鄂南高中 黄冈中学 黄石二中 荆州中学 龙泉中学 武汉二中 孝感高中 襄阳四中 襄阳五中 宜昌一中 夷陵中学 2025 届高三湖北省十一校第一次联考 数学试题

(考试时间:120 分钟 试卷满分:150 分)

命题学校:黄冈中学 命题教师:李钢锋 蔡盛 陈晓浩 审题学校:荆州中学

注意事项:

1. 答题前， 先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上， 并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.

2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 $2\mathbf{B}$ 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

3. 非选择题的作答:用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内.写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

一、选择题: 本题共 8 小题， 每小题 5 分， 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中， 只有一项是 符合题目要求的.

1. 若集合 $A=\{-1,-2,-3\}$， $B=\{x+y\mid x\in A，y\in A\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{-2\}$　　B. $\{-3\}$

C. $\{-2,-3\}$　　D. $\{-1,-2,-3\}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用集合交集的知识求解即可.

【详解】$B=\{x+y\mid x\in A，y\in A\}=\{-2,-3,-4,-5,-6\}$，则 $A\cap B=\{-2,-3\}$.

故选：C.

2. 若复数 z 满足 $\dfrac{z+1-\mathrm{i}}{z}=1+2\mathrm{i}$，则 $z=$（　　）

A. $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　　B. $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　　C. $-1+\mathrm{i}$　　D. $-1-\mathrm{i}$

【答案】A

【解析】

【分析】由复数的运算化简即可；

【详解】由 $\dfrac{z+1-i}{z}=1+2\mathrm{i}$ ，则 $\dfrac{1-i}{z}=2\mathrm{i}$ ，即 $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}\cdot(1-\mathrm{i})}{2\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}=\dfrac{1+\mathrm{i}}{-2}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

故选：A.

3. 已知非零向量 $\vec{a}=(0,t)$，$\vec{b}=(1,-4)$，若向量 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影向量为 $2\vec{a}$，则 $t=$（　　）

A. -2　　B. -4　　C. 2　　D. 4

【答案】A

【解析】

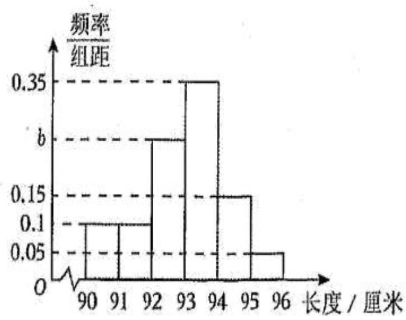
【分析】利用投影向量的定义可得 $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}\cdot\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=2\vec{a}$，代入坐标计算可求得 t.

【详解】向量 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影向量为 $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}\cdot\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{-4t}{|t|}\cdot\dfrac{\vec{a}}{|t|}=\dfrac{-4t}{|t|^2}\vec{a}=\dfrac{-4}{t}\vec{a}=2\vec{a}$,

所以 $\dfrac{-4}{t}=2$，解得 $t=-2$.

故选：A.

4. 某工厂生产了 500 件产品，质检人员测量其长度 (单位: 厘米)，将测量数据分成 6 组， 整理得到如图所示的频率分布直方图. 如果要让 90% 的产品长度不超过 a 厘米，根据直方图估计，下列最接近 a 的数是（　　）



A. 93.5　　B. 94.1

C. 94.7　　D. 95.5

【答案】C

【解析】

【详解】根据给定的频率分布直方图，结合第 90 百分位数求出 a.

【解答】观察频率分布直方图，得 $1-0.05\times1=0.95,1-(0.05+0.15)\times1=0.80,0.80<0.9<0.95$,

则 $a\in(94,95)$，$(a-94)\times0.15+0.8=0.9$，所以 $a=94.67$，与 94.67 最接近的数为 94.7 .

故选：C

5. 下列选项中，与 $\tan 55°$ 不相等的是（　　）

A. $\dfrac{1+\sin 20°}{\cos 20°}$　　B. $-\tan 125°$　　C. $\dfrac{1}{\tan 35°}$　　D. $\dfrac{1-\tan 10°}{1+\tan 10°}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据正余弦的二倍角公式，弦化切，正切的和角公式可判断 A；根据正切的诱导公式可判断 BC，根据正切的和角公式可判断 D.

【详解】$\dfrac{1+\sin 20°}{\cos 20°}=\dfrac{(\sin 10°+\cos 10°)^2}{(\cos 10°-\sin 10°)(\cos 10°+\sin 10°)}=\dfrac{\sin 10°+\cos 10°}{\cos 10°-\sin 10°}=\dfrac{\tan 10°+1}{1-\tan 10°}=\tan(45°+10°)=\tan 55^{\circ}$，故 A 正确；

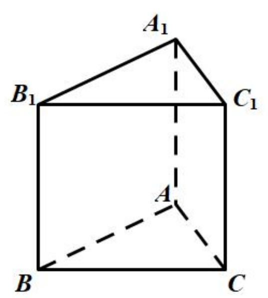
$-\tan 125^{\circ}=\tan(180°-125^{\circ})=\tan 55°$，故 B 正确；

$\dfrac{1}{\tan 35^{\circ}}=\tan(90°-35°)=\tan 55°$，故 C 正确；

$\dfrac{1-\tan 10°}{1+\tan 10°}=\tan(45°-10°)=\tan 35°$，故 D 错误.

故选：D

6. 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AC=2$，$\angle BAC=\dfrac{2\pi}{3}$，$C$ 点到直线 A_1B_1 的距离为 $\sqrt{7}$，则三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球表面积为（　　）

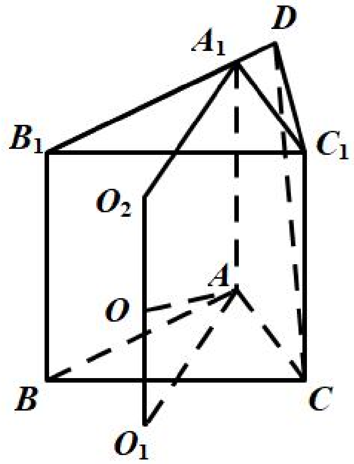


A. 12π　　B. 16π　　C. 20π　　D. 24π

【答案】C

【解析】

【分析】根据点到直线的距离可得三棱柱的高，确定外接球球心，结合勾股定理可得外接球半径与外接球表面积.

