

2024-2025 学年八年级数学下学期第一次月考卷

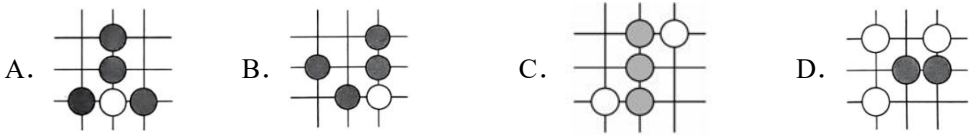
(考试时间：120 分钟 试卷满分：150 分)

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 做选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。
3. 做填空题和解答题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
4. 测试范围：苏科版八年级下册第7~9章。
5. 难度系数：0.70。

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1. 围棋起源于中国，古代称之为“弈”，至今已有 4000 多年的历史。以下是在棋谱中截取的四个部分，由黑白棋子摆成的图案是中心对称图形的是（ ）



【答案】C

【详解】解：A、该图形不是中心对称图形，故此选项不符合题意；

B、该图形不是中心对称图形，故此选项不符合题意；

C、该图形是中心对称图形，故此选项符合题意；

D、该图形不是中心对称图形，故此选项不符合题意。

故选：C。

2. 2024 年 10 月 30 日，神舟十九号载人飞船发射取得圆满成功，航天员乘组顺利进驻中国空间站，为了解某校七年级学生在此次载人飞船发射的知晓情况，从该校随机抽取了 100 名七年级学生进行调查，下列说法正确的是（ ）

- | | |
|-------------------|--------------|
| A. 总体是某校七年级学生 | B. 个体是每个学生 |
| C. 样本是抽取的 100 个学生 | D. 样本容量是 100 |

【答案】D

【详解】解：A、总体是某校七年级学生在此次载人飞船发射的知晓情况，故 A 不符合题意；

B、个体是每个学生在此次载人飞船发射的知晓情况，故 B 不符合题意；

C、样本是抽取的 100 个学生对此次载人飞船发射的知晓情况，故 C 不符合题意；

D、样本容量是 100，故 D 符合题意；

故选：D.

3. 下列事件为必然事件的是 ()

A. 在学校操场上，抛出的篮球会下落

B. 明天一定会下雨

C. 任意买一张电影票，座位号是奇数

D. 两条线段可以组成一个三角形

【答案】A

【详解】解：A、在学校操场上，抛出的篮球会下落是必然事件，符合题意；

B、明天一定会下雨是随机事件，不符合题意；

C、任意买一张电影票，座位号是奇数是随机事件，不符合题意；

D、两条线段可以组成一个三角形是不可能事件，不符合题意；

故选：A.

4. 文化情境·传统文化 尊老爱幼是我们中华民族的优秀传统，为了解老年人的健康情况，社区工作人员设计了以下几种调查方案：

方案一：在公园随机调查 100 名健身的老年人的健康情况；

方案二：在医院随机调查 100 名老年人的健康情况；

方案三：在小区内随机调查 100 名老年人的健康情况.

在上述方案中，能较好且准确地得到老年人健康情况的是 ()

A. 方案一

B. 方案二

C. 方案三

D. 以上都不行

【答案】C

【详解】解：A、公园与小区是两个不同的地区，调查不具可靠性，故本选项不符合题意；

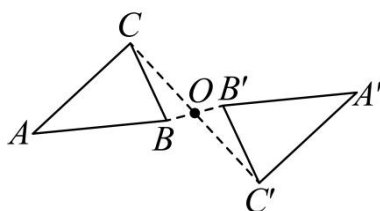
B、小区与医院是两个不同的地区，调查不具有可靠性，故本选项不符合题意；

C、调查具有可靠性、代表性和广泛性，故本选项符合题意；

D、因方案三符合题意，故本选项不符合题意.

故选：C.

5. 如图所示， $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于点 O 成中心对称，则下列结论成立的是 ()



①点A与点A'关于点O对称；② $BO = B'O$ ；③ $AC \parallel A'C'$ ；④ $\angle ABC = \angle C'A'B'$ 。

- A. ①②③ B. ②③④ C. ①③④ D. ①②④

【答案】A

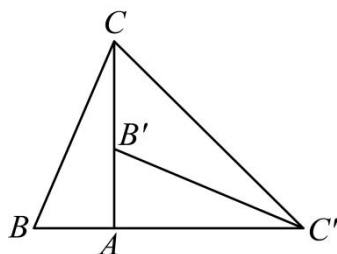
【详解】解：∵ $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于点O成中心对称，

∴ $OB = OB'$, $OC = OC'$, 点A与点A'关于点O对称, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$, $AC \parallel A'C'$,

∴ ①②③正确, ④错误,

故选：A

6. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 绕点A顺时针旋转 90° 后得到 $\triangle AB'C'$ (点B的对应点是点B', 点C的对应点是点C', 连接CC', 若 $\angle CC'B' = 22^\circ$, 则 $\angle B$ 的大小是 ()



- A. 63° B. 64° C. 67° D. 66°

【答案】C

【详解】解：由旋转可得, $AC' = AC$, $\angle B'AC' = \angle BAC = 90^\circ$, $\angle AB'C' = \angle B$,

∴ $\angle ACC' = \angle AC'C = 45^\circ$,

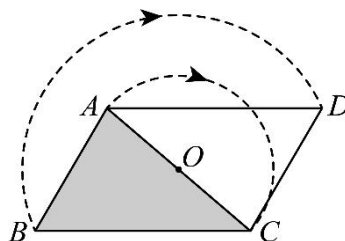
∴ $\angle AB'C' = \angle ACC' + \angle CC'B' = 45^\circ + 22^\circ = 67^\circ$,

∴ $\angle B = 67^\circ$,

故选：C.

