2024-2025学年八年级数学下学期第一次月考卷

（考试时间：120分钟　试卷满分：100分）

注意事项：

1．本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分。答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答第I卷时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。

3．回答第II卷时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

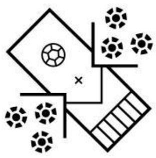
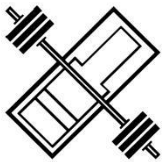
4．测试范围：苏科版八年级下册第7章-第9章。

5．难度系数：0.85。

第I卷

一、选择题：本题共8小题，每小题2分，共16分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．在2024年巴黎奥运会上，中国体育代表队获得40金、27银和24铜共91枚奖牌，创造了中国参加境外奥运会的最佳战绩．以下是巴黎奥运会部分项目的图标，其中是中心对称图形的是（　　）

A． 　　B． 

C． 　　D． 

【答案】C

【详解】解：A、该图不能找到这样的一个点，使图形绕这个点旋转180°后与原来的图形重合，

∴不是中心对称图形，故本选项不符合题意；

B、该图不能找到这样的一个点，使图形绕这个点旋转180°后与原来的图形重合，

∴不是中心对称图形，故本选项不符合题意；

C、该图能找到这样的一个点，使图形绕这个点旋转180°后与原来的图形重合，

∴是中心对称图形，故本选项符合题意；

D、该图不能找到这样的一个点，使图形绕这个点旋转180°后与原来的图形重合，

∴不是中心对称图形，故本选项不符合题意．

故选：C．

2．下列调查中，适合采用抽样调查的是（　）

A．了解神舟十九号零件质量情况　　B．了解我校七（1）班学生的身高状况

C．富士康招聘，对应聘人员面试　　D．调查河南省中学生的视力状况

【答案】D

【详解】解：A. 了解神舟十九号零件质量情况，适合采用全面调查，故此选项不符合题意；

B. 了解我校七（1）班学生的身高状况，适合采用全面调查，故此选项不符合题意；

C. 富士康招聘，对应聘人员面试，适合采用全面调查，故此选项不符合题意；

D. 调查河南省中学生的视力状况，适合采用抽样调查，故此选项符合题意；

故选：D．

3．掷一枚质地均匀的硬币200次，下列说法正确的是（　）

A．不可能200次正面朝上　　B．不可能100次正面朝上

C．必有100次正面朝上　　D．可能100次正面朝上

【答案】D

【详解】解：掷一枚质地均匀的硬币200次，

A、可能200次正面朝上，故原选项错误，不符合题意；

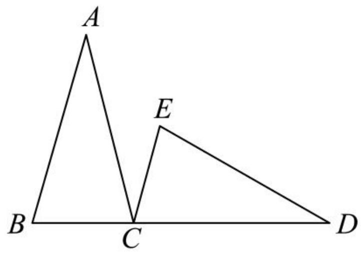
B、可能100次正面朝上，故原选项错误，不符合题意；

C、可能100次正面朝上，故原选项错误，不符合题意；

D、可能100次正面朝上，原选项正确，符合题意；

故选：D．

4．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=75°$，将$\triangle ABC$绕点C旋转，得到$\triangle DEC$．若点A的对应点D恰好在BC的延长线上，则旋转方向和旋转角可能是（　）



A．顺时针，105°　B．逆时针，105°　C．顺时针，75°　D．逆时针，75°

【答案】A

【详解】解：将$\triangle ABC$绕点C旋转，得到 DEC，且点A的对应点D恰好在BC的延长线上，

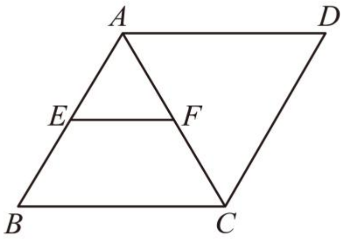
$\therefore \angle ACD = 180° - \angle ACB = 180° - 75° = 105°$，

$\therefore$ 旋转方向为顺时针时,旋转角度为$105°$；

旋转方向为逆时针时,旋转角度为$360° - 105° = 255°$.

故选：A.