【详解】

过点C作$CD\perp A_1B_1$于点D，连接C_1D，

因为三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$为直三棱柱，

$\therefore CC_1\perp$平面$A_1B_1C_1$，

又$\because A_1B_1\subset$平面$A_1B_1C_1$，

$\therefore CC_1\perp A_1B_1$，

$\because \boldsymbol{CC_1}$，$CD\subset$，平面$CC_1D$，且$CC_1\cap CD=C$，

$\therefore A_1B_1\perp$平面CC_1D，

$\because C_1D\subset$平面CC_1D，

$\therefore A_1B_1\perp C_1D$，

易知$\angle B_1A_1C_1=\angle BAC=\dfrac{2\pi}{3}$，$A_1B_1=A_1C_1=AB=AC=2$，

$\therefore C_1D=\sqrt{3}$，$BC=2\sqrt{3}$，

$\therefore CD=\sqrt{CC_1^2+C_1D^2}=\sqrt{CC_1^2+3}=\sqrt{7}$，

则$CC_1=2$，

设$\triangledown ABC$外接圆圆心为O_1，$\triangle A_1B_1C_1$外接圆圆心为O_2，

则$2O_1A=\dfrac{BC}{\sin\angle\dfrac{2\pi}{3}}=4$，即$O_1A=2$，

且三棱柱外接球球心O为OO_1中点，

则外接球半径 $R=OA=\sqrt{O_1A^2+\left(\frac{1}{2}OO_1\right)^2}=\sqrt{5}$，

表面积为 $4\pi R^2=20\pi$，

故选：C.

7. 蒙日是法国著名的数学家，他首先发现椭圆的两条相互垂直的切线的交点的轨迹是圆，这个圆被称为“蒙日圆”.已知椭圆 $C:\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{3}=1$ 的焦点在 x 轴上，A,B 为椭圆上任意两点，动点 P 在直线 $x-\sqrt{2}y-6=0$ 上.若 $\angle APB$ 恒为锐角，根据蒙日圆的相关知识得椭圆 C 的离心率的取值范围为（　　）

A. $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$　　B. $\left(0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$　　C. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$　　D. $\left(\frac{\sqrt{6}}{3},1\right)$

【答案】B

【解析】

【分析】根据蒙日圆定义求得椭圆 C 的蒙日圆方程，根据 $\angle APB$ 为锐角可知直线 $x-\sqrt{2}y-6=0$ 与蒙日圆相离，根据直线与圆位置关系可求得 m 范围，进而得到离心率的取值范围.

【详解】$\because$ 椭圆 C 的焦点在 x 轴上，$\therefore m>3$，

$\because$ 直线 $x=\pm\sqrt{m}$，$y=\pm\sqrt{3}$ 与椭圆 C 都相切，

$\therefore x=\pm\sqrt{m}$，$y=\pm\sqrt{3}$ 所围成矩形的外接圆 $x^2+y^2=3+m$ 即为椭圆 $C:\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{3}=1$ 的蒙日圆，

$\because A,B$ 为椭圆 $C:\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{3}=1$ 上任意两个动点，动点 P 满足 $\angle APB$ 为锐角，

$\therefore$ 点 P 在圆 $x^2+y^2=3+m$ 外，又动点 P 在直线 $x-\sqrt{2}y-6=0$ 上，$\therefore$ 直线 $x-\sqrt{2}y-6=0$ 与圆 $x^2+y^2=3+m$ 相离，$\therefore \frac{|-6|}{\sqrt{1+2}}>\sqrt{3+m}$，解得：$m<9$，

又 $m>3$，$\therefore 3<m<9$；

$\because$ 椭圆 C 离心率 $e=\sqrt{\frac{m-3}{m}}=\sqrt{1-\frac{3}{m}}$，$\frac{3}{m}\in\left(\frac{1}{3},1\right)$，$\therefore e\in\left(0,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

故选：B.

8. 已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$g'(x)$ 是 $g(x)$ 的导数，且 $f(x)+g'(x)=5$，

$f(x-1)+g'(5-x)=5$，若 $g(x)$ 为偶函数，则 $\sum_{k=1}^{15} f(k)=$（　）

A. 80　　B. 75　　C. 70　　D. 65

【答案】B

【解析】

【分析】根据偶函数的定义结合导数可得 $g'(x)=-g'(-x)$，结合题意可得 $f(x)=f(4-x)$，$f(x)+f(x+4)=10$，进而可得 $f(x)=f(x+8)$，且 $f(0)=5$，即可得结果.

【详解】因为 $g(x)$ 为偶函数，则 $g(x)=g(-x)$，求导可得 $g'(x)=-g'(-x)$，

因为 $f(x)+g'(x)=5$，$f(x-1)+g'(5-x)=5$，

则 $f(4-x)+g'(x)=5$，可得 $f(x)=f(4-x)$，

且 $f(x-1)-g'(x-5)=5$，则 $f(x+4)-g'(x)=5$，可得 $f(x)+f(x+4)=10$，

即 $f(x+4)+f(x+8)=10$，可得 $f(x)=f(x+8)$，可知 8 为 $f(x)$ 的一个周期，

且 $\sum_{k=1}^{8} f(k)=[f(1)+f(5)]+[f(2)+f(6)]+[f(3)+f(7)]+[f(4)+f(8)]=40$，

对于 $f(x)=f(4-x)$，$f(x)+f(x+4)=10$，

令 $x=0$，可得 $f(0)=f(4)$，$f(0)+f(4)=10$，可得 $f(0)=f(4)=5$，

所以 $\sum_{k=1}^{15} f(k)=\sum_{k=0}^{15} f(k)-f(0)=2\sum_{k=1}^{8} f(k)-5=75$.

故选：B.