7. 如图, 将 $\triangle ABC$ 绕边AC的中点O顺时针旋转 180° , 嘉淇发现, 旋转后的 $\triangle CDA$ 与 $\triangle ABC$ 构成平行四边形, 推理如下: 小明为保证嘉淇的推理更严谨, 想在方框中“ $CB = AD$,”和“∴ 四边形...”之间作补充, 下列正确的是 ()

点A, C分别转到了点C, A处, 而点B转到了点D处,
 $CB = AD$
 ∴ 四边形ABCD是平行四边形



- A. 嘉淇推理严谨, 不必补充 B. 应补充: 且 $AB = CD$
 C. 应补充: 且 $AB \parallel CD$ D. 应补充: 且 $OA = OC$

【答案】B

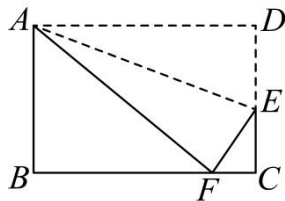
【详解】解：根据旋转的性质得： $CB = AD$ ， $AB = CD$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形；

故应补充“ $AB = CD$ ”，

故选：B.

8. 如图，在长方形 $ABCD$ 中， $DC = 6$ ，在 DC 上存在一点 E ，沿直线 AE 把 $\triangle ADE$ 折叠，使点 D 恰好落在 BC 边上，设此点为 F ，若 $\triangle ABF$ 的面积为 24，则 CE 的长度为（ ）



A. 3.5

B. $\frac{8}{3}$

C. 2

D. 3

【答案】B

【详解】解： $\because$ 在长方形 $ABCD$ 中， $DC = 6$ ，

$\therefore AB = CD = 6$ ， $AD = BC$ ， $\angle B = \angle C = 90^\circ$ ，

$\because \triangle ABF$ 的面积为 24，

$$\therefore \frac{1}{2} AB \cdot BF = 24,$$

$$\therefore BF = 8,$$

$$\therefore AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = 10,$$

由折叠的性质可得 $AD = AF = BC = 10$ ， $DE = EF$ ，

$$\therefore CF = BC - BF = 2,$$

设 $CE = x$ ，则 $DE = EF = 6 - x$ ，

由勾股定理可得： $CF^2 + CE^2 = EF^2$ ，即 $2^2 + x^2 = (6 - x)^2$ ，

$$\text{解得：} x = \frac{8}{3},$$

$$\therefore CE = \frac{8}{3},$$

故选：B.

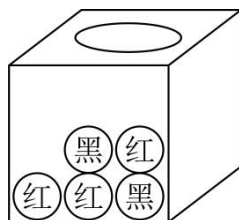
二、填空题：本题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分。

9. 电脑键盘上字母的排列顺序与字母的使用频率有关，小辉同学调查发现，字母“E”出现的频率最高，约为 11.1%．已知某篇文章中，所有字母的总数为 3000 个，可估计字母“E”约为_____个．

【答案】333

【详解】已知字母 E 出现的频率约为 11.1% ，文章中所有字母的总数为 3000 个。根据 $\text{频数} = \text{频率} \times \text{总数}$ ，可得字母 E 的个数约为： $3000 \times 11.1\% = 3000 \times 0.111 = 333$ （个）。所以，可估计字母 E 约为 333 个。
故答案为： 333 。

10. 如图，盒子中装有 3 个红球， 2 个黑球，要保证摸出两个同色的球，至少一次摸出_____个球。

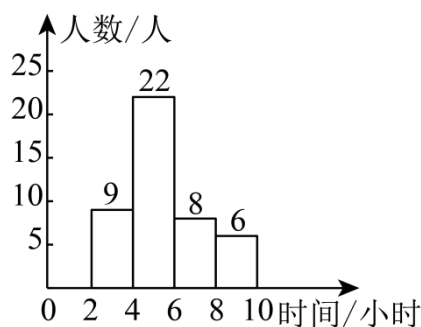


【答案】 3

【详解】解：由题意，要保证摸出两个同色的球，至少一次摸出 3 个球；

故答案为： 3 。

11. “读书可以让人保持思想活力，让人得到智慧启发，让人滋养浩然之气。”李老师对七年级（1）班上上周课外阅读时间进行统计，得到如图所示的条形统计图，则课外阅读时间不少于 4 小时的学生人数是_____。



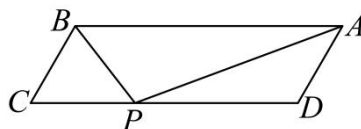
【答案】 36

【详解】解： $22 + 8 + 6 = 36$ 人，

$\therefore$ 课外阅读时间不少于 4 小时的学生人数是 36 ，

故答案为： 36 。

12. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 内， $\angle C = 60^\circ$ ， $AB = 3$ ， $BC = 1$ ， P 为线段 CD 上一点，若 ABP 为等腰三角形，则 $CP =$ _____



【答案】 2 或 $\frac{7-\sqrt{33}}{2}$

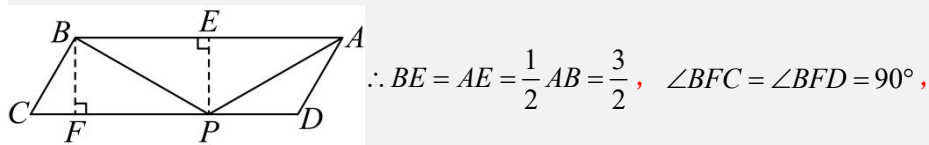
【详解】解： $\because$ 平行四边形 $ABCD$ ， $AB = 3$ ， $BC = 1$ ，

$\therefore AB \parallel CD$ ， $AB = CD = 3$ ，

ABP 为等腰三角形，

当 $PB = AP$ 时，

如图，作 $PE \perp AB$ 于点 E ， $BF \perp CD$ 于点 F ，



$\therefore \angle FBA = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $BFPE$ 是矩形，

$\therefore PF = BE = \frac{3}{2}$ ，

$\therefore \angle C = 60^\circ$ ，

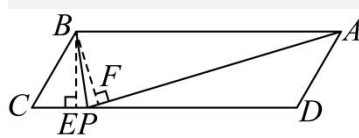
$\angle CBF = 30^\circ$ ，

$\therefore CF = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore CP = CF + PF = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$ ；

