江苏省南通市海安市2025届高三下学期期初学业质量监测数学试题❖

一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合$M=\{-1,0,1,3\}$，集合$N=\{x|x^2\geq 2x\}$，则$M\cap N=$（　　）

A. $\{3\}$　　B. $\{0,3\}$　　C. $\{-1,0\}$　　D. $\{-1,0,3\}$

【答案】D

【解析】

【分析】解一元二次不等式，再根据集合的交集的定义计算即可.

【详解】解：$x^2\geq 2x$，得，$x\leq 0$，或$x\geq 2$；

$\therefore N=\{x|x\leq 0,或x\geq 2\}$，又$M=\{-1,0,1,3\}$，

$\therefore M\cap N=\{-1,0,3\}$.

故选：D.

2. 已知复数z满足$z-1=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，则$z=$（　　）

A. $1-\mathrm{i}$　　B. $1+\mathrm{i}$　　C. $-1+\mathrm{i}$　　D. $-1-\mathrm{i}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据复数的四则运算求解即可.

【详解】因为$z-1=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，

所以$z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}+1=\dfrac{(1-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}+1=-\mathrm{i}+1$.

故选：A.

3. 已知数列$\{a_n\}$为等比数列，$a_1=512$，公比$q=\dfrac{1}{4}$，则数列$\{a_n\}$的前n项积T_n最大时，$n=$（　　）

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

【答案】B

【解析】

【分析】根据条件得到$a_n=\dfrac{512}{4^{n-1}}$，从而有$1\leq n\leq 5$时，$a_n>1$，$n\geq 6$时，$0<a_n<1$，即可求解.

【详解】因为$a_1=512$，公比$q=\frac{1}{4}$，则$a_n=512\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{512}{4^{n-1}}$，

所以当$1\le n\le 5$时，$a_n>1$；当$n\ge 6$时，$0<a_n<1$，

又T_n是数列$\{a_n\}$的前n项积，则当$n=5$时，T_n取得最大值，

故选：B.

4. 已知钝角x满足：$\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\cos 2x$，则$\sin 2x=$（　　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{3}{4}$　　D. $\frac{3}{4}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用两角差的正弦公式，结合x为钝角，可求得$\cos x+\sin x=\frac{1}{2}$或$\cos x-\sin x=0$，进而两边平方可求得$\sin 2x$.

【详解】由$\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\cos 2x$，得$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=\sqrt{2}(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)$，

$\because x$为钝角，则$\cos x\langle 0,\sin x\rangle 0$，则$\cos x-\sin x<0$，

$\therefore \cos x+\sin x=\frac{1}{2}$或$\cos x-\sin x=0$(舍)，

$\therefore 1+2\sin x\cos x=\frac{1}{4}$，得$2\sin x\cos x=-\frac{3}{4}$，

即$\sin 2x=-\frac{3}{4}$.

故选：C.

5. 已知非零向量$\vec{b}$在向量$\vec{a}$上的投影向量为$\frac{1}{2}\vec{a}$，$|\vec{a}|=2$，则$(\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{a}=$（　　）

A. -2　　B. 2　　C. -1　　D. $-\frac{1}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】利用投影向量的意义及数量积的运算律求解即得.

【详解】由非零向量$\vec{b}$在向量$\vec{a}$上的投影向量为$\frac{1}{2}\vec{a}$，得$\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{a}$，则$\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}=\frac{1}{2}$，而$|\vec{a}|=2$，

因此$\vec{b}\cdot\vec{a}=2$，所以$(\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}^2=2-2^2=-2$.

故选：A

6. 为推广新能源汽车，某地区决定对续航里程达到一定标准的新能源汽车进行补贴.已知某品牌新能源汽车的续航里程ξ(单位： km) 服从正态分布 $N\left(400,50^2\right)$. 补贴政策为：续航里程不低于 350km 的车辆补贴 2 万元，超过 450km 的车辆额外再补贴 1 万元，则该品牌每辆新能源汽车的平均补贴金额约为（　　）附：若 $X\sim N\left(\mu,\ \sigma^2\right)$，则 $P\left(\left|X-\mu\right|\le\sigma\right)\approx 0.6826$).

A. 1.52 万元　　B. 1.68 万元　　C. 1.84 万元　　D. 2.16 万元

【答案】C

【解析】

【分析】根据正态分布分别求出$350\le\xi\le450$和$\xi>450$时的概率，再根据数序期望公式求解.

【详解】由题意，得$P\left(350\le\xi\le450\right)\approx0.6826$，

$P(\xi>450)=0.5-P(400<\xi<450)\approx0.5-\dfrac{0.6826}{2}=0.1587$ ，

则该品牌每辆新能源汽车的平均补贴金额约为$0.6826\times2+0.1587\times3\approx1.84$万元.

故答案为：C

7. 已知函数 $f\left(x\right)=x(x-a)^2$ 的极大值为$\dfrac{1}{2}$，则 $a=$（　　）

A. $-\dfrac{3}{2}$　　B. $-\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{3}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】借助导数，判定函数单调性，再结合极大值为$\dfrac{1}{2}$，求a，验证即可.

【详解】解：由题意，$f\left(x\right)=x(x-a)^2=x^3-2ax^2+a^2x$，

则 $f'\left(x\right)=3x^2-4ax+a^2=\left(3x-a\right)\left(x-a\right)$，

令 $f'\left(x\right)=0$，解得 $x=\dfrac{a}{3}$ 或 $x=a$，

当$a>0$时，$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,\dfrac{a}{3}\right)$，$\left(a,+\infty\right)$上满足$f'\left(x\right)>0$，$f\left(x\right)$单调递增，

在$\left(\dfrac{a}{3},a\right)$上满足$f'\left(x\right)<0$，$f\left(x\right)$单调递减，

所以$f\left(x\right)$在$x=\dfrac{a}{3}$处取得极大值，$f\left(\dfrac{a}{3}\right)=\dfrac{a}{3}(\dfrac{a}{3}-a)^2=\dfrac{4a^3}{27}=\dfrac{1}{2}$，解得$a=\dfrac{3}{2}$，

当 $a<0$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,a\right)$，$\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$ 上满足 $f'\left(x\right)>0$，$f\left(x\right)$ 单调递增，

在 $\left(a,\frac{a}{3}\right)$ 上满足 $f'\left(x\right)<0$，$f\left(x\right)$ 单调递减，

所以 $f\left(x\right)$ 在 $x=a$ 处取得极大值，$f\left(a\right)=0\neq\frac{1}{2}$，不符合题意，

当 $a=0$ 时，$f'\left(x\right)=3x^2\geq0$，$f\left(x\right)$ 在 R 上单调递增，无极值，不符合题意，

综上所述，$a=\frac{3}{2}$.