【点睛】方法点睛：函数的性质主要是函数的奇偶性、单调性和周期性以及函数图象的对称性，在解题中根据问题的条件通过变换函数的解析式或者已知的函数关系，推证函数的性质，根据函数的性质解决问题.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $f(x)=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$，下列说法正确的是（　）

A. $f\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=f(x)$

B. 函数 $f\left(x\right)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{18},0\right)$ 中心对称

C. 将 $f\left(x\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，可得到 $g\left(x\right)=2\sin3x$ 的图象

D. 函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递增

【答案】AB

【解析】

【分析】根据正弦函数的周期即可判断 A；根据正弦函数的对称性即可判断 B；根据左右平移的原则即可判断 C；根据正弦函数的单调性即可判断 D.

【详解】对于 A，$f\left(x\right)$ 的周期 $T=\frac{2\pi}{3}$，所以 A 正确；

对于 B，因为 $f\left(\frac{\pi}{18}\right)=2\sin0=0$ ，

所以函数 $f\left(x\right)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{18},0\right)$ 中心对称 ，故 B 正确；

对于 C，将 $f\left(x\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，

得到 $f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，故 C 错误；

对于 D 中，因为 $x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $3x-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 上不单调，故 D 错误.

故选：AB.

10. 已知函数 $f\left(x\right)=\ln x-1-\frac{2}{x-1}$ ，定义域为 D ，则下列结论正确的是（　　）

A. 若 a，$b\in D$ 且 $a<b$ ，则 $f\left(a\right)<f\left(b\right)$

B. 已知 a，$b\in D$ 且 $a\neq b$ ，则 “ $ab=1$ ” 是 “ $f\left(a\right)+f\left(b\right)=0$ ” 的充分条件

C. 方程 $f\left(f\left(x\right)\right)=0$ 有 4 个不同的实数解

D. 若 $a\in\left(1,2\right)$ ，则 $f\left(a-1\right)>f\left(a\right)$

【答案】BCD

【解析】

【分析】利用导数可得 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1),(1,+\infty)$，利用 $f\left(\frac{1}{e}\right),f(e)$ 可判断 A；计算得 $f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=0$ 可判断 B；当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)\in(-\infty,+\infty)$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)\in(-\infty,+\infty)$ 进而可判断 C，$f(a-1)-f(a)=\ln\left(1-\frac{1}{a}\right)-\frac{2}{(a-2)(a-1)}$，构造函数 $g(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1$，$x\in(0,1)$，求导可得结论判断 D.

【详解】由函数 $f(x)=\ln x-1-\frac{2}{x-1}$ 的定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$ ，

且 $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)^2}>0$ ，所以 $f(x)$ 的单调递增区间 $(0,1),(1,+\infty)$ ，

对于 A，令 $a=\frac{1}{e}$，$b=e$，

得 $f\left(\frac{1}{e}\right)=-2+\frac{2e}{e-1}>0$，$f(e)=-\frac{2}{e-1}\left\langle 0,f\left(\frac{1}{e}\right)\right\rangle f(e)$，所以 A 错误;

对于 B，由已知得 $f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=-2+\frac{2x-2}{x-1}=0$，充分性得证，所以 B 正确;

对于 C， 当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)\in(-\infty,+\infty)$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)\in(-\infty,+\infty)$，

所以 $f(x)$ 有两个零点 x_1，x_2，且 $0<x_1<1,1x_2>1$，

所以方程 $f(x)=x_1$ 与 $f(x)=x_2$ 分别有两个实数解，

故方程 $f(f(x))=0$ 有 4 个不同的实数解，故 C 正确;

对于 D 中，由 $f(a-1)>f(a)$，即 $f(a-1)-f(a)=\ln\left(1-\frac{1}{a}\right)-\frac{2}{(a-2)(a-1)}$，

令 $g(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1$，$x\in(0,1)$ ，可得 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}<0$ ，

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 为单调递减函数，所以 $g(x)>g(1)=0$ ，即 $\ln x>1-\frac{1}{x}$ ，

因为 $a\in(1,2)$，可得 $1-\frac{1}{a}\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，所以 $\ln\left(1-\frac{1}{a}\right)>1-\frac{a}{a-1}$，

得 $f(a-1)-f(a)>1-\frac{a}{a-1}-\frac{2}{(a-2)(a-1)}=\frac{-a}{(a-1)(a-2)}>0$，

所以 $f(a-1)>f(a)$，故 D 正确.

故选：BCD.

11. 双纽线是卡西尼卵形线的一类分支， 在数学曲线领域占有至关重要的地位， 同时也具有特殊的有价值的艺术美. 双纽线的图形轮廓像“ ∞ ”，是许多艺术家设计作品的主要几何元素. 已知在平面直角坐标系中， $F_1(-2,0),F_2(2,0)$ ，满足 $|PF_1|\cdot|PF_2|=4$ 的动点 P 的轨迹为曲线 C . 则下列结论正确的是（　　）

A. 曲线 C 既是中心对称又是轴对称图形

B. 曲线 C 上满足 $|PF_1|=|PF_2|$ 的点 P 有 2 个

C. $|OP|\le 2\sqrt{2}$

D. 曲线 C 上存在四个不同的点，使曲线在该点处切线的斜率为 0

【答案】ACD

【解析】

【分析】由题意中等式结合两点间距离公式表示出曲线方程可得 A 正确；由 $|PF_1|=|PF_2|=2$ 可得这样的 P 点只有 1 个，即为原点可得 B 错误；由曲线方程整理出 $x^2+y^2=\dfrac{8(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\le 8,$ 可得 C 正确；由图象观察可得 D 正确；也可由导数的意义求出.

【详解】对于 A，设 P 点坐标为 (x,y) 则曲线 $C:\sqrt{(x-2)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+2)^2+y^2}=4$ ，故 A 正确；

对于 B ，若 $|PF_1|=|PF_2|$ ，则 $|PF_1|=|PF_2|=2$ ，这样的 P 点只有 1 个，即为原点， 故 B 错误；

对于 C，由 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+2)^2+y^2}=4$ 得， $\left[(x-2)^2+y^2\right]\cdot\left[(x+2)^2+y^2\right]=16$

整理得， $(x^2+y^2)^2=8(x^2-y^2)$ ，所以 $x^2+y^2=\dfrac{8(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\le 8,|OP|\le 2\sqrt{2}$ ，故 C 正确；

对于 D，从双纽线的图形上，可以观察有四个点处切线的斜率为 0，

另外，由 $(x^2+y^2)^2=8(x^2-y^2)$ 得 $y^2=4\sqrt{x^2+1}-(x^2+4)$ ，则 $2y\cdot y'_x=\dfrac{4x}{\sqrt{x^2+1}}-2x$ ，

令 $y'_x=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$ 或 0，经计算曲线 C 在原点处的切线方程为 $y=\pm 2x$ ，故 D 正确.

