $e^{t_1} \cdot e^{t_2} < k^2$,

所以 $e^{t_1 + t_2} < k^2$, 得证 $t_1 + t_2 < 2 \ln k$.

【解析】详细解答和解析过程见【答案】

19. 【答案】解: (1) 设 $Q(x, y)$, $P(x_0, y_0)$, 则 $M(x_0, 0)$, $N(0, y_0)$,

由题意知 $|MN| = 4$, 所以 $\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{MN}$, 得 $(x_0 - x, -y) = (-x_0, y_0)$, 所以 $\begin{cases} x_0 = \frac{x}{2} \\ y_0 = -y \end{cases}$,

因为 $x_0^2 + y_0^2 = 4$, 得 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, 故曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 设直线 $l: y = kx + m$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

联立方程组 $\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = kx + m \end{cases}$, 消去 y 得 $(1 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 16 = 0$,

所以 $x_1 + x_2 = \frac{-8km}{1 + 4k^2}$, $x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 16}{1 + 4k^2}$,

$\Delta = 64k^2 m^2 - 4(1 + 4k^2)(4m^2 - 16) = 16(16k^2 + 4 - m) > 0$,

又 $T(-4, 0)$, 所以 $k_{AT} + k_{BT} = \frac{y_1}{x_1 + 4} + \frac{y_2}{x_2 + 4} = \frac{kx_1 + m}{x_1 + 4} + \frac{kx_2 + m}{x_2 + 4} = \frac{(kx_1 + m)(x_2 + 4) + (kx_2 + m)(x_1 + 4)}{(x_1 + 4)(x_2 + 4)} =$

$\frac{2kx_1 x_2 + (4k + m)(x_1 + x_2) + 8m}{x_1 x_2 + 4(x_1 + x_2) + 16} = \frac{2k \frac{4m^2 - 16}{1 + 4k^2} + (4k + m) \frac{(-8km)}{1 + 4k^2} + 8m}{\frac{4m^2 - 16}{1 + 4k^2} + 4 \frac{(-8km)}{1 + 4k^2} + 16} = \frac{2m - 8k}{m^2 - 8km + 16k^2} = -\frac{1}{2}$,

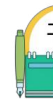
化简得, $m^2 - 8km + 16k^2 + 4m - 16k = 0$, 即 $(m - 4k)^2 + 4(m - 4k) = 0$,

解得 $m = 4k$ 或 $m = 4k - 4$,

当 $m = 4k$ 时, 直线 l 过定点 $(-4, 0)$ 与点 T 重合, 舍去,

当 $m = 4k - 4$ 时, 直线 l 过定点 $(-4, -4)$.

(3) 设直线 $l: x = ty + 2\sqrt{3}$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 联立方程组 $\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ x = ty + 2\sqrt{3} \end{cases}$,



消去 x 得, $t^2y^2 + 4\sqrt{3}ty - 4 = 0$,

所以 $y_1 + y_2 = \frac{-4\sqrt{3}t}{t^2+4}$ ①, $y_1y_2 = \frac{-4}{t^2+4}$ ②,

由 $\overrightarrow{QB} = \lambda \overrightarrow{QA}$ 得 $y_2 = -\lambda y_1$ ③,

由 ①③ 可得, $y_1 = \frac{4\sqrt{3}t}{(t^2+4)(\lambda-1)}$, $y_2 = \frac{-4\sqrt{3}\lambda t}{(t^2+4)(\lambda-1)}$,

代入 ② 化简得, $12\lambda t^2 = (t^2 + 4)(\lambda - 1)^2$,

即 $\frac{12t^2}{t^2+4} = \frac{(\lambda-1)^2}{\lambda} = \frac{\lambda^2-2\lambda+1}{\lambda} = \lambda + \frac{1}{\lambda} - 2$,

由 $\lambda \in [2, 3]$ 得 $\lambda + \frac{1}{\lambda} - 2 \in [\frac{1}{2}, \frac{4}{3}]$,

即 $\frac{12t^2}{t^2+4} \in [\frac{1}{2}, \frac{4}{3}]$, 解得 $\frac{1}{t^2} \in [2, \frac{23}{4}]$,

即 $\frac{1}{t} \in [-\frac{\sqrt{23}}{2}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \frac{\sqrt{23}}{2}]$,

从而直线 l 在 y 轴上的截距为 $\frac{-2\sqrt{3}}{t} \in [-\sqrt{69}, -2\sqrt{6}] \cup [2\sqrt{6}, \sqrt{69}]$.

【解析】 详细解答和解析过程见 **【答案】**