当 $AB = AP$ 时，

如图，作 $BE \perp CD$ 于点 E ， $BF \perp AP$ 于点 F ，



$\therefore \angle BEC = \angle BEP = \angle BFP = \angle BFA = 90^\circ$ ，

$\therefore BC = 1$ ， $CE = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore BE = \sqrt{BC^2 - CE^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

$\therefore AB \parallel CD$ ， $AB = AP$ ，

$\therefore \angle ABP = \angle EPB$ ， $\angle ABP = \angle APB$ ，

$\therefore \angle EPB = \angle FPB$ ，

$\therefore BE = BF$ ，

$\therefore \triangle BEP \cong \triangle BFP$ (AAS)，

$\therefore BF = BE = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

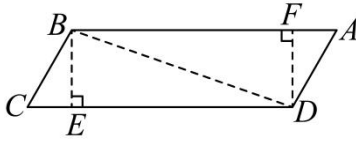
$$\therefore AF = \sqrt{AB^2 - BF^2} = \frac{\sqrt{33}}{2},$$

$$\therefore PF = AP - AF = \frac{6 - \sqrt{33}}{2},$$

$$\therefore PE = \frac{6 - \sqrt{33}}{2},$$

$$\therefore CP = CE + PE = \frac{7 - \sqrt{33}}{2};$$

如图，连接 BD ，作 $BE \perp CD$ 于点 E ， $DF \perp AB$ 于点 F ，



$$BF = DE = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2},$$

$$\therefore BD = \sqrt{BE^2 + DE^2} = \sqrt{7},$$

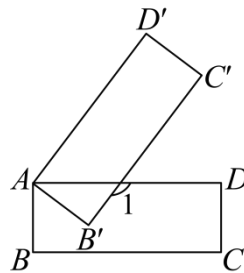
$$\therefore \sqrt{7} < 3,$$

$$\therefore BP \neq AB,$$

ABP 不是等腰三角形；

故答案为：2 或 $\frac{7 - \sqrt{33}}{2}$.

13. 如图，将矩形 $ABCD$ 绕点 A 逆时针旋转得到矩形 $A'B'C'D'$ ，若 $\angle 1 = 127^\circ$ ，则旋转角的度数为_____.



【答案】 53° / 53 度

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$$\therefore \angle B = 90^\circ, \angle BAD = 90^\circ,$$

根据旋转可知， $\angle B = \angle B' = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle 1 = \angle B' + \angle B'AD = 127^\circ,$$

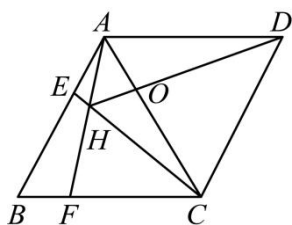
$$\therefore \angle B'AD = \angle 1 - \angle B' = 127^\circ - 90^\circ = 37^\circ,$$

$$\therefore \angle BAB' = \angle BAD - \angle B'AD = 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ,$$

$\therefore$ 旋转角的度数为 53° .

故答案为：53°.

14. 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $AB = AC = 1$ ，点 E 、 F 分别为边 AB 、 BC 上的点，且 $AE = BF$ ，连接 CE 、 AF 交于点 H ，连接 DH 交 AC 于点 O ，则下列结论：



- ① $ABF \cong CAE$ ；② $\angle FHC = \angle B$ ；③ $ADO \cong ACH$ ；④ $S_{\text{菱形}ABCD} = \sqrt{3}$ ；

其中正确的结论是_____.

【答案】①②

【详解】解：∵在菱形 $ABCD$ 中， $AB = AC = 1$ ，

∴ ABC 为等边三角形，

∴ $\angle B = \angle CAE = 60^\circ$ ，

又∵ $AE = BF$ ，

∴ $ABF \cong CAE$ (SAS)，故①正确；

∴ $\angle BAF = \angle ACE$ ，

∴ $\angle FHC = \angle ACE + \angle HAC = \angle BAF + \angle HAC = 60^\circ$ ，

∴ $\angle FHC = \angle B$ ，故②正确；

∵ $\angle B = \angle CAE = 60^\circ$ ，

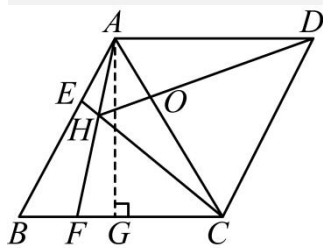
则在 ADO 和 ACH 中，

$\angle OAD = 60^\circ = \angle CAB$ ，

∴ $\angle CAH \neq 60^\circ$ ，即 $\angle CAH \neq \angle DAO$ ，

∴ $ADO \cong ACH$ 不成立，故③错误；

∵ $AB = AC = 1$ ，过点 A 作 $AG \perp BC$ ，垂足为 G ，



∴ $\angle BAG = 30^\circ$ ， $BG = \frac{1}{2}$ ，

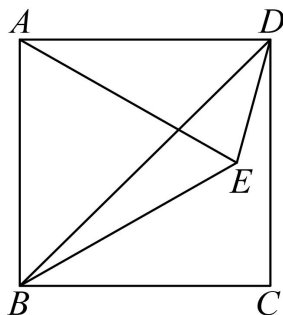
$$\therefore AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore$ 菱形 $ABCD$ 的面积为: $BC \times AG = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故④错误;

故正确的结论有①②,

故答案为: ①②.

15. 如图, 点 E 在正方形 $ABCD$ 内部, 且 ABE 是等边三角形, 连接 BD 、 DE , 则 $\angle BDE =$ _____ $^\circ$.



【答案】 30

【详解】解: $\because$ 点 E 在正方形 $ABCD$ 内部, 且 ABE 是等边三角形, BD 是正方形的对角线,

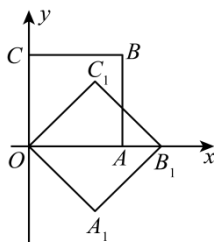
$$\therefore \angle DAE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ, AD = AE, \angle ADB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle DAE) = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle ADE - \angle ADB = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$$

故答案为: 30.