故选：ACD.

【点睛】关键点点睛：本题 C 选项的关键是能利用曲线方程整理 O,P 出两点间公式，再求出范围.

三、填空题：本题共 3 小题， 每小题 5 分， 共 15 分.

12. 已知数列$\{a_n\}$是等差数列，且其前n项和为S_n.若$S_3=9,S_6=36$，则$a_1=$_____.

【答案】1

【解析】

【分析】利用等差数列的下标性质与通项公式求解即可；

【详解】由$S_3=9,S_6=36$得$a_1+a_2+a_3=3a_2=9$，$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=3(a_3+a_4)=36$，

解得$a_2=3,a_3+a_4=12$，

即$a_2+d+a_2+2d=12$，解得$d=2$，

所以$a_1=a_2-d=1$.

故答案为：1.

13. 若直线$y=2x$为曲线$y=\mathrm{e}^{ax+b}$的一条切线，则ab的最大值为__________.

【答案】$\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}$##$2\mathrm{e}^{-2}$

【解析】

【分析】设$f(x)=\mathrm{e}^{ax+b}$，切点为$\left(x_0,\mathrm{e}^{ax_0+b}\right)$，再根据导数的几何意义求出切线方程，再结合题意求出a,b的关系，再构造新的函数，利用导数求出最大值即可.

【详解】设$f(x)=\mathrm{e}^{ax+b}$，则$f'(x)=a\mathrm{e}^{ax+b}$，

设切点为$\left(x_0,\mathrm{e}^{ax_0+b}\right)$，则$f'(x_0)=a\mathrm{e}^{ax_0+b}$，

则切线方程为$y-\mathrm{e}^{ax_0+b}=a\mathrm{e}^{ax_0+b}(x-x_0)$，整理可得$y=a\mathrm{e}^{ax_0+b}x+(1-ax_0)\mathrm{e}^{ax_0+b}$，

所以$\begin{cases}(1-ax_0)\mathrm{e}^{ax_0+b}=0\\ a\mathrm{e}^{ax_0+b}=2\end{cases}$，解得$x_0=\dfrac{1}{a},a\mathrm{e}^{ax_0+b}=a\mathrm{e}^{1+b}=2$，

所以$a=\dfrac{2}{\mathrm{e}^{1+b}}$，所以$ab=\dfrac{2b}{\mathrm{e}^{1+b}}$，

设$g(x)=\dfrac{2x}{\mathrm{e}^{1+x}}$，则$g'(x)=\dfrac{2(1-x)}{\mathrm{e}^{1+x}}$，

当$x\in(-\infty,1)$时，$g'(x)>0,g(x)$单调递增，

当$x\in(1,+\infty)$时，$g'(x)<0,g(x)$单调递减，

所以当$x=1$时，$g(x)$取得最大值$g(1)=\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}$，

所以 ab 的最大值为 $\frac{2}{e^2}$.

故答案为：$\frac{2}{e^2}$

【点睛】关键点点睛：设出切点，根据直线 $y=2x$ 为曲线 $y=e^{ax+b}$ 的一条切线，求出 a,b 的关系，是解决本题的关键.

14. 克罗狄·托勒密是希腊数学家，他博学多才，既是天文学权威，也是地理学大师，托勒密定理是平面几何中非常著名的定理，它揭示了圆内接四边形的对角线与边长的内在联系，该定理的内容为:圆的内接四边形中，两条对角线长的乘积等于两组对边长的乘积之和.已知四边形 $ABCD$ 是圆 O 的内接四边形，且 $AC=\sqrt{3}BD,\angle ADC=2\angle BAD$，若 $AB\cdot CD+BC\cdot AD=4\sqrt{3}$，则（1）圆 O 的半径是____________，（2）四边形 $ABCD$ 面积的取值范围是________.

【答案】　①. 2　②. $\left(\sqrt{3},2\sqrt{3}\right)$

【解析】

【分析】根据题意可得 $BD=2$，利用正弦定理可得 $\sin\angle ADC=\sqrt{3}\sin\angle BAD$，即可得 $\cos\angle BAD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即可得外接圆半径；分析可知 $AC=2\sqrt{3}$，$BD=2$，取临界状态，分析可知点 A 在劣弧 $\overset{\frown}{A_1A_2}$ 或 $\overset{\frown}{A_3A_4}$ 上，且 AC 与 BD 的夹角 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，进而可求面积.

【详解】由托勒密定理，得 $AC\cdot BD=AB\cdot CD+BC\cdot AD=4\sqrt{3}$.

因为 $AC=\sqrt{3}BD$，所以 $BD=2$.

设圆 O 的半径为 R，由正弦定理，得 $\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{BD}{\sin\angle BAD}=2R$.

又 $AC=\sqrt{3}BD$，所以 $\sin\angle ADC=\sqrt{3}\sin\angle BAD$.

因为 $\angle ADC=2\angle BAD$，所以 $2\sin\angle BAD\cos\angle BAD=\sqrt{3}\sin\angle BAD$，

因为 $0<\angle BAD<\pi$，所以 $\sin\angle BAD>0$，所以 $\cos\angle BAD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\sin\angle BAD=\sqrt{1-\cos^2\angle BAD}=\frac{1}{2}$，则 $2R=\frac{BD}{\sin\angle BAD}=4$，故 $R=2$.