5．如图，菱形$ABCD$中，E，F分别是AB，AC的中点，若$EF = 2$，则菱形$ABCD$的周长为（ ）



A．14　　B．16　　C．15　　D．17

【答案】B

【详解】解：$\because E$、F分别是AB、AC的中点，

$\therefore EF$是$\triangle ABC$的中位线，

$\therefore BC = 2EF = 4$，

$\therefore$菱形的周长为$4 \times 4 = 16$.

故选：B.

6．用反证法证明真命题“四边形中至少有一个角是钝角或直角”时，应假设（ ）

A．四边形中至多有一个角是钝角或直角　B．四边形中至少有两个角是钝角或直角

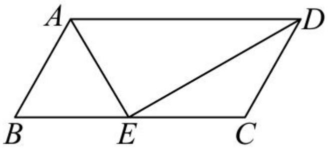
C．四边形中四个角都是钝角或直角　D．四边形中没有一个角是钝角或直角

【答案】D

【详解】解：用反证法证明真命题“四边形中至少有一个角是钝角或直角”时，应假设“四边形中没有一个角是钝角或直角”.

故选：D.

7．如图，在平行四边形$ABCD$中，$\angle BAD$的平分线和$\angle CDA$的平分线交于BC上一点E，若$AB = 2, AE = 3$，则DE的长为（ ）



A. $\sqrt{7}$　　B. 5　　C. $\sqrt{6}$　　D. $\frac{5}{2}$

【答案】A

【详解】解：∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$AB=2$，

∴ $AD=BC,CD=AB=2,AD\parallel BC,\angle BAD+\angle ADC=180^\circ$，

∴ $\angle CED=\angle ADE,\angle AEB=\angle DAE$，

∵ $\angle BAD$ 的平分线和 $\angle CDA$ 的平分线交于 BC 上一点 E，

∴ $\angle BAE=\angle DAE=\frac{1}{2}\angle BAD,\angle CDE=\angle ADE=\frac{1}{2}\angle ADC$，

∴ $\angle AEB=\angle BAE,\angle CED=\angle CDE$，

∴ $CE=CD=2,AB=BE=2$，

∴ $AD=BC=BE+CE=4$，

∴ $\angle DAE+\angle ADE=\frac{1}{2}(\angle BAD+\angle CDA)=90^\circ$，

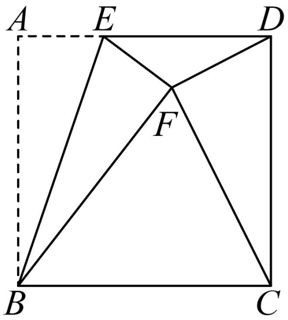
∴ $\angle AED=180^\circ-\angle DAE-\angle ADE=90^\circ$，

∵ $AE=3$，

∴ $DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=\sqrt{7}$，

故选：A．

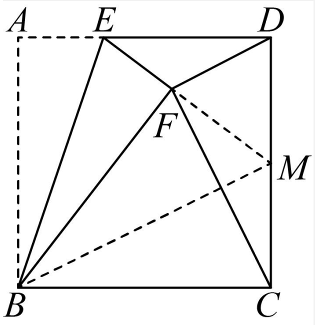
8．如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为3，点 E 是正方形 $ABCD$ 的边 AD 上的一点，点A关于 BE 的对称点为 F，若 $\angle DFC=90^\circ$，则 EF 的长为（　）



A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 1.5　　D. $\sqrt{3}$

【答案】A

【详解】解：如图，延长 EF 交 CD 于 M，连接 BM，



∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB = BC$， $\angle A = \angle BCD = 90°$，

∵点 A 关于直线 BE 的对称点为 F，

$\therefore \angle BFE = \angle BFM = 90°$， $AB = BF = BC$

在 $\mathrm{Rt}\ BFM$ 与 $\mathrm{Rt}\ BCM$ 中，

$\begin{cases} BF = BC \\ BM = BM \end{cases}$，

$\therefore \mathrm{Rt}\ BFM \cong \mathrm{Rt}\ BCM\,(\mathrm{HL})$，

$\therefore MF = MC$，

$\therefore \angle MFC = \angle MCF$，

$\because \angle MFC + \angle DFM = 90°$， $\angle MCF + \angle FDM = 90°$，

$\therefore \angle MFD = \angle MDF$，

$\therefore MD = MF = MC$，

∵正方形 $ABCD$ 的边长为 3，

$\therefore MF = MC = DM = 1.5$，

设 $AE = EF = x$，

$\because DE^2 + DM^2 = EM^2$，

即 $(3-x)^2 + 1.5^2 = (x+1.5)^2$，

解得： $x = 1$.