16. 如图, 在平面直角坐标系中, 将正方形 $OABC$ 绕点 O 顺时针旋转 45° 后, 得到正方形 $OA_1B_1C_1$, 以此方式, 绕点 O 连续旋转 2025 次得到正方形 $OA_{2025}B_{2025}C_{2025}$. 如果点 C 坐标为 $(0, 2)$, 那么点 B_{2025} 的坐标为_____.

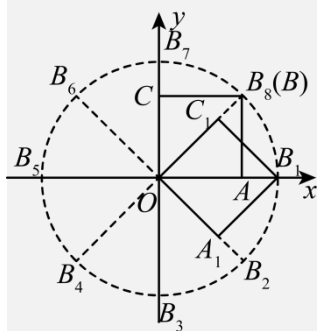


【答案】 $(2\sqrt{2}, 0)$

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形, 且点 C 坐标为 $(0, 2)$,

$$\therefore \text{点 } B \text{ 的坐标为 } (2, 2), \text{ 则 } OB_1 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{点 } B_1 \text{ 的坐标为 } (2\sqrt{2}, 0),$$



依次类推，

点 B_2 的坐标为 $(2, -2)$ ，点 B_3 的坐标为 $(0, -2\sqrt{2})$ ，点 B_4 的坐标为 $(-2, -2)$ ，点 B_5 的坐标为 $(-\sqrt{2}, 0)$ ，

点 B_6 的坐标为 $(-2, 2)$ ，点 B_7 的坐标为 $(0, 2\sqrt{2})$ ，点 B_8 的坐标为 $(2, 2)$ ，点 B_9 的坐标为 $(2\sqrt{2}, 0)$ ，

...

由此可见，旋转后点 B 的对应点的坐标按 $(2\sqrt{2}, 0)$ ， $(2, -2)$ ， $(0, -2\sqrt{2})$ ， $(-2, -2)$ ， $(-\sqrt{2}, 0)$ ， $(-2, 2)$ ， $(0, 2\sqrt{2})$ ， $(2, 2)$ 循环出现，

由 $2025 \div 8 = 253 \dots 1$ ，得到点 B_{2025} 的坐标为 $(2\sqrt{2}, 0)$ ，

故答案为： $(2\sqrt{2}, 0)$ 。

17. 用反证法证明命题“在直角三角形中，至少有一个锐角不大于 45° ”第一步应假设直角三角形中 ____。

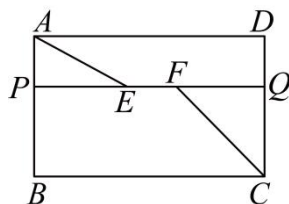
【答案】每个锐角都大于 45°

【详解】解：反证法证明命题“在直角三角形中，至少有一个锐角不大于 45° ”，

第一步假设直角三角形中每个锐角都大于 45° ，

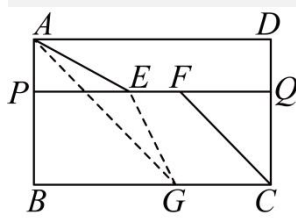
故答案为：每个锐角都大于 45° 。

18. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB=3$ ， $AD=5$ ，点 P 、点 Q 分别在 AB 、 CD 上， $PQ \parallel AD$ ，线段 EF 在 PQ 上，且满足 $EF=1$ ，连接 AE 、 CF ，则 $AE+CF$ 的最小长度为_____。



【答案】5

【详解】解：过 E 作 $EG \parallel CF$ 交 BC 于 G ，连接 AG ，如图：



$\because PQ \parallel BC \parallel AD, EG \parallel CF,$

$\therefore$ 四边形 $EFCG$ 是平行四边形,

$\therefore CG = EF = 1, EG = CF,$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle B = 90^\circ, BC = AD = 5,$

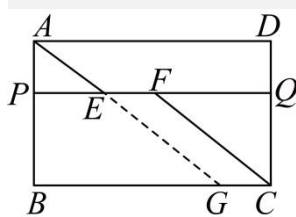
$\therefore BG = BC - CG = 5 - 1 = 4,$

$\therefore AG = \sqrt{AB^2 + BG^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$

$\because EG = CF,$

$\therefore AE + CF = AE + EG,$

$\therefore AE + EG$ 最小时, $AE + CF$ 最小, 此时 E 在线段 AG 上, $AE + CF$ 最小值为 AG 的长, 如图:



$\therefore AE + CF$ 的最小值为 5;

故答案为: 5.

三、解答题: 本题共 10 小题, 共 96 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

19. (本题 8 分) 如图 5×5 方格中, 小正方形边长为 1 个单位长度, 每个小正方形的顶点叫做格点。请按下列要求画出一个符合题意的四边形, 且顶点在格点上。



图1



图2



图3

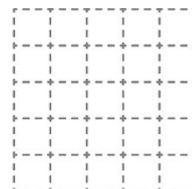


图4

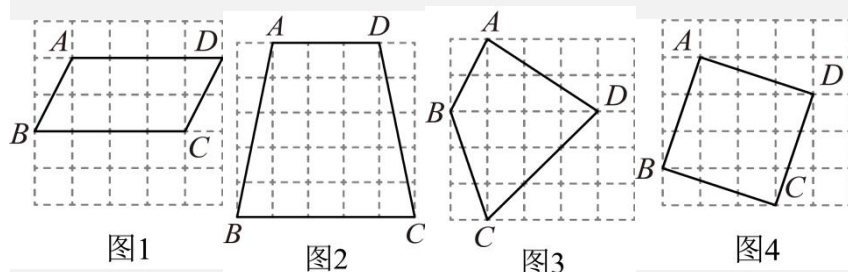
(1) 在图 1 中画: 是中心对称图形, 但不是轴对称图形, 且面积为 8;

(2) 在图 2 中画: 是轴对称图形, 但不是中心对称图形, 且面积为 20;

(3)在图 3 中画：既不是中心对称图形又不是轴对称图形，且面积为 10；

(4)在图 4 中画：既是中心对称图形又是轴对称图形，且各边长都是无理数，面积为 10.