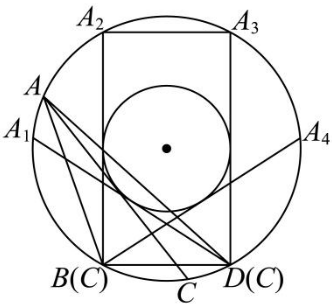
因为 $AC=2\sqrt{3}$，可知点 O 到直线 AC 的距离 $d=\sqrt{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=1$，

可知直线 AC 为以 O 为圆心，半径为 1 的圆的切线，

在$\triangle ABD$中，可知$BD=2,\angle BAD=\frac{\pi}{6}$，结合圆的性质可知点A在优弧$\overset{\frown}{BC}$上，

取$A_1B\perp BD$，则$A_1B=2\sqrt{3}$；取$A_4D\perp BD$，则$A_4D=2\sqrt{3}$；

取$A_2B=BD$，则$A_2D=2\sqrt{3}$；取$A_3D=BD$，则$A_3B=2\sqrt{3}$；



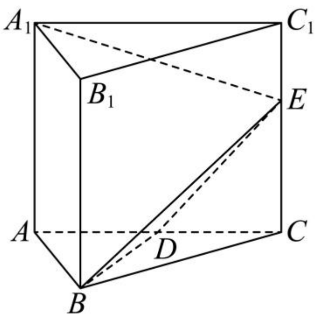
可知点A在劣弧$\overset{\frown}{A_1A_2}$或$\overset{\frown}{A_3A_4}$上，且AC与BD的夹角$\alpha\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，

所以四边形$ABCD$面积$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\alpha=2\sqrt{3}\sin\alpha\in\left(\sqrt{3},2\sqrt{3}\right)$.

故答案为：2；$\left(\sqrt{3},2\sqrt{3}\right)$.

四、解答题：本题共 5 小题， 共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. 如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\triangledown ABC$是边长为2的正三角形，$\left|AA_1\right|=3,D$为AC中点，点E在棱CC_1上，且$\overrightarrow{CE}=\lambda\overrightarrow{CC_1}$，$0<\lambda<1$.



（1）当$\lambda=\frac{2}{3}$时，求证：$A_1E\perp$平面BDE；

（2）当$\lambda=\frac{1}{3}$时，求直线A_1B_1与平面BDE所成角的正弦值.

【答案】（1）证明见解析

（2）$\frac{\sqrt{2}}{4}$

【解析】

【分析】（1）根据已知条件建立空间直角坐标系，利用向量证明线面垂直即可；

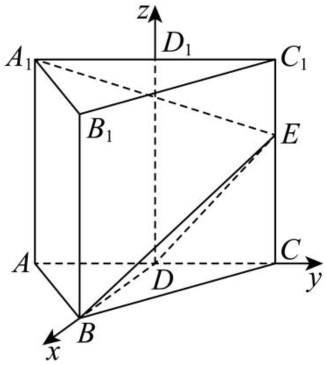
（2）利用空间向量法可求得直线 A_1B_1 与平面 BDE 所成角的正弦值.

【小问 1 详解】

取 A_1C_1 的中点 D_1，连接 DD_1，

因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直棱柱，且 $\triangle ABC$ 为正三角形，

以 DB、DC、DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示空间直角坐标系，



根据已知条件得 $D(0,0,0)$、$B(\sqrt{3},0,0)$、$A_1(0,-1,3)$、$C(0,1,0)$、$C_1(0,1,3)$，

当 $\lambda=\frac{2}{3}$ 时，$CE=\frac{2}{3}CC_1$，则 $E(0,1,2)$，

所以 $\overrightarrow{A_1E}=(0,2,-1)$，$\overrightarrow{DB}=(\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{DE}=(0,1,2)$，

所以 $\overrightarrow{A_1E}\cdot\overrightarrow{DB}=0$，$\overrightarrow{A_1E}\cdot\overrightarrow{DE}=0+2-2=0$，

所以 $A_1E\perp BD$，$A_1E\perp DE$，

又 $DB\cap DE=D$，BD、$DE\subset$平面 BDE，所以 $A_1E\perp$平面 BDE.

【小问 2 详解】

易知 $B_1(\sqrt{3},0,3)$，则 $\overrightarrow{A_1B_1}=(\sqrt{3},1,0)$，

当 $\lambda=\frac{1}{3}$ 时，点 $E(0,1,1)$，$\overrightarrow{DB}=(\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{DE}=(0,1,1)$，

设平面 BDE 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{DB}=\sqrt{3}x=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DE}=y+z=0\end{cases}$，

取 $y=1$，可得 $\vec{m}=(0,1,-1)$，

所以 $\cos\vec{m},\overrightarrow{A_1B_1}=\frac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}}{|\vec{m}|\cdot|\overrightarrow{A_1B_1}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

故当$\lambda=\frac{1}{3}$时，求直线A_1B_1与平面BDE所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{2}}{4}$.

16. 已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左顶点为A，右焦点为$F$，动点$B$在双曲线$C$上，当$BF\perp AF$时，$|BF|=|AF|$.

（1）求C的离心率；

（2）已知$a=1$，M，N两点在双曲线的渐近线上，且分别位于第一、四象限.若$\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{BN}$，求$\triangle MON$的面积.

【答案】（1）2；　　（2）$\frac{9\sqrt{3}}{8}$.

【解析】

【分析】（1）根据条件求出$BF\perp AF$时B的坐标，根据$|BF|=|AF|$，列出关于a,b,c的齐次等式，即可求离心率；

（2）先求出双曲线方程与渐近线方程，通过$\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{BN}$找出$M,N,B$坐标之间关系，用$M,N$坐标表示$B$的坐标，代入双曲线方程得到$x_1x_2=\frac{9}{8}$，再用$x_1,x_2$表示出$\triangle MON$的面积，整体代入即可.

【小问1详解】

设$F(c,0)$，将$x=c$代入双曲线方程得$y=\pm\frac{b^2}{a}$，此时$|BF|=|AF|$，

所以$\frac{b^2}{a}=a+c$，即$c^2-a^2=a^2+ac$，$2a^2+ac-c^2=0$，

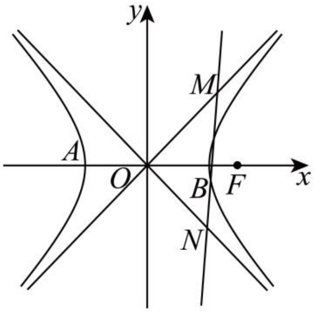
则$2+e-e^2=0$，所以$e=2$（负值舍去），

故C的离心率为2.