故答案为：1.

第II卷

二、填空题：本题共 8 小题，每小题 2 分，共 16 分。

9．调查乘坐飞机的旅客是否携带违禁品的情况，最适合采用的调查方式是____________．（选填“全面调查”

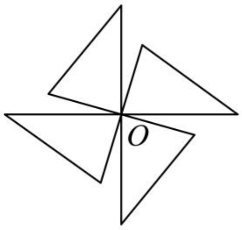
或“抽样调查”）

【答案】全面调查

【详解】解：调查乘坐飞机的旅客是否携带违禁品的情况，适宜采用全面调查方式，

故答案为：全面调查．

10．图中的风车图案，绕着它的中心O旋转，旋转角至少为___________度，旋转后的风车能与自身重合．



【答案】90

【详解】解：$360°\div4=90°$，

∴绕着它的中心O旋转，旋转角至少$90°$，旋转后的风车能与自身重合，

故答案为：90．

11．一个不透明的袋中有若干个除颜色外完全相同的小球，其中黄球有6个，将袋中的球摇匀后，从中随机摸出一个球，记下它的颜色后再放回袋中，通过大量重复摸球试验后发现,摸到黄球的频率稳定在0.4左右，则袋中小球的个数为___________．

【答案】15

【详解】解：∵通过大量重复摸球试验后发现，摸到黄球的频率稳定在0.4左右，口袋中黄球有6个，

∴袋中小球的个数为6，$0.4=15$（个）．

故答案为：15．

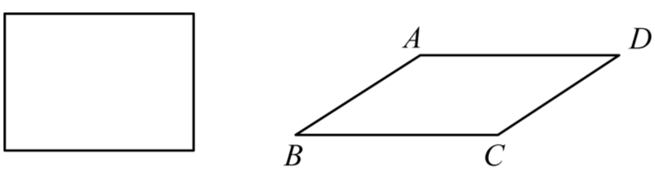
12．若菱形的对两条对角线长分别是10cm和24cm，则这菱形的面积为___________．

【答案】120cm^2

【详解】解：这个菱形的面积是：$\frac{1}{2}\times10\times24=120\left(\text{cm}^2\right)$．

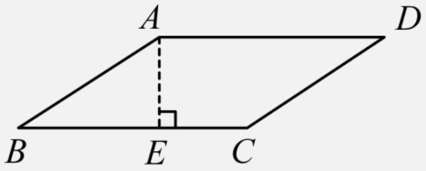
故答案为：120cm^2

13．将四根木条钉成的长方形木框变为 $ABCD$的形状，并使其面积为长方形面积的一半（木条宽度忽略不计），则这个平行四边形的最小内角为___________度．



【答案】30

【详解】解：如图，过点A作 $AE \perp BC$ 于点 E，



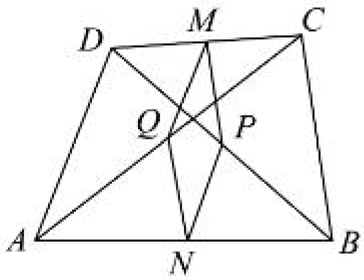
∵将四根木条钉成的长方形木框变形为 $ABCD$ 的形状，并使其面积为长方形面积的一半（木条宽度忽略不计），

∴当 $AE=\frac{1}{2}AB$，则符合要求，此时 $\angle B=30^{\circ}$，

即这个平行四边形的最小内角为：30度．

故答案为：30．

14．如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD=BC$，P、M、N、Q 分别是 BD、DC、AB、AC 的中点，若 $AD=8$，则四边形 $PMQN$ 的周长为___________．