【详解】(1) 如图 1 所示即为所求；(2) 如图 2 所示即为所求；(3) 如图 3 所示即为所求；(4) 如图 4 所示即为所求；



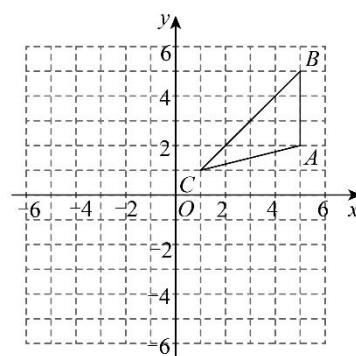
20. (本题 8 分) 如图，正方形网格中，每个小正方形的边长都是一个单位长度，在平面直角坐标系中， $\triangle ABC$ 的三个顶点分别是 $A(5,2)$, $B(5,5)$, $C(1,1)$.

(1) $\triangle ABC$ 向左平移 3 个单位得到的 $\triangle A_1B_1C_1$ ，则点 A , B , C 的对应点

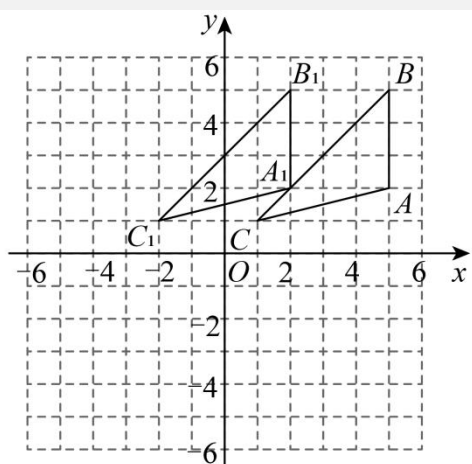
A_1, B_1, C_1 的坐标分别为 A_1 (____), B_1 (____), C_1 (____).

(2) 画出 $\triangle ABC$ 绕点 O 顺时针旋转 90° 后得到的 $\triangle A_2B_2C_2$.

(3) 求线段 AA_2 的长.

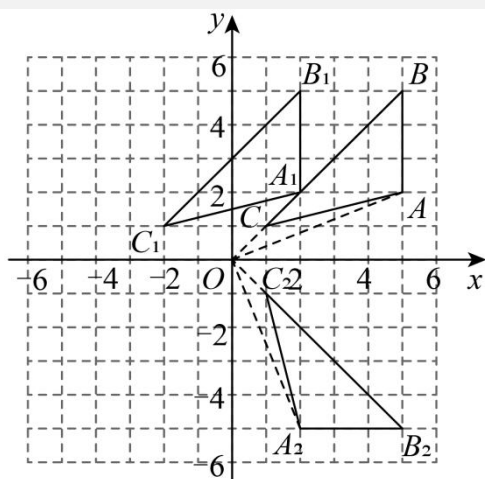


【详解】(1) 解：如图， $\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求，点 A , B , C 的对应点 A_1, B_1, C_1 的坐标分别为 $A_1(2,2)$, $B_1(2,5)$, $C_1(-2,1)$.



故答案为：2,2 , 2,5 , -2,1.

(2) 如图， $\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求，



(3) $AA_2 = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58}$,

即线段 AA_2 的长为 $\sqrt{58}$.

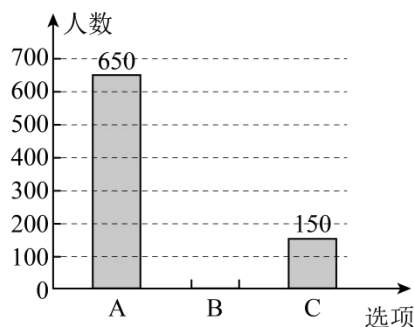
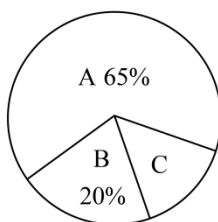
21. (本题 8 分) 2023 年母亲节, 某电视台随机对部分同学作了一个调查 (问卷调查的内容如图①所示), 并根据调查结果绘制了如图②所示的尚不完整的统计图.

你知道母亲最爱吃的菜吗? (单选)

A. 知道

B. 不知道

C. 没爱吃的



图①

图②

根据以上信息, 解答下列问题:

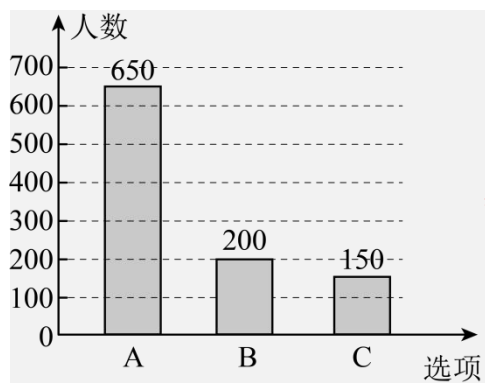
- (1) 参加本次问卷调查的学生有 _____ 人;
- (2) 请补全条形统计图;
- (3) 在扇形统计图中, C 所在扇形的圆心角为多少度?
- (4) 通过这个问卷调查, 你有什么感想?

【详解】(1) 解: 参加本次问卷调查的学生有 $650 \div 65\% = 1000$ (人);

故答案为: 1000;

(2) 解: B 选项的人数为 $1000 - 650 - 150 = 200$ (人),

即可补全条形统计图如下:



(3) 解: $360^\circ \times \frac{150}{1000} = 54^\circ$,

答: C 所在扇形的圆心角为 54 度;

(4) 解: 我的感想是: 在这次调查中, 仍有部分同学对自己的母亲不够了解, 以后要多关心自己的父母. (答案不唯一, 合理即可).