【小问2详解】

因为$a=1$，由（1）知$c=2,b=\sqrt{3}$，

双曲线方程为：$x^2-\frac{y^2}{3}=1$，渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$，



设$M(x_1,\sqrt{3}x_1),N(x_2,-\sqrt{3}x_2),B(x_0,y_0)$，

则$\overrightarrow{MB}=(x_0-x_1,y_0-\sqrt{3}x_1)=2\overrightarrow{BN}=2(x_2-x_0,-\sqrt{3}x_2-y_0)$，

所以$\begin{cases}x_0=\dfrac{2x_2+x_1}{3}\\ y_0=\dfrac{\sqrt{3}x_1-2\sqrt{3}x_2}{3}\end{cases}$，

又$B(x_0,y_0)$在双曲线上，所以$\dfrac{(2x_2+x_1)^2}{9}-\dfrac{(\sqrt{3}x_1-2\sqrt{3}x_2)^2}{27}=1$，整理得：$x_1x_2=\dfrac{9}{8}$，

由渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$得$\angle MON=\dfrac{2\pi}{3}$，

所以$\triangle MON$的面积为$\dfrac{1}{2}|OM|\cdot|ON|\cdot\sin\angle MON$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{x_1^2+3x_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+3x_2^2}\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3}=\sqrt{3}x_1x_2=\dfrac{9\sqrt{3}}{8}$.

17. 2023年6月7日，21世纪汽车博览会在上海举行，已知某汽车模型公司共有25个汽车模型，其外观和内饰的颜色分布如下表所示：

	红色外观	蓝色外观
棕色内饰	12	8
米色内饰	2	3

（1）若小明从这些模型中随机拿一个模型，记事件A为小明取到红色外观的模型，事件B为小明取到棕色内饰的模型，求$P(B)$和$P(B|A)$，并判断事件A和事件B是否独立；

（2）该公司举行了一个抽奖活动，规定在一次抽奖中，每人可以一次性从这些模型中拿两个汽车模型，给出以下假设：

假设1：拿到的两个模型会出现三种结果，即外观和内饰均为同色、外观和内饰都异色、以及仅外观或仅内

饰同色；

假设 2：按结果的可能性大小，概率越小奖项越高；

假设 3：该抽奖活动的奖金额为：一等奖 600 元，二等奖 300 元、三等奖 150 元；

请你分析奖项对应的结果，设 X 为奖金额，写出 X 的分布列并求出 X 的数学期望.

【答案】（1） $P\left(B\right)=\frac{4}{5}$， $P(B|A)=\frac{6}{7}$，事件 A 和事件 B 不独立.

（2）分布列见解析，$E\left(X\right)=277$

【解析】

【分析】（1）根据古典概型概率公式和事件的独立性定义即可得出.

（2）分别求出三种结果对应的概率，比较大小，确定 X 对应的概率，求出分布列，利用期望公式进行计算即可.

【小问 1 详解】

若红色外观的模型，则分棕色内饰12个，米色内饰2个，则对应的概率 $P\left(A\right)=\frac{12+2}{25}=\frac{14}{25}$，

若小明取到棕色内饰，分红色外观12个，蓝色外观8个，则对应的概率 $P\left(B\right)=\frac{12+8}{25}=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$.

取到红色外观的模型同时是棕色内饰的有12个，即 $P(AB)=\frac{12}{25}$，

则 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{12}{25}}{\frac{14}{25}}=\frac{12}{14}=\frac{6}{7}$，

$\because$ $P\left(A\right)P\left(B\right)=\frac{14}{25}\times\frac{4}{5}=\frac{56}{125}\neq\frac{12}{25}$， $\therefore P\left(A\right)P\left(B\right)\neq P\left(AB\right)$，

即事件 A 和事件 B 不独立.

【小问 2 详解】

由题意知 $X=600$， 300， 150，

则外观和内饰均为同色的概率 $P=\frac{C_{12}^{2}+C_{8}^{2}+C_{3}^{2}+C_{2}^{2}}{C_{25}^{2}}=\frac{66+28+3+1}{300}=\frac{98}{300}=\frac{49}{150}$，

外观和内饰都异色的概率 $P=\frac{C_{12}^{1}C_{3}^{1}+C_{2}^{1}C_{8}^{1}}{C_{25}^{2}}=\frac{52}{300}$，

仅外观或仅内饰同色的概率 $P=1-\frac{49}{150}-\frac{52}{300}=\frac{1}{2}$，

$\because$ $\frac{1}{2}>\frac{49}{150}>\frac{13}{75}$，

$\therefore P(X=150)=\frac{1}{2}$， $P(X=300)=\frac{98}{300}=\frac{49}{150}$， $P(X=600)=\frac{13}{75}$，

则 X 的分布列为：

X	150	300	600
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{49}{150}$	$\frac{13}{75}$

则 $E(X)=150\times\frac{1}{2}+300\times\frac{49}{150}+600\times\frac{13}{75}=277$ （元）.

18．已知函数 $h(x)=2x+\cos x, g(x)=\mathrm{e}^x-ax^2+1$.

（1）当 $a=1$ 时，判断函数 $g(x)$ 的单调性；

（2）对任意的 $x\geq0$ 时，$g'(x)\geq h(x)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

（3）记 $f(x)=h(x)-\frac{1}{\pi}x^2$，若 $f(x_1)=f(x_2)$，且 $0<x_1<x_2<\pi$，求证：$f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<0$．（参考公式：$\cos\theta-\cos\varphi=-2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$ ）

【答案】（1）$g(x)$ 在 R 上为增函数

（2）$a\leq-\frac{1}{2}$

（3）证明见解析

【解析】

【分析】（1）对 $g(x)$ 求导，得到 $g'(x)=\mathrm{e}^x-2x$，构造函数 $m(x)=\mathrm{e}^x-2x$，再利用导数与函数单调性间的关系，求得 $m(x)>0$，即可求解；

（2）构造函数 $F(x)=g'(x)-h(x)=\mathrm{e}^x-2ax-2x-\cos x, x\geq0$，对 $F(x)$ 求导，得到 $F'(x)=\mathrm{e}^x-2a-2+\sin x, x\geq0$，利用导数与函数的单调性间的关系，可得 $F'(x)\geq-2a-1$，再分 $a\leq-\frac{1}{2}$ 和 $a>-\frac{1}{2}$ 两种情况讨论，即可求解；

（3）根据条件得到 $2-\frac{1}{\pi}(x_1+x_2)+\frac{-2\sin\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_1-x_2}{2}}{x_1-x_2}=0$，令 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，得到 $2-\frac{2}{\pi}x_0=\frac{2\sin x_0\sin\frac{x_1-x_2}{2}}{x_1-x_2}$，再利用 $f'(x_0)=2-\frac{2}{\pi}x_0-\sin x_0$，可得 $\frac{\sin\frac{x_1-x_2}{2}}{\frac{x_1-x_2}{2}}=\frac{\sin\frac{x_2-x_1}{2}}{\frac{x_2-x_1}{2}}$，即可求解.