【答案】16

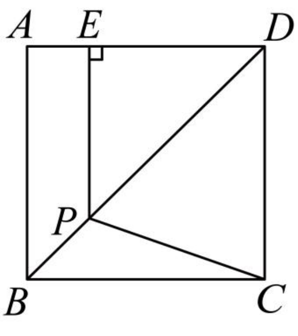
【详解】解：∵ $AD=BC=8$，P、M、N、Q分别是 BD、DC、AB、AC 的中点，

∴ $PN=QM=\frac{1}{2}AD=4$，$PM=QN=\frac{1}{2}BC=4$，

∴四边形 $PMQN$ 的周长为 $PM+MQ+QN+NP=4+4+4+4=16$；

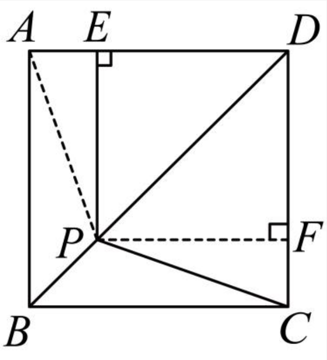
故答案为：16．

15．如图，P 是正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 上的一点，$PE \perp AD$ 于点 E，连接 CP，若 $AE=1$，$PC=\sqrt{10}$，则点 D 到 CP 的距离为___________．



【答案】$\frac{6\sqrt{10}}{5}$

【详解】解：如图所示，连接 AP，过点 P 作 $PF\perp CD$ 交 CD 于点 F，



∵四边形 $ABCD$ 是正方形，BD 是对角线，

∴ $AP=PC=\sqrt{10}$，$\angle ADC=90^\circ$，

∵ $PE\perp AD$，$AE=1$，

∴ $PE=\sqrt{AP^2-AE^2}=3$，

∵ $\angle EDP=45^\circ$，

∴ $\triangle EDP$ 是等腰直角三角形，

∴ $DE=PE=3$，

∴ $CD=AD=AE+DE=4$；

∵ $PF\perp CD$，$PE\perp AD$，$\angle ADC=90^\circ$，

∴四边形 $PEDF$ 是矩形，

∴ $PF=DE=3$；

设点 D 到 CP 的距离为 h，

∴ $S_{\ PCD}=\frac{1}{2}CD\cdot PF=\frac{1}{2}PC\cdot h$，

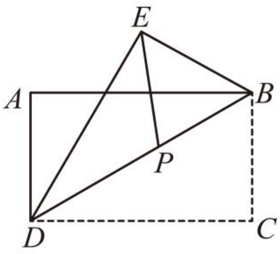
∴ $\frac{1}{2}\times4\times3=\frac{1}{2}\sqrt{10}h$，

∴ $h=\frac{6\sqrt{10}}{5}$，

∴点 D 到 CP 的距离为 $\frac{6\sqrt{10}}{5}$．

故答案为：$\frac{6\sqrt{10}}{5}$．

16．如图，将长方形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折叠，$BC=3$，$\angle ABD=30^\circ$．点 P 是线段 BD 上一点．则 $EP+\frac{1}{2}DP$ 的最小值为___________．



【答案】$\frac{9}{2}$

【详解】解：∵在长方形 $ABCD$ 中， $BC=3$， $\angle ABD=30°$，

∴ $\angle ADC=\angle C=90°$，

∴ $BD=2DC=6$，$DC=\sqrt{BD^2-BC^2}=3\sqrt{3}$，

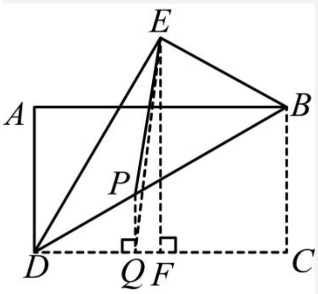
∵将长方形 $ABCD$ 沿对角线 BD 折叠，得 BED，

∴ $\angle EDB=\angle BDC=30°, DE=DC=3\sqrt{3}$，

∴ $\angle EDC=60°$，

过点 P 作 $PQ\perp BC$ 于点 Q，连接 EQ 过点 E 作 $EF\perp DC$ 于点 F，则：$\angle PQD=90^{\circ}$，