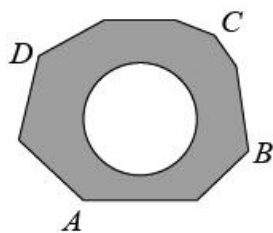
22. (本题 8 分) 如图, 地面上有一个不规则的封闭图形 $ABCD$, 为求得它的面积, 小明在此封闭图形内画出一个半径为 2 米的圆后, 在附近闭上眼睛向封闭图形内掷小石子 (可把小石子近似地看成点), 记录如下:

掷小石子落在不规则图形内的总次数	50	150	300	...
小石子落在圆内 (含圆上) 的次数 m	20	59	123	...
小石子落在圆外的阴影部分 (含外缘) 的次数 n	29	91	176	...

(1) 当投掷的次数很大时, 则 $m:n$ 的值越来越接近_____ (结果精确到 0.1)

(2) 若以小石子所落的有效区域为总数 (即 $m+n$), 则随着投掷次数的增大, 小石子落在圆内 (含圆上) 的频率值稳定在_____附近 (结果精确到 0.1);

(3) 请你利用 (2) 中所得频率的值, 估计整个封闭图形 $ABCD$ 的面积是多少平方米? (结果保留 π)



【详解】解: (1) $20 \div 29 \approx 0.69$;

$59 \div 91 \approx 0.65$;

$123 \div 176 \approx 0.70$,

...

当投掷的次数很大时, 则 $m:n$ 的值越来越接近 0.7;

(2) $20 \div 50 = 0.4$;

$59 \div 150 \approx 0.39$;

$123 \div 300 \approx 0.41$

$\therefore$ 随着投掷次数的增大, 小石子落在圆内 (含圆上) 的频率值稳定在 0.4,

(3) 设封闭图形 $ABCD$ 的面积为 a , 根据题意得: $\frac{\pi \times 2^2}{a} = 0.4$,

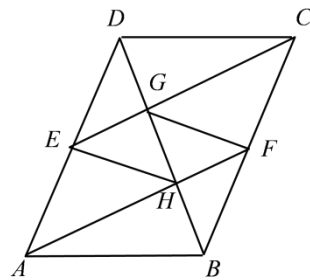
解得: $a = 10\pi$,

$\therefore$ 整个封闭图形 $ABCD$ 的面积为 10π 平方米.

23. (本题 10 分) 如图, 在 $ABCD$ 中, 点 E, F 分别是 AD, BC 的中点, 连接 CE, AF , 交 BD 于点 G, H , 连接 EH, FG .

(1) 求证: $\triangle ABF \cong \triangle CDE$;

(2) 求证: 四边形 $EHFG$ 是平行四边形.



【详解】(1) 证明: 由 $ABCD$ 可得 $AB = DC$, $BC = AD$, $\angle ABC = \angle CDA$,

$\therefore$ 点 E, F 分别是边 AD, BC 的中点,

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AD, BF = \frac{1}{2}BC.$$

$$\therefore DE = BF.$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CED.$$

(2) 证明: $\because \triangle ABF \cong \triangle CED$,

$$\therefore \angle AFB = \angle CED.$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC.$$

$$\therefore \angle ADB = \angle DBC.$$

$$\therefore DE = BF,$$

$$\therefore \triangle HBF \cong \triangle GDE.$$

$$\therefore GE = HF, \angle DGE = \angle BHF.$$

$$\therefore \angle EGH = \angle FHG .$$

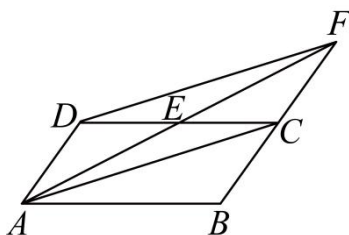
$$\therefore GE \parallel FH .$$

$\therefore$ 四边形 $EHFG$ 是平行四边形.

24. (本题 10 分) 如图, 在 $ABCD$ 中, E 为 CD 的中点, 连接 AE 并延长交 BC 的延长线于点 F , 连接 DF .

(1) 求证: $AD = CF$;

(2) 请添加一个条件, 使得四边形 $ACFD$ 为矩形. (不需要证明)



【详解】(1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC ,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle FCE ,$$

$\because E$ 为 CD 的中点,

$$\therefore DE = CE ,$$

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle FCE$ 中,

$$\begin{cases} \angle ADE = \angle FCE \\ DE = CE \\ \angle AED = \angle FEC \end{cases} ,$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle FCE (\text{ASA}) ,$$

$$\therefore AD = CF ;$$

(2) 解: 添加 $AF = CD$ (答案不唯一), 理由如下:

由 (1) 可知, $AD \parallel BC$, $AD = CF$,

$\therefore$ 四边形 $ACFD$ 是平行四边形,

又 $\because AF = CD$,

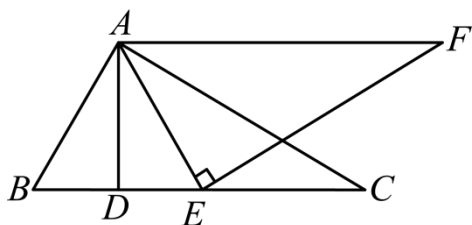
$\therefore$ 平行四边形 $ACFD$ 为矩形.

25. (本题 10 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, E 为边 BC 上的点, 且 $AB = AE$, D 为线段 BE 的中点, 过点 E 作 $EF \perp AE$, 过点 A 作 $AF \parallel BC$, 且 AF, EF 相交于点 F .

(1) 求证: $\angle C = \angle BAD$.

(2)求证: $AC = EF$.

(3)若 $\angle B = 60^\circ$, 把 $\triangle ADC$ 绕点 A 逆时针旋转得到 $\triangle AGH$, 点 D 的对应点为点 G , 当点 G 落在 $\triangle AEF$ 的边上时, 请直接写出 $\angle BDG$ 的度数.



【详解】(1) 证明: $\because AB = AE$, D 为线段 BE 的中点,

$\therefore AD \perp BE$,

$\therefore \angle ADB = 90^\circ$.

$\because \angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore \angle ADB = \angle BAC = \angle ADC$.

$\therefore \angle B + \angle C = 90^\circ$, $\angle B + \angle BAD = 90^\circ$,

$\therefore \angle C = \angle BAD$.