故选：D.

8. 设圆 $O:x^2+y^2=2$ 上两点 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$ 满足 $y_1-y_2=x_1-x_2-4$，则 $\left|AB\right|=$（　　）

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】设 $A\left(\sqrt{2}\cos\alpha,\sqrt{2}\sin\alpha\right)$，$B\left(\sqrt{2}\cos\beta,\sqrt{2}\sin\beta\right)$，得 $\sqrt{2}\sin\alpha-\sqrt{2}\sin\beta=\sqrt{2}\cos\alpha-\sqrt{2}\cos\beta-4$，利用三角恒等变换可得 $2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-2\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=-4$，结合三角函数值的有界性，可得 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-1$，$\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=1$，进而计算可求解.

【详解】设 $x_1=\sqrt{2}\cos\alpha,y_1=\sqrt{2}\sin\alpha$，$x_2=\sqrt{2}\cos\beta,y_2=\sqrt{2}\sin\beta$，$\alpha\in\left[0,2\pi\right),\beta\in\left[0,2\pi\right)$，

由 $y_1-y_2=x_1-x_2-4$，

可得 $\sqrt{2}\sin\alpha-\sqrt{2}\sin\beta=\sqrt{2}\cos\alpha-\sqrt{2}\cos\beta-4$，

即 $\sqrt{2}\sin\alpha-\sqrt{2}\cos\alpha-\left(\sqrt{2}\sin\beta-\sqrt{2}\cos\beta\right)=-4$，

即 $2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-2\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=-4$，

因为 $-1\leq\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\leq1,-1\leq\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)\leq1$，

所以 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-1$，$\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=1$，

又$-\frac{\pi}{4}\le\alpha-\frac{\pi}{4}<\frac{7\pi}{4},-\frac{\pi}{4}\le\beta-\frac{\pi}{4}<\frac{7\pi}{4}$,

所以$\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$，$\beta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$,

即$\alpha=\frac{7\pi}{4}$，$\beta=\frac{3\pi}{4}$,

所以$A(1,-1)$，$B(-1,1)$,

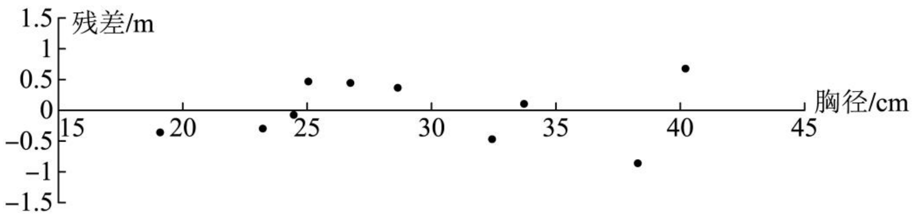
所以$|AB|=\sqrt{(1+1)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{2}$.

故选：D.

【点睛】关键点点睛：关键在于利用三角代换，结合三角函数的有界性求解.

二、多选题：本题共 3 小题，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 为研究某种树的树高和胸径的关系，某人随机测量了 10 棵该品种树的胸径x(单位：cm)和树高y(单位：m)的数据$(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,10)$，已知其中一组数据为$(38.4,23.7)$，且$\sum_{i=1}^{10}x_i=291.6$，求得回归方程为$\hat{y}=0.25x+15$，并绘制了如下残差图，则（　　）



A. 由残差图可判定树高与胸径的关系符合上述回归模型

B. 该种树的平均树高约为22.29m

C. 数据$(38.4,23.7)$对应的残差为-0.9

D. 删除一组数据$(38.4,23.7)$后，重新求得的回归直线的斜率变小

【答案】ABC

【解析】

【分析】对于 A：分析残差图判断模型拟合程度，且集中在 0 附近，所以由残差图可判定树高与胸径的关系符合上述回归模型，判定的即可；对于 B：根据回归方程经过样本中心，代入计算即可；对于 C：运用残差概念，计算残差即可；对于 D：分析删除一组数据对回归直线斜率的影响即可.

【详解】解：对于 A：分析残差图判断模型拟合程度，由残差图可知，残差分布比较均匀，且集中在 0 附近，所以由残差图可判定树高与胸径的关系符合上述回归模型，选项 A 正确；

对于 B：已知 $\sum_{i=1}^{10} x_i = 291.6$，则样本中心点的横坐标 $\overline{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{291.6}{10} = 29.16$，将 $\overline{x} = 29.16$ 代入回归方程 $\hat{y} = 0.25x + 15$，可得 $\overline{y} = 0.25 \times 29.16 + 15 = 7.29 + 15 = 22.29$，所以该种树的平均树高约为 $22.29m$，选项 B 正确；

对于 C：计算数据 $(38.4, 23.7)$ 对应的残差，当 $x = 38.4$ 时，$\hat{y} = 0.25 \times 38.4 + 15 = 9.6 + 15 = 24.6$，残差为 $y - \hat{y} = 23.7 - 24.6 = -0.9$，选项 C 正确；

对于 D：分析删除一组数据对回归直线斜率的影响，删除数据 $(38.4, 23.7)$ 后，因为 38.4 大于样本中心点的横坐标 29.16，且 23.7 小于通过回归方程计算出的 38.4 对应的预测值 24.6，所以删除该点后，样本中心点向左下方移动，重新求得的回归直线的斜率变大，选项 D 错误.

故选：ABC.