【小问 1 详解】

当 $a=1$ 时，$g(x)=e^x-x^2+1$，则 $g'(x)=e^x-2x$，

令 $m(x)=e^x-2x$，则 $m'(x)=e^x-2$，令 $m'(x)=0$，得到 $x=\ln 2$，

当 $x<\ln2$ 时，$m'(x)<0$，即 $m(x)$ 在区间 $(-\infty,\ln2)$ 上单调递减，

当 $x>\ln2$ 时，$m'(x)>0$，即 $m(x)$ 在区间 $(\ln2,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $m(x)\ge m(\ln2)=2-2\ln2>0$，则 $g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 R 上单调递增.

【小问 2 详解】

因为 $g(x)=e^x-ax^2+1$，所以 $g'(x)=e^x-2ax$，

设 $F(x)=g'(x)-h(x)=e^x-2ax-2x-\cos x,x\ge0$，

则 $F'(x)=e^x-2a-2+\sin x,x\ge0$，

令 $n(x)=e^x-2a-2+\sin x\,(x\ge0)$，则 $n'(x)=e^x+\cos x\ge1+\cos x\ge0$，

所以 $n(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，即 $F'(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 为增函数，

故 $F'(x)\ge F'(0)=1-2a-2=-2a-1$，

当 $a\le-\frac{1}{2}$ 时，$F'(x)\ge F'(0)=-2a-1\ge0$，此时 $F(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 单调递增，

故 $F(x)\ge F(0)\ge0$ ，符合题意；

当 $a>-\frac{1}{2}$ 时，$F'(0)=-2a-1<0$，且 $F'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 为增函数，

故存在 $x_0>0$ 满足 $F'(x_0)=0$，则 $F(x)$ 在 $(0,x_0)$ 递减，

所以当 $x\in[0,x_0)$ 时，$F(x)\le F(0)=0$，不符合题意，

综上所述，实数 a 的取值范围为 $a\le-\frac{1}{2}$.

【小问 3 详解】

$f(x)=2x-\frac{1}{\pi}x^2+\cos x,f'(x)=2-\frac{2}{\pi}x-\sin x$，

由 $f(x_1)=f(x_2)$，得 $2x_1-\frac{x_1^2}{\pi}+\cos x_1=2x_2-\frac{x_2^2}{\pi}+\cos x_2$，

所以 $2(x_1-x_2)-\frac{1}{\pi}(x_1+x_2)(x_1-x_2)+\cos x_1-\cos x_2=0$，

两边同除以 x_1-x_2，得 $2-\frac{1}{\pi}\left(x_1+x_2\right)+\frac{\cos x_1-\cos x_2}{x_1-x_2}=0$，

所以 $2-\frac{1}{\pi}\left(x_1+x_2\right)+\frac{-2\sin\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_1-x_2}{2}}{x_1-x_2}=0$，

令 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，得 $2-\frac{2}{\pi}x_0-\frac{2\sin x_0\sin\frac{x_1-x_2}{2}}{x_1-x_2}=0$，得 $2-\frac{2}{\pi}x_0=\frac{2\sin x_0\sin\frac{x_1-x_2}{2}}{x_1-x_2}$，

因为 $f'(x)=2-\frac{2x}{\pi}-\sin x$，

所以 $f'\left(x_0\right)=2-\frac{2}{\pi}x_0-\sin x_0=\frac{2\sin x_0\sin\frac{x_1-x_2}{2}}{x_1-x_2}-\sin x_0=\sin x_0\left(\frac{\sin\frac{x_1-x_2}{2}}{\frac{x_1-x_2}{2}}-1\right)$，

因为 $\frac{\sin\frac{x_1-x_2}{2}}{\frac{x_1-x_2}{2}}=\frac{\sin\frac{x_2-x_1}{2}}{\frac{x_2-x_1}{2}}$，又 $\frac{x_2-x_1}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，易知 $0<\sin\frac{x_2-x_1}{2}<\frac{x_2-x_1}{2}$，所以 $\frac{\sin\frac{x_1-x_2}{2}}{\frac{x_1-x_2}{2}}-1<0$，

又 $x_0\in(0,\pi)$，所以 $\sin x_0>0$，故 $f'\left(x_0\right)<0$，得 $f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<0$.

【点睛】方法点睛：对于利用导数研究不等式的恒成立与有解问题的求解策略：

①通常要构造新函数，利用导数研究函数的单调性，求出最值，从而求出参数的取值范围；

②利用可分离变量，构造新函数，直接把问题转化为函数的最值问题；

③根据恒成立或有解求解参数的取值时，一般涉及分离参数法，但压轴试题中很少碰到分离参数后构造的新函数能直接求出最值点的情况，进行求解，若参变分离不易求解问题，就要考虑利用分类讨论法和放缩法，注意恒成立与存在性问题的区别.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若对每一个 $n\in\mathbf{N}^*$，有且仅有一个 $m\in\mathbf{N}^*$，使得 $S_m\le a_n<S_{m+1}$，则称 $\{a_n\}$ 为“X 数列”．记 $b_n=S_{m+1}-a_n,n\in\mathbf{N}^*$，称数列 $\{b_n\}$ 为 $\{a_n\}$ 的“余项数列”．

（1）若 $\{a_n\}$ 的前四项依次为 $0,1,-1,2$，试判断 $\{a_n\}$ 是否为“X 数列”，并说明理由；

（2）若 $S_n=2^{n+1}$，证明 $\{a_n\}$ 为“X 数列”，并求它的“余项数列”的通项公式；

（3）已知 $a_1=1$ 的正项数列 $\{a_n\}$ 为“X 数列”，且 $\{a_n\}$ 的“余项数列”为等差数列，证明 $S_n\le 1+2^{n-2}$.