(2) 证明: $\because AF \parallel BC$,

$\therefore \angle F = \angle FEC$.

$\because AB = AE$,

$\therefore \angle B = \angle AEB$.

$\because \angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore \angle B + \angle C = 90^\circ$.

$\because EF \perp AE$,

$\therefore \angle AEF = 90^\circ$,

$\therefore \angle AEB + \angle FEC = 90^\circ$,

$\therefore \angle C = \angle FEC$,

$\therefore \angle C = \angle F$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EAF$ 中,

$$\begin{cases} \angle C = \angle F, \\ \angle BAC = \angle AEF, \\ AB = AE, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle EAF$ (AAS) ,

$$\therefore AC = EF.$$

(3) 解: $\because AB = AE$, $\angle B = 60^\circ$,

$\therefore ABE$ 是等边三角形.

$\therefore AD \perp BE$,

$$\therefore \angle DAE = \frac{1}{2} \angle BAE = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ, \quad \angle ADB = 90^\circ.$$

分两种情况:

①如图 1, 当点 G 落在边 AE 上时.

$$\because AD = AG, \quad \angle DAG = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ADG = \angle AGD = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle BDG = \angle ADB + \angle ADG = 90^\circ + 75^\circ = 165^\circ;$$

②如图 2, 当点 G 落在边 AF 上时.

$\therefore AF \parallel BC$,

$$\therefore \angle DAG = \angle ADB = 90^\circ.$$

$$\because AD = AG,$$

$$\therefore \angle ADG = \angle AGD = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 90^\circ) = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BDG = \angle ADB + \angle ADG = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ.$$

综上所述, $\angle BDG$ 的度数为 165° 或 135° .

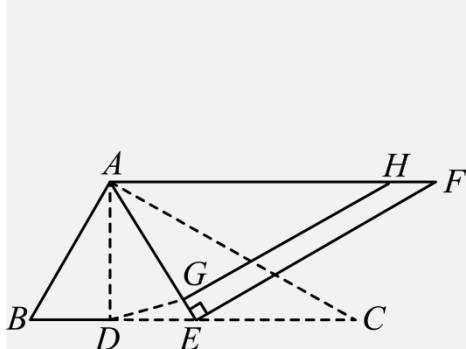


图1

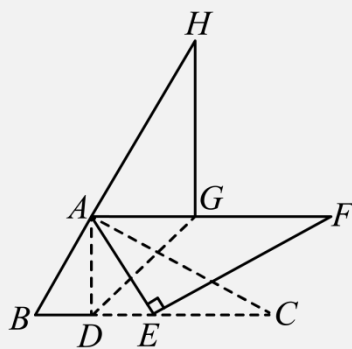
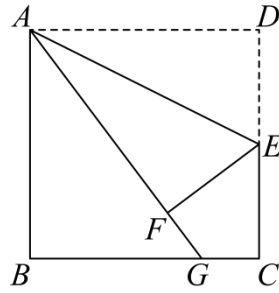


图2

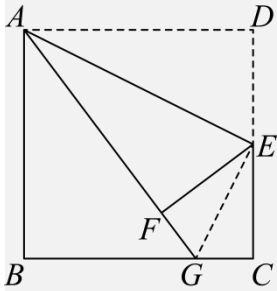
26. (本题 10 分) 如图, 点 E 是正方形 $ABCD$ 的边 CD 的中点, 将 $\triangle ADE$ 沿 AE 翻折至 $\triangle AFE$, 延长 AF 交边 BC 于点 G .

(1) 求证: $CG = FG$;

(2) 若正方形的边长为 2, 求 BG 的长.



【详解】(1) 解：连接 EG ，如图，



$\because$ 正方形 $ABCD$ ，

$\therefore AB = BC = CD = AD$ ， $\angle D = \angle C = 90^\circ$

$\because$ 点 E 是 CD 中点，

$\therefore DE = EC$ ，

由折叠可知： $\triangle ADE \cong \triangle AFE$ ，

则 $AF = AD$ ， $\angle AFE = \angle D = 90^\circ$ ， $FE = DE$ ，

$\therefore EF = EC$ ，

在 $\text{Rt}\triangle EFG$ 和 $\text{Rt}\triangle ECG$ 中，

$$\begin{cases} EF = EC \\ EG = EG \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle EFG \cong \text{Rt}\triangle ECG (\text{HL})$ 。

$\therefore FG = GC$ ；

(2) 由 (1) 知： $CG = FG$ ， $AF = AD$ ，

设 $GC = FG = x$ ，

$\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 2，

$\therefore AB = BC = CD = AD = 2$ ，

则 $BG = BC - CG = 2 - x$ ， $AG = AF + FG = 2 + x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABG$ 中，

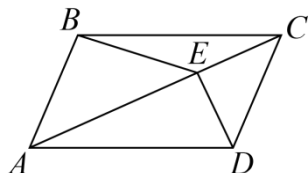
$$\therefore AB^2 + BG^2 = AG^2,$$

$$\therefore 2^2 + (2-x)^2 = (x+2)^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BG = BC - CG = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

27. (本题 12 分) 已知: 在 $ABCD$ 中, $DE \perp AC$ 于点 E .

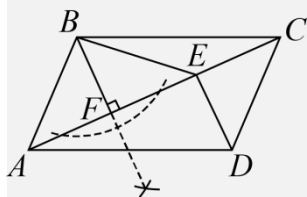


(1) 尺规作图: 作线段 BF , 使 $BF \perp AC$ 交 AC 于点 F ; (要求: 不写作法, 保留作图痕迹)

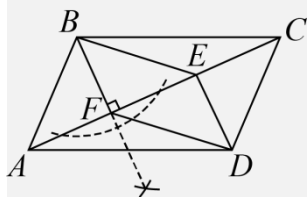
(2) 在 (1) 的基础上, 连接 DF , BE , 求证: 四边形 $BEDF$ 是平行四边形;

(3) 连接 BE , 若 $AD = 4$, $AC = 3\sqrt{3}$, $\angle BCA = 30^\circ$, 则 $BE = \underline{\hspace{2cm}}$.