10. 已知函数 $f(x) = \sin x(1 - \cos x)$，则（　　）

A. $f(x)$ 的零点为 $2k\pi (k \in Z)$

B. $f(x)$ 在 $[-\pi，\pi]$ 上的最大值与最小值之和为 0

C. 直线 $x = \pi$ 是 $f(x)$ 的图象的一条对称轴

D. 0 是函数 $y = xf(x)$ 的极小值点

【答案】BD

【解析】

【分析】令 $f(x) = 0$ 可判断 A；由 $f(x)$ 为奇函数可判断 B；由对称性的性质计算 $f(\pi + x) \neq f(\pi - x)$ 可判断 C；对 $y = xf(x)$ 求导，求出函数的单调性，由极小值点的定义可判断 D.

【详解】解：对于 A，函数 $f(x)$ 的零点即 $f(x) = \sin x(1 - \cos x) = 0$ 时 x 的值，

因为 $\sin x(1 - \cos x) = 0$，则 $\sin x = 0$ 或 $1 - \cos x = 0$，

当 $\sin x = 0$ 时，$x = k\pi$，$k \in Z$;

当 $1 - \cos x = 0$，即 $\cos x = 1$ 时，$x = 2k\pi$，$k \in Z$，

所以 $f(x)$ 的零点为 $k\pi$，$k \in Z$，A 选项错误；

对于 B，因为 $f(-x) = -\sin x(1 - \cos x) = -f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，

所以 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的最大值与最小值之和为 0，B 选项正确；

对于 C，$f(\pi+x)=\sin(\pi+x)[1-\cos(\pi+x)]=-\sin x(1+\cos x)$，

$f(\pi-x)=\sin(\pi-x)[1-\cos(\pi-x)]=\sin x(1+\cos x)$，

$f(\pi+x)\neq f(\pi-x)$，所以直线 $x=\pi$ 不是 $f(x)$ 的图象的一条对称轴，C 选项错误；

对于 D，令 $g(x)=xf(x)=x\sin x(1-\cos x)$，

则 $g'(x)=(\sin x+x\cos x)(1-\cos x)+x\sin^2 x$，

当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 时，$\sin x+x\cos x<0$，$x\sin^2 x<0$，

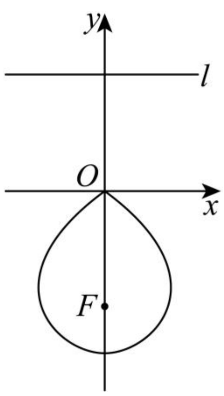
所以 $g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

又 $g(x)=xf(x)$ 为偶函数，所以 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$g(x)$ 单调递增，

所以 0 是函数 $y=xf(x)$ 的极小值点，D 选项正确.

故选：BD.

11. 如图所示的曲线 C 过原点 O，且 C 上的任意一点到定点 $F(0,t)$ 的距离与到直线 $l: y=2$ 的距离之积为 4，则（　　）



A. $t=-2$

B. C 恰好经过 3 个整点（即横、纵坐标均为整数的点）

C. C 上存在两点关于直线 $y=x-2$ 对称

D. C 与圆 $x^2+(y+2)^2=1$ 交点的个数为 2

【答案】ABD

【解析】

【分析】设曲线 C 上任意一点 $P\left(x,y\right)$，由两点间距离公式得到曲线 C 的方程.对于 A：根据曲线 C 过原点 $O\left(0,0\right)$ 运算求解即可；对于 B：分析可知曲线 C 中 $y\in\left[-2\sqrt{2},0\right]$，代入检验即可得结果；对于 C：假设 C 上存在两点关于直线 $y=x-2$ 对称，平移图象可得 $\left(x^2+y^2\right)(y-4)^2=16$，分析可知 $y=8-x$ 与曲线 $\left(x^2+y^2\right)(y-4)^2=16$ 不相交；对于 D：联立方程运算求解即可.

【详解】设曲线 C 上任意一点 $P\left(x,y\right)$，由图可知 $y\le 0$，

根据两点间距离公式点 $P\left(x,y\right)$ 到定点 $F\left(0,t\right)$ 的距离为 $\sqrt{x^2+(y-t)^2}$；

根据点到直线的距离公式，点 $P\left(x,y\right)$ 到直线 $l:y=2$ 的距离为 $\left|y-2\right|$.

已知曲线 C 上的任意一点到定点 $F\left(0,t\right)$ 的距离与到直线 $l:y=2$ 的距离之积为 4，

则可得 $\sqrt{x^2+(y-t)^2}\cdot\left|y-2\right|=4$ 两边平方可得 $\left[x^2+\left(y-t\right)^2\right](y-2)^2=16$.

对于选项 A：因为曲线 C 过原点 $O\left(0,0\right)$，将原点坐标代入上式可得 $4t^2=16$，解得 $t=\pm2$.

当 $t=2$ 时，由图可知显然不满足 C 上的任意一点到定点 $F\left(0,t\right)$ 的距离与到直线 $l:y=2$ 的距离之积为 4，舍去，

故 $t=-2$，故选项 A 正确；

对于选项 B：当 $t=-2$ 时，$\left[x^2+\left(y+2\right)^2\right](y-2)^2=16$，

令 $x=0$，解得 $y=0$ 或 $y=-2\sqrt{2}$，所以曲线 C 中 $y\in\left[-2\sqrt{2},0\right]$，

当 $y=0$ 时，$x=0$；当 $y=-1$ 时，$x=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{3}$（不是整数）；当 $y=-2$ 时，$x=\pm1$，

所以曲线 C 恰好经过 $\left(0,0\right)$，$\left(1,-2\right)$，$\left(-1,-2\right)$ 三个整点，故选项 B 正确；

对于选项 C：假设 C 上存在两点关于直线 $y=x-2$ 对称，

则将曲线 C 上移 2 个单位长度的曲线 C' 上存在两点关于直线 $y=x$ 对称，

易知曲线 C' 的方程为 $\left(x^2+y^2\right)(y-4)^2=16$，

设曲线 C' 上关于直线 $y=x$ 对称的两点为 $A\left(x_0,y_0\right)$，$B\left(y_0,x_0\right)$，且 $x_0\ne y_0$，