【答案】（1）不是，理由见解析；

（2）$b_n=\begin{cases}4,n=1\\2^n,n\ge 2\end{cases}$；

（3）证明见解析.

【解析】

【分析】（1）依次求出 S_1,S_2,S_3,S_4，再根据“X数列”定义进行判断即可.

（2）由 $S_n=2^{n+1}$ 先求出数列 $\{a_n\}$ 通项公式，再依据“X数列”定义进行推算证明即可，接着由“余项数列”的定义公式 $b_n=S_{m+1}-a_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$ 进行计算即可.

（3）先探究 b_1,b_2 得出“余项数列”公差情况 $d\le 0$，再讨论 $d<0$ 时 $n>1-\dfrac{a_2}{d}$ 推出矛盾得到 $d=0$，接着探究 $n\ge 3$ 时若 $m+1\ge n$ 得出矛盾，从而得出 $m+1\le n-1$，进而得出 $S_n-S_{n-1}+a_1=a_n+a_1=S_{m+1}\le S_{n-1}$ 即可进一步推出 $S_n\le 1+2^{n-2}$.

【小问 1 详解】

$\{a_n\}$ 不是“X数列”，

依题意，$S_1=0,S_2=1,S_3=0,S_4=2$，则 $S_1\le a_1\le S_2$，$S_3\le a_1\le S_4$，不符合题意，

所以 $\{a_n\}$ 不是“X数列”.

【小问 2 详解】

由 $S_n=2^{n+1}$，得当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=4$；当 $n\ge 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n+1}-2^n=2^n$，

而 $a_1=4$ 不满足 $a_n=2^n$，因此 $a_n=\begin{cases}4,n=1\\2^n,n\ge 2\end{cases}$，

令 $S_m\le a_n<S_{m+1}$，即 $2^{m+1}\le a_n<2^{m+2}$，则当 $n=1$ 时，有 $2^{m+1}\le 4<2^{m+2}$，解得 $m=1$；

当 $n\ge 2$ 时，$2^{m+1}\le 2^n<2^{m+2}$，则 $m+1\le n<m+2$，而 $m,n\in\mathbf{N}^*$，于是 $m+1=n$，

因此对每一个 $n\in\mathbf{N}^*(n\ge 2)$，有且仅有一个 $m\in\mathbf{N}^*$ 且 $m=n-1$，使得 $S_m\le a_n<S_{m+1}$，

即对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，有且仅有一个 $m\in\mathbf{N}^*$，使得 $S_m\le a_n<S_{m+1}$，所以 $\{a_n\}$ 为“X数列”，

$$b_n=S_{m+1}-a_n=\begin{cases}2^{m+2}-4,n=1\\2^{m+2}-2^n,n\ge 2\end{cases}=\begin{cases}4,n=1\\2^n,n\ge 2\end{cases}，\quad n\in\mathbf{N}^*，$$

所以 $\{a_n\}$ 的“余项数列”通项公式为 $b_n=\begin{cases}4,n=1\\2^n,n\ge 2\end{cases}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

【小问 3 详解】

由$\{a_n\}$是正项数列，得$\{S_n\}$单调递增，则$S_1 \le a_1 < S_2$，$b_1 = S_2 - a_1 = a_2$，

由$a_2 < S_2$，且$\{a_n\}$为“X数列”，得$a_1 = S_1 \le a_2 < S_2$，由$b_n = S_{m+1} - a_n (n \in \mathbf{N}^*)$，得$b_2 = S_2 - a_2 = a_1$，

$\{a_n\}$的“余项数列”$\{b_n\}$为等差数列，则其公差$d = b_2 - b_1 = a_1 - a_2 \le 0$，

由$S_m \le a_n < S_{m+1}$，得$b_n = S_{m+1} - a_n > 0$，

若$d < 0$，则当$n > 1 - \frac{a_2}{d}$时，$b_n = a_2 + (n-1)d < a_2 + (1 - \frac{a_2}{d} - 1)d = 0$，与$b_n > 0$矛盾，

则$d = 0$，$b_n = a_2 = a_1$，$b_n = S_{m+1} - a_n = a_1$，即$S_{m+1} - a_n - a_1 = 0$，

对于$n \ge 3$，若$m+1 \ge n$，则$a_2 \le S_{m+1} - a_n - a_1 = 0$，与正项数列$\{a_n\}$矛盾，

于是$m+1 \le n-1$，$S_n - S_{n-1} + a_1 = a_n + a_1 = S_{m+1} \le S_{n-1}$，

因此$S_n - a_1 \le 2(S_{n-1} - a_1)$，$\frac{S_n - a_1}{2^n} \le \frac{S_{n-1} - a_1}{2^{n-1}} \le \cdots \le \frac{S_2 - a_1}{4} = \frac{a_2}{4} = \frac{a_1}{4}$，

当$n \ge 3$时，$S_n \le (1 + 2^{n-2})a_1$，又$S_1 \le (1 + 2^{-1})a_1, S_2 = 2a_1 \le (1 + 2^0)a_1$，

则$S_n \le (1 + 2^{n-2})a_1$，$n \in \mathbf{N}^*$，而$a_1 = 1$，所以$S_n \le 1 + 2^{n-2}$.

【点睛】关键点睛：证明$S_n \le 1 + 2^{n-2}$的关键第一步是探究出“余项数列”$\{b_n\}$公差$d \le 0$；第二步是探究出$d < 0$时$n > 1 - \frac{a_2}{d}$有矛盾得到$d = 0$；第三步是探究出$n \ge 3$时若$m+1 \ge n$有矛盾，从而得到$m+1 \le n-1$，进而得出$S_n - S_{n-1} + a_1 = a_n + a_1 = S_{m+1} \le S_{n-1}$.