【详解】(1) 解: 如图, 点 F 即为所求作,



(2) 证明: 如图,



$$\therefore BF \perp AC, DE \perp AC,$$

$$\therefore BF \parallel DE,$$

$$\therefore \angle AFB = \angle CED = \angle BFE = \angle DEF = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB \parallel CD, AB = CD,$$

$$\therefore \angle BAF = \angle DCE,$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CDE (\text{AAS}),$$

$$\therefore BF = DE,$$

∴ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

(3) 解: ∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD = BC = 4,$$

$$\therefore \angle BCA = 30^\circ,$$

$$\therefore BF = \frac{1}{2}BC = 2,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle BFC \text{ 中, } CF = \sqrt{BC^2 - BF^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

由 (2) 知, $\triangle ABF \cong \triangle CDE$,

$$\therefore AF = CE = AC - CF = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3},$$

$$\therefore EF = AC - AF - CE = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle BFE \text{ 中, } BE = \sqrt{BF^2 + EF^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7},$$

故答案为: $\sqrt{7}$.

28. (本题 12 分) 已知, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 将边 CB 绕点 C 顺时针旋转得 CD , 使 A 、 D 两点在直线 BC 的同侧, 连接 AD , BD , $\angle BAC = \angle BDC$, 过点 A 作 $AE \perp BD$ 于点 E .

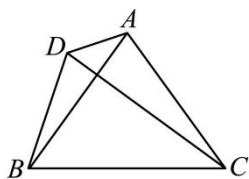


图1

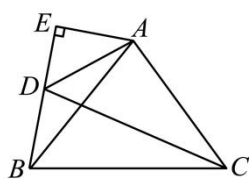


图2

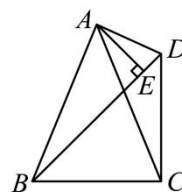


图3

(1) 如图 1, 若 $\angle BCD = 2\angle ACD$, 求 $\angle ACD$ 的度数;

(2) 如图 2, 若 $\angle BCD < \angle ACB$, 猜想线段 CD 、 BD 、 DE 三者之间的数量关系并证明;

(3) 如图 3, 若 $\angle BCD > \angle ACB$, $DE = \sqrt{2} - 1$, $BC = 2$, 请直接写出 $\triangle ABC$ 的面积.

【详解】(1) 解: 设 $\angle ACD = \alpha$,

$$\therefore AB = AC, CB = CD,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB, \angle CBD = \angle CDB,$$

$$\therefore \angle BCD = 2\angle ACD = 2\alpha,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 3\angle ACD = 3\alpha,$$

$$\angle BDC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BCD) = 90^\circ - \alpha,$$

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB = 180^\circ - 6\alpha$$

$$\therefore \angle BAC = \angle BDC,$$

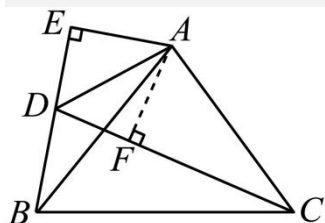
$$\therefore 180^\circ - 6\alpha = 90^\circ - \alpha,$$

$$\therefore \alpha = 18^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = 18^\circ;$$

(2) 解: $CD = BD + 2DE$, 理由如下,

过点 A 作 $AF \perp CD$ 于点 F,



$$\therefore AE \perp BD,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle AFC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle BDC,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACD,$$

在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle AFC$ 中,

$$\begin{cases} \angle AEB = \angle AFC \\ \angle ABE = \angle ACF, \\ AB = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEB \cong \triangle AFC,$$

$$\therefore CF = BE = BD + DE, \quad AE = AF,$$

$$\therefore DA \text{ 平分 } \angle EDF,$$

$$\therefore \angle EDA = \angle FDA,$$

在 $\triangle AED$ 和 $\triangle AFD$ 中,

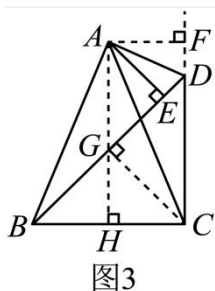
$$\begin{cases} \angle EDA = \angle FDA \\ \angle AED = \angle AFD, \\ AE = AF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AED \cong \triangle AFD,$$

$$\therefore DE = DF,$$

$$\therefore CD = CF + DF = BD + DE + DE = BD + 2DE;$$

(3) 解: 如图, 作 $AF \perp CD$ 于点 F, $CG \perp BD$ 于点 G, $AH \perp BC$ 于点 H,



$$\therefore \angle BAC = \angle BDC ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACD ,$$

$$\therefore \angle F = \angle AEB = 90^\circ , \quad AB = AC ,$$

$$\therefore ABE \cong ACF (AAS) ,$$

$$\therefore AE = AF , \quad BE = CF ,$$

$$\therefore DA \text{ 平分 } \angle EDF ,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle ADF ,$$

$$\therefore \angle AED = \angle AFD = 90^\circ ,$$

$$\therefore AED \cong ADF (AAS) ,$$

$$\therefore DF = DE = \sqrt{2} - 1 ,$$

$$\therefore BC = CD = 2 ,$$

$$\therefore CF = CD + DF = 2 + (\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} + 1 ,$$

$$\therefore BE = CF = \sqrt{2} + 1 ,$$

$$\therefore BD = BE + DE = \sqrt{2} + 1 + (\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} ,$$

$$\therefore BC = CD, CG \perp BD ,$$

$$\therefore DG = \frac{1}{2} BD = \sqrt{2} ,$$

$$\therefore CG = \sqrt{CD^2 - DG^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2} ,$$

$$\therefore DG = CG , \quad \therefore \angle DCG = 45^\circ ,$$

$$\therefore \angle BCD = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle AHC = \angle HCF = \angle F = 90^\circ ,$$

$$\therefore AF \parallel CH, AH \parallel CF ,$$

$$\therefore AH = CF = \sqrt{2} + 1 ,$$

$$\therefore S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \times 2 \times (\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2} + 1 .$$