则有 $\left(x_0^2+y_0^2\right)(y_0-4)^2=16$，$\left(y_0^2+x_0^2\right)(x_0-4)^2=16$，可得 $y_0=8-x_0$，

联立方程$\begin{cases} y=8-x \\ (x^2+y^2)(y-4)^2=16 \end{cases}$，消去$x$整理可得$\left[(y-4)^2+8\right]^2=72$，

又因为$y\in\left[-2\sqrt{2}+2,2\right]$，则$\left[(y-4)^2+8\right]^2\ge\left[(2-4)^2+8\right]^2\ge112$，

可知方程$\left[(y-4)^2+4\right]^2=72$无解，

即$y=8-x$与曲线$(x^2+y^2)(y-4)^2=16$不相交，故假设不成立，故选项C错误；

对于选项D，将$x^2+(y+2)^2=1$代入到曲线C的方程$\left[x^2+(y+2)^2\right](y-2)^2=16$中，

得$(y-2)^2=16$，解得$y=6$或$y=-2$，

由圆的方程的纵坐标$y\in[-3,-1]$，所以$y=6$舍去，

将$y=-2$代入$\left[x^2+(y+2)^2\right](y-2)^2=16$得$x=\pm1$，所以交点坐标为$(1,-2)$，$(-1,-2)$，

此时这两点的坐标也满足圆的方程，所以曲线与圆共有两个交点，选项D正确.

故选：ABD.

【点睛】关键点点睛：本题的关键是由两点间距离公式推导出方程，再根据方程研究曲线的性质.

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12. 今有2只红球、3只黄球，同色球不加以区分，将这5只球排成一列，有______种不同的方法（用数字作答）.

【答案】10

【解析】

【分析】由分步计数原理可分两步完成，第一步：在5个不同位置中选2个位置排红球， 第二步：在剩下的3个不同位置排黄球，再运算即可得解.

【详解】分两步完成，

第一步：在5个不同位置中选2个位置排红球，共C_5^2种排法，

第二步：在剩下的3个不同位置排黄球，共C_3^3种排法，

故将这5只球排成一列，有$C_5^2\cdot C_3^3=10$种不同的方法,

故答案为：10.

13. 已知$f(x)$是$\{x\,|\,x\neq0\}$上的奇函数，当$x>0$时，$f(x)=\ln x$，过原点O作两条互相垂直的直线，其中一条与$f(x)$的图象相切于点A，C，另一条与$f(x)$的图象相交于点B，D，则四边形$ABCD$的面积为__________.

【答案】$2\left(e+\frac{1}{e}\right)$

【解析】

【分析】设切点坐标为$\left(x_0, \ln x_0\right)$，求导，则切线的斜率为$k=\frac{1}{x_0}$，求出切线方程. 代入$(0,0)$，可得$x_0=e$，从而得到两条切线方程分别为$y=\frac{1}{e}x$，$y=-ex$. 直曲联立，可得$A$，$B$，根据$f(x)$是奇函数，得到$C, D$. 运用两点间距离公式得到$|AC|,|BD|$，得到四边形的面积.

【详解】解：设切点坐标为$\left(x_0, \ln x_0\right)$，

因为$x>0$时，$f(x)=\ln x$，所以$f'(x)=\frac{1}{x}$，

则切线的斜率为$k=\frac{1}{x_0}$，则切线方程为$y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}\left(x-x_0\right)$，

代入$(0,0)$，可得$x_0=e$，此时切线的斜率为$\frac{1}{e}$，另一条切线的斜率为$-e$，

两条切线方程分别为$y=\frac{1}{e}x$，$y=-ex$，可得交点坐标为$(0,0)$，

联立$\begin{cases} y=\frac{1}{e}x \\ y=\ln x \end{cases}$，可得$A(e,1)$，联立$\begin{cases} y=-ex \\ y=\ln(-x) \end{cases}$，可得$B\left(-\frac{1}{e},1\right)$，

因为$f(x)$是$\{x \mid x \neq 0\}$上的奇函数，则$C(-e,-1)$，$D\left(\frac{1}{e},-1\right)$，

所以$|AC|=\sqrt{(e+e)^2+2^2}=2\sqrt{e^2+1}$，$|BD|=\sqrt{\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{e}\right)^2+2^2}=2\sqrt{\left(\frac{1}{e^2}+1\right)}$，

$\therefore$ 四边形的面积为$\frac{1}{2}|AC||BD|\frac{1}{2}\times 2\sqrt{e^2+1}\times 2\sqrt{\frac{1}{e^2}+1}=2\left(e+\frac{1}{e}\right)$.

故答案为：$2\left(e+\frac{1}{e}\right)$.

14. 将棱长为 1 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$沿对角面A_1BCD_1，B_1BDD_1，A_1B_1CD同时切开后，共得到__________个多面体，其中一个多面体的体积为__________（只需写出一种结果）.

【答案】 ①. 8 ②. $\frac{1}{12}$（或$\frac{1}{4}$,答案不唯一）

【解析】

【分析】对于第一空，分情况讨论分成的部分，得到总的多面体个数；对于第二空，正方体棱长为 1，通过正方体体积和切割后多面体的体积关系，求出其中一个多面体体积即可.

【详解】(1) 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 被三个对角面 A_1BCD_1、B_1BDD_1、A_1B_1CD 切割.

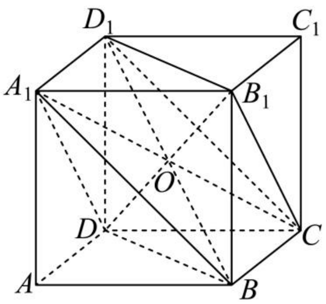
每个对角面都会将正方体分成两个部分，但是这些部分会相互重叠.

具体来说：

1. 第一个对角面 A_1BCD_1 将正方体分成两个部分，

2. 第二个对角面 B_1BDD_1 进一步将每个部分分成两个，总共分成四个部分，

3. 第三个对角面 A_1B_1CD 会再次将每个部分分成两个，但由于之前的切割，最终会得到 8 个多面体. 分别是三棱锥 $O-A_1D_1D$,三棱锥 $O-B_1BC$,三棱锥 $O-CD_1D$,三棱锥 $O-A_1B_1B$,三棱锥 $O-BCD$,三棱锥 $O-A_1D_1B_1$,六面体 $OB_1D_1CC_1$,六面体 OA_1BDA .



(2) 设正方体棱长为 1，截面 A_1B_1CD 将正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 分成体积相等的两部分，不妨保留三棱柱 $A_1D_1D-B_1C_1C$，截面 A_1BCD_1 将三棱柱 $A_1D_1D-B_1C_1C$ 分成三棱锥 $C-A_1D_1D$ 和四棱锥 $C-A_1B_1C_1D_1$，它们的体积分别是 $\frac{1}{6}$ 和 $\frac{1}{3}$，于是，保留四棱锥 $C-A_1B_1C_1D_1$，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的截面 A_1BCD_1 上，A_1C 与 BD_1 相交于 O，则截面 B_1BDD_1 将四棱锥 $C-A_1B_1C_1D_1$ 分成三棱锥 $O-A_1B_1D_1$ 及多面体 $OC-B_1C_1D_1$，O 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的中心，于是，三棱锥 $O-A_1B_1D_1$ 的体积为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$，则多面体 $O-B_1C_1D_1$ 的体积为 $\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$，所以其中一个多面体的体积为 $\frac{1}{12}$ 或 $\frac{1}{4}$.

故答案为：8；$\frac{1}{12}$(或$\frac{1}{4}$，答案不唯一).

四、解答题：本题共5小题，共60分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15. 在$\triangle ABC$中，记a，b，c分别为角A，B，C的对边.已知$\dfrac{a}{2\cos A}=\dfrac{b}{3\cos B}$.

（1）若$C=\dfrac{\pi}{4}$，求$\tan A$;

（2）若$b=\sqrt{2}a$，求C.

【答案】（1）$\tan A=2$；

（2）$C=\dfrac{3\pi}{4}$.

【解析】

【分析】（1）由正弦定理得，边角互化得到$3\tan A=2\tan B$，算出$\tan C=1$，得到$\tan(A+B)=-1$，运用和角正切计算出$\tan A$即可；（2）由余弦定理边角互化得到$5a^2-5b^2=-c^2$，结合条件得到$\cos C$，算出$C=\dfrac{3\pi}{4}$.

【小问1详解】

因为$\dfrac{a}{2\cos A}=\dfrac{b}{3\cos B}$，所以由正弦定理得，$\dfrac{\sin A}{2\cos A}=\dfrac{\sin B}{3\cos B}$，即$3\tan A=2\tan B$，

因为$C=\dfrac{\pi}{4}$，所以$\tan C=1$，即$\tan\left[\pi-(A+B)\right]=1$，所以$\tan(A+B)=-1$，即$\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-1$，

所以$3\tan^2 A-5\tan A-2=0$，解得$\tan A=2$或$\tan A=-\dfrac{1}{3}$，

因为$3\tan A=2\tan B$，所以$\tan A$，$\tan B$同为正数，所以$\tan A=-\dfrac{1}{3}$不符合题意，故$\tan A=2$；

【小问2详解】

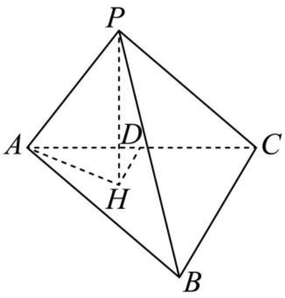
因为$\dfrac{a}{2\cos A}=\dfrac{b}{3\cos B}$，所以由余弦定理得，$\dfrac{a}{2\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}=\dfrac{b}{3\times\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}$，

整理得，$3\left(a^2+c^2-b^2\right)=2\left(b^2+c^2-a^2\right)$，即$5a^2-5b^2=-c^2$，

又因为$b=\sqrt{2}a$，所以$c=\sqrt{5}a$，所以由余弦定理得，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{a^2+2a^2-5a^2}{2\sqrt{2}a^2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

又因为$0<C<\pi$，所以$C=\dfrac{3\pi}{4}$.

16. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=PC$，$AC\perp BC$，$PH\perp$平面 ABC，H 为垂足，D 为 AC 的中点.



（1）证明：$DH//$平面 PBC;

（2）若 $AC=2$，$\angle PAH=\angle CAH=45^{\circ}$，求二面角 $P-BC-A$ 的正弦值.

【答案】（1）证明见解析

（2）$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

【解析】

【分析】(1)连接 PD，三线合一得到 $AC\perp PD$；又因为 $PH\perp$平面 ABC，得到 $PH\perp AC$；进而得到 $AC\perp$平面 PHD，运用线面垂直性质得到 $AC\perp DH$；进而得到 $DH//BC$；最终运用线面平行判定定理得到 $DH//$平面 PBC；(2)如图，过点 H 作 $HQ\perp BC$ 于点 Q，连接 PQ，证明 $\angle PQH$ 为二面角 $P-BC-A$ 的平面角，借助三角函数得到二面角 $P-BC-A$ 的正弦值.

【小问 1 详解】

证明：连接 PD，因为 $PA=PC$，D 为 AC 的中点，所以 $AC\perp PD$；

又因为 $PH\perp$平面 ABC，$AC\subset$平面 ABC，所以 $PH\perp AC$；

又因为 PD，$PH\subset$平面 PHD，$PD\cap PH=P$，所以 $AC\perp$平面 PHD，

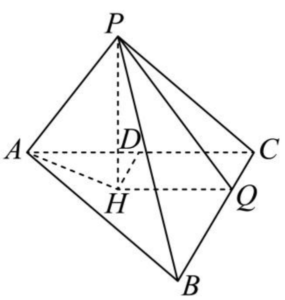
又 $DH\subset$平面 PHD，所以 $AC\perp DH$；

因为 $AC\perp BC$，且 HD，BC 均在平面 ABC 内，所以 $DH//BC$；

因为 $BC\subset$平面 PBC，$DH\not\subset$平面 PBC，所以 $DH//$平面 PBC；

【小问 2 详解】

如图，过点 H 作 $HQ\perp BC$ 于点 Q，连接 PQ，



因为 $PH\perp$ 平面 ABC， $BC\subset$ 平面 ABC，

所以 $PH\perp BC$，

又 $HQ\perp BC$， $HQ\cap PH=H$， HQ， $PH\subset$ 平面 PHQ，

所以 $BC\perp$ 平面 PHQ，

又 $PQ\subset$ 平面 PHQ，

所以 $PQ\perp BC$，所以 $\angle PQH$ 为二面角 $P-BC-A$ 的平面角，

因为 $AC=2$， $\angle PAH=\angle CAH=45^\circ$，所以 $PH=AH=\sqrt{2}AD=\sqrt{2}$， $HQ=DC=1$，

所以 $PQ=\sqrt{3}$，所以 $\sin\angle PQH=\dfrac{PH}{PQ}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

所以二面角 $P-BC-A$ 的正弦值为 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$.

17. 一批产品共 16 件，有 2 件不合格品，随机分装到两只箱中，每箱 8 件.收货方不放回地随机抽取产品进行检验，并按以下规则判断是否接收这批产品：如果抽检的第 1 件产品不合格，则拒收整批产品;如果抽检的第 1 件产品合格，则从另一箱中再抽检 1 件，若合格，则接收整批产品，否则拒收整批产品.

（1）求 2 件不合格品包装在同一只箱中的概率;

（2）求这批产品被拒收的概率.

【答案】（1） $\dfrac{7}{15}$；

（2） $\dfrac{29}{120}$.

【解析】

【分析】（1）先求出 16 件产品随机分装到两只箱中和 2 件不合格品包装在同一只箱中的方法数，再根据古典概型求概率；

（2）分 2 件不合格品包装在同一只箱中和 2 件不合格品包装在两只箱中两种情况，结合条件概率分别求出概率，再根据互斥事件的概率加法公式求解即可.

【小问 1 详解】

记 $A=$“2 件不合格品包装在同一只箱中”，

因为 16 件产品随机分装到两只箱中有 $\dfrac{C_{16}^{8}C_{8}^{8}}{A_{2}^{2}}$ 种，

其中 2 件不合格品包装在同一只箱中有 $C_{2}^{2}C_{14}^{6}$ 种，

所以 $P(A)=\dfrac{C_2^2C_{14}^6}{\dfrac{C_{16}^8C_8^8}{A_2^2}}=\dfrac{7}{15}$，即 2 件不合格品包装在同一只箱中的概率为 $\dfrac{7}{15}$；

【小问 2 详解】

由（1）知，$P(A)=\dfrac{7}{15}$，$P(\bar{A})=\dfrac{8}{15}$，

记 $B=$“产品被拒收”，$C=$“第 1 次抽到不合格品”，$D=$“第 2 次抽到不合格品”，

①若 2 件不合格品包装在同一只箱中，

则 $P(C)=0$，$P(\bar{C}D)=P(\bar{C})P(D\mid\bar{C})=(1-0)\times\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$；

或 $P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(\bar{C}D)=P(\bar{C})P(D\mid\bar{C})=\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\times 0=0)$.

所以 $P(B\mid A)=P(C)+P(\bar{C}D)=\dfrac{1}{2}\times\left(0+\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{4}+0\right)=\dfrac{1}{4}$，

所以 $P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\dfrac{7}{15}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{60}$；

②若 2 件不合格品包装在两只箱中，

则 $P(C)=\dfrac{1}{8}$，$P(\bar{C}D)=P(\bar{C})P(D\mid\bar{C})=\left(1-\dfrac{1}{8}\right)\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{64}$，

所以 $P(B\mid\bar{A})=P(C)+P(\bar{C}D)=\dfrac{1}{8}+\dfrac{7}{64}=\dfrac{15}{64}$，

所以 $P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B\mid\bar{A})=\dfrac{8}{15}\times\dfrac{15}{64}=\dfrac{1}{8}$，

由①②得，$P(B)=P(AB+\bar{A}B)=P(AB)+P(\bar{A}B)=\dfrac{7}{60}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{29}{120}$，

即这批产品被拒收的概率为 $\dfrac{29}{120}$.

18. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知双曲线 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 2，左、右顶点分别为 A，B，且 $|AB|=2$.

（1）求 Γ 的方程;

（2）直线 l 与 Γ 的左、右两支分别交于点 C，D，记直线 BC，BD 的斜率分别为 k_1，k_2，且 $\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}=-1$.

（i）求证：直线 l 过定点;

（ii）$P(-1,2)$，直线 OP 与 BD 交于点 Q，判断并证明直线 AQ 与 BC 的位置关系.

【答案】（1） $x^2-\frac{y^2}{3}=1$；

（2）（i）证明见解析；（ii） $AQ//BC$.

【解析】

【分析】（1）由已知可得 $\frac{c}{a}=2$， $2a=2$，可求得双曲线方程；

（2）（i）设直线 l 的方程为 $y=kx+m$， $C(x_1,y_1)$， $D(x_2,y_2)$，与双曲线联立方程组，由根与系数的关系可得 $x_1+x_2=-\frac{2km}{k^2-3}$， $x_1x_2=\frac{m^2+3}{k^2-3}$，结合已知可得 $m=-k$ 或 $m=k+2$，可得定点坐标；（ii）直线 AQ 与直线 BC 的位置关系是平行，理由如下：求得点 Q 的坐标，进而可得直线 AQ 的斜率，结合已知，可证结论.

【小问 1 详解】

设双曲线 Γ 的焦距为 $2c$，则 $\frac{c}{a}=2$，且 $2a=2$，解得 $a=1$， $c=2$，

所以 $b^2=c^2-a^2=3$，所以 Γ 的方程为： $x^2-\frac{y^2}{3}=1$；

【小问 2 详解】

（i）设直线 l 的方程为 $y=kx+m$， $C(x_1,y_1)$， $D(x_2,y_2)$， $B(1,0)$，

联立 $y=kx+m$ 与 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$，消去 y，得 $(3-k^2)x^2-2kmx-(m^2+3)=0$，

所以 $x_1+x_2=-\frac{2km}{k^2-3}$， $x_1x_2=\frac{m^2+3}{k^2-3}$，

由 $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=-1$，得 $\frac{x_1-1}{y_1}+\frac{x_2-1}{y_2}=\frac{x_1-1}{kx_1+m}+\frac{x_2-1}{kx_2+m}=-1$，

整理得 $(k^2+2k)x_1x_2+(m-k+km)(x_1+x_2)-2m+m^2=0$，

所以 $(k^2+2k)\frac{m^2+3}{k^2-3}-(m-k+km)\frac{2km}{k^2-3}-2m+m^2=0$，

整理得 $(k+m)(k-m+2)=0$，所以 $m=-k$ 或 $m=k+2$，

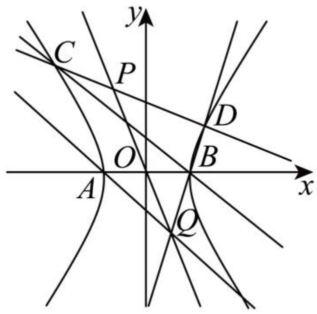
当 $m=-k$ 时，直线 l 的方程为 $y=kx-k$，过点 $B(1,0)$，不符，故舍去；当 $m=k+2$ 时，直线 l 的方程

为 $y=k\left(x+1\right)+2$，过点 $\left(-1,2\right)$，

所以直线 l 过定点 $\left(-1,2\right)$；

（ii）直线 AQ 与直线 BC 的位置关系是平行，理由如下：

因为 $P\left(-1,2\right)$，所以直线 OP 方程为：$y=-2x$，



又直线 BD 方程为：$y=k_2\left(x-1\right)$，联立 $y=-2x$ 与 $y=k_2\left(x-1\right)$，

解得 $x=\dfrac{k_2}{k_2+2}$，$y=-2\dfrac{k_2}{k_2+2}$，即 $Q\left(\dfrac{k_2}{k_2+2},-2\dfrac{k_2}{k_2+2}\right)$，

因为 $A\left(-1,0\right)$，所以直线 AQ 的斜率为 $\dfrac{-2\dfrac{k_2}{k_2+2}}{\dfrac{k_2}{k_2+2}+1}=-\dfrac{k_2}{k_2+1}$，由 $\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}=-1$，

得直线 BD 的斜率 $k_1=-\dfrac{k_2}{k_2+1}$，所以 $AQ//BC$.

19. 已知曲线 $C_1: y=\ln x+a$，$C_2: y^2=2px(y\geq 0, p>0)$.

（1）若 $a=2$，C_1 与 C_2 在公共点处的切线重合，求 p；

（2）若 C_1 与 C_2 相交于 A，B(A 在 B 的左侧) 两点，记直线 AB 的斜率为 k.

（i）求证：$0<k<\dfrac{p}{2}$；

（ii）若 $p=2$，设 $C\left(c,0\right)\left(c\leq 3\right)$，证明：$|AC|<|BC|$.

【答案】（1）$p=2$.

（2）（i）证明见解析；（ii）证明见解析

【解析】

【分析】（1）设 x_0 为公共点的横坐标，可得 $\dfrac{1}{x_0}=\dfrac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x_0}}$，且 $\ln x_0+2=\sqrt{2px_0}$，计算求解即可；

（2）法一：（i）分析可知只需证 $y_1+y_2>4$，由已知可得 $y_1-y_2=2\ln\dfrac{y_1}{y_2}$，令 $\dfrac{y_1}{y_2}=t$，则 $t\in(0,1)$，进而可得 $(t+1)\ln t-2(t-1)<0(0<t<1)$. 构造函数, 记 $p(t)=(t+1)\ln t-2(t-1)(0<t<1)$，求导，可证结论.（ii）分析可知只需证明 $y_1^2+y_2^2>8$. 由（i）分析可得 $\ln t<\dfrac{\sqrt{2}(t-1)}{\sqrt{t^2+1}}(0<t<1)$，构造函数证明即可.

法二：（i）由题意，$\ln x_1+a=\sqrt{2p}\sqrt{x_1}$，$\ln x_2+a=\sqrt{2p}\sqrt{x_2}$，两式作差可得 $\dfrac{\ln\sqrt{x_2}-\ln\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}}=\dfrac{\sqrt{2p}}{2}.k=\dfrac{\sqrt{2p}}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}>0$，证明 $\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}}>\dfrac{2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$ 即可；（ii）证明 $|CA|^2-|CB|^2<0$ 即可.

【小问 1 详解】

若 $a=2$，则 $C_1: y=\ln x+2$，$C_2: y=\sqrt{2px}(y\geq 0, p>0)$.

因为 C_1 与 C_2 在公共点处的切线重合，不妨设 x_0 为公共点的横坐标，则 $\dfrac{1}{x_0}=\dfrac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x_0}}$，且 $\ln x_0+2=\sqrt{2px_0}$，

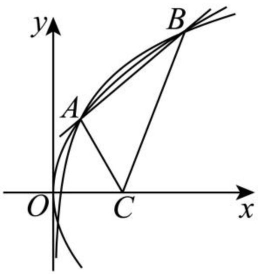
所以 $px_0=2$，于是 $\ln x_0=0$，解得 $x_0=1$，所以 $p=2$.

【小问 2 详解】

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，其中 $0<x_1<x_2$.

（i）由 $y=\sqrt{2px}(y\geq 0, p>0)$ 为增函数，知 $y_1<y_2$，所以 $k>0$.

法 1：则 $k<\dfrac{p}{2}\Leftrightarrow\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}<\dfrac{p}{2}\Leftrightarrow\dfrac{y_1-y_2}{\dfrac{y_1^2-y_2^2}{2p}}<\dfrac{p}{2}\Leftrightarrow\dfrac{2p}{y_1+y_2}\dfrac{p}{2}\Leftrightarrow y_1+y_2 4.(*)$



依题意，有 $y_1=\ln x_1+a=\ln\dfrac{y_1^2}{2p}+a$，且 $y_2=\ln x_2+a=\ln\dfrac{y_2^2}{2p}+a$，

两式相减，得 $y_1-y_2=2\ln\dfrac{y_1}{y_2}$.

令 $\frac{y_1}{y_2}=t$，则 $t\in(0,1)$，且 $y_1-y_2=2\ln t$，解得 $y_2=\frac{2\ln t}{t-1}$， $y_1=\frac{2t\ln t}{t-1}$，

所以 $(*)\Leftrightarrow\frac{2(t+1)\ln t}{t-1}>4(0<t<1)\Leftrightarrow(t+1)\ln t-2(t-1)<0(0<t<1).(\#)$

记 $p(t)=(t+1)\ln t-2(t-1)(0<t<1)$，则 $p'(t)=\ln t+\frac{1}{t}-1$，

令 $\varphi(t)=\ln t+\frac{1}{t}-1$，求导得 $\varphi'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}<0$，

故 $p'(t)$ 单调递减，故 $p'(t)>p'(1)=0$，所以 $p(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

故 $p(t)<p(1)=0$，所以 $(\#)$ 式成立，从而 $(*)$ 式成立，所以 $0<k<\frac{p}{2}$.

（ii）若 $p=2$， $C(c,0)(c\le 3)$，则 $|AC|<|BC|\Leftrightarrow(x_1-c)^2+y_1^2<(x_2-c)^2+y_2^2$

$\Leftrightarrow(x_1+x_2-2c)(x_1-x_2)+y_1^2-y_2^2<0\Leftrightarrow\left(\frac{y_1^2}{4}+\frac{y_2^2}{4}-2c\right)\left(\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_2^2}{4}\right)+y_1^2-y_2^2<0$

$\Leftrightarrow(y_1^2+y_2^2-8c)(y_1^2-y_2^2)+16(y_1^2-y_2^2)<0\Leftrightarrow(y_1^2-y_2^2)(y_1^2+y_2^2-8c+16)0\Leftrightarrow y_1^2+y_2^2 8(c-2).$

因为 $c\le 3$，故只需证明 $y_1^2+y_2^2>8$.

由（i）知，只需证 $\frac{(t^2+1)\ln^2 t}{(t-1)^2}>2(0<t<1)$，即要证 $\ln t<\frac{\sqrt{2}(t-1)}{\sqrt{t^2+1}}(0<t<1).(**)$

记 $q(t)=\ln t-\frac{\sqrt{2}(t-1)}{\sqrt{t^2+1}}(0<t<1)$，则 $q'(t)=\frac{1}{t}-\frac{\sqrt{2}[\sqrt{t^2+1}-(t-1)\cdot\frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}}{t^2+1}=\frac{1}{t}-\frac{\frac{\sqrt{2}(t+1)}{\sqrt{t^2+1}}}{t^2+1}$.

因为 $(t+1)^2<2(t^2+1)$，所以 $t+1<\sqrt{2}\cdot\sqrt{t^2+1}$，所以 $\frac{\sqrt{2}(t+1)}{\sqrt{t^2+1}}<2.$

所以 $q'(t)>\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2+1}=\frac{(t-1)^2}{t(t^2+1)}>0$，故 $q(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

所以 $q(t)<q(1)=0$，所以 $(**)$ 式成立，所以 $|AC|<|BC|$.

法 2：（i）由题意， $\ln x_1+a=\sqrt{2p}\sqrt{x_1}$， $\ln x_2+a=\sqrt{2p}\sqrt{x_2}$，

两式作差得， $\ln x_2-\ln x_1=\sqrt{2p}\left(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}\right)$，

即 $\frac{\ln\sqrt{x_2}-\ln\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}}=\frac{\sqrt{2p}}{2}$.

又$k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{\sqrt{2p}\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)}{x_1-x_2}=\dfrac{\sqrt{2p}}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}>0$，且$\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}}=\dfrac{\sqrt{2p}}{2}>\dfrac{2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$，

则$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}>\dfrac{4}{\sqrt{2p}}$，

所以$k=\dfrac{\sqrt{2p}}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}<\dfrac{\sqrt{2p}\cdot\sqrt{2p}}{4}=\dfrac{p}{2}$.

下证：$\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}}>\dfrac{2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$，即证：$\ln x_2-\ln x_1>\dfrac{2\left(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}\right)}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$，即证：$\ln\dfrac{x_2}{x_1}>\dfrac{2\left(\sqrt{\dfrac{x_2}{x_1}}-1\right)}{\sqrt{\dfrac{x_2}{x_1}}+1}$.

不妨设$t=\dfrac{x_2}{x_1}$，$t>1$，即证：$\ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$.

记$h(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}$，$t>1$，则$h'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t\cdot(t+1)^2}>0$，

所以$h(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增，所以$h(t)h(1)=0$，所以$\ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1}$，故$0<k<\dfrac{p}{2}$.

（ii）依题意，$|CA|^2=(x_1-c)^2+y_1^2=(x_1-c)^2+4x_1=x_1^2+(4-2c)x_1+c^2$，

同理可得，$|CB|^2=x_2^2+(4-2c)x_2+c^2$，

所以$|CA|^2-|CB|^2=\left(x_1^2-x_2^2\right)+(4-2c)(x_1-x_2)=(x_1+x_2+4-2c)(x_1-x_2)$，

由（i）知，$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}>\dfrac{4}{\sqrt{2p}}=2$.

又$x_1+x_2-\dfrac{(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})^2}{2}=\dfrac{(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})^2}{2}>0$，所以$x_1+x_2>\dfrac{(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})^2}{2}>2$，

所以$x_1+x_2+4-2c>6-2c\geq 0$，

又$x_1<x_2$，故$x_1-x_2<0$，所以$|CA|^2-|CB|^2<0$，所以$|CA|<|CB|$.

【点睛】方法点睛：利用导数解决不等式问题的主要方法就是构造函数，通过研究函数的性质进而解决不等式问题.