$\angle EFD = 90^{\circ}$



∵ $\angle DBC=30^{\circ}$，

∴ $PQ=\frac{1}{2}DP$，

∴ $EP+\frac{1}{2}DP=EP+PQ\geq EQ$，

∴当 E，P，Q 三点共线时， $EP+\frac{1}{2}DP$ 的值最小为 EQ 的长，

∵点到直线，垂线段最短，

∴当 $EQ\perp DC$ 时， EQ 最小，即点 Q 与点 F 重合，

∵ $\angle EDC=60^{\circ}$，

∴ $\angle DEF=30^{\circ}$，

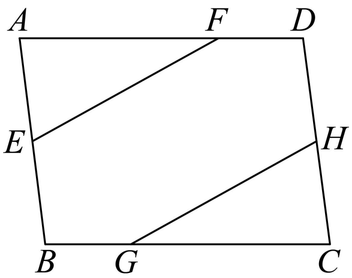
∴ $DF=\frac{1}{2}DE=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

∴ $EF=\sqrt{DE^2-DF^2}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2-(\frac{3\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{9}{2}$，

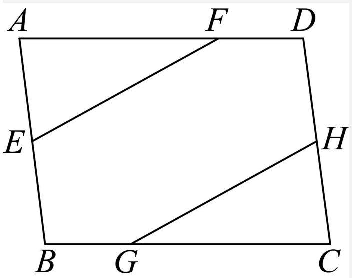
即：$EP+\frac{1}{2}BP$ 的最小值为 $\frac{9}{2}$．

三、解答题：本题共 11 小题，共 68 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步聚。

17.（5 分）如图，在 $ABCD$ 中，E，G，H，F 分别是 AB，BC，CD，DA 上的点，且 $AE=CH$，$AF=CG$．求证：$EF=HG$．



【详解】证明：四边形 $ABCD$ 是平行四边形，



∴ $\angle A=\angle C$，

∵在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle CHG$ 中，

$$\begin{cases}AF=CG\\ \angle A=\angle C\\ AE=CH\end{cases}，$$

∴ $\triangle AEF\cong\triangle CHG$，

∴ $EF=HG$． ……………………………………………5 分

18.（5 分）在一个不透明的袋子里装有只有颜色不同的黑、白两种颜色的球共 50 个，某学习小组做摸球试验，将球搅匀后从中随机摸出一个球记下颜色，再把它放回袋中，不断重复，下表是活动进行中的一组统计数据：

摸球的次数 n	100	200	300	500	800	1000

摸到黑球的次数 m	65	118	189	310	482	602
摸到黑球的频率 $\frac{m}{n}$	0.65	0.59	0.63	0.62	0.603	0.602

(1)估计一次摸出一个球能摸到黑球的概率是_______（精确到 0.1）；

(2)试估计袋子中黑球的个数．

【详解】（1）由表可知，当 n 很大时，摸到黑球的频率将会接近 0.6，

所以“摸到白球”的概率的估计值是 0.6；………………………………………2 分

（2）因为当 n 很大时，摸到黑球的频率将会接近 0.6；

所以黑球的个数约为 $50\times 0.6=30$ 个．…………………………………………5 分

19．（5 分）2023 年 4 月 23 日是第 28 个世界读书日．学校为营造“爱读书、多读书、读好书”浓厚氛围，开展了“书香校园，阅读有我”的读书活动．在 5 月份，为了解九年级学生的读书情况，随机调查了九年级 40 名学生读书数量（单位：本），并进行了以下数据的整理与分析：

数据收集

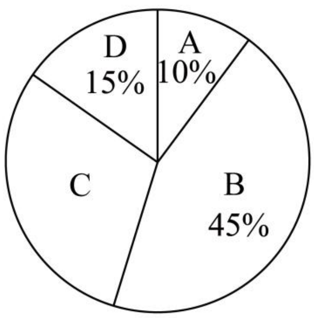
2 5 3 5 4 6 1 5 3 4 2 2 3 3 4 4 4 4 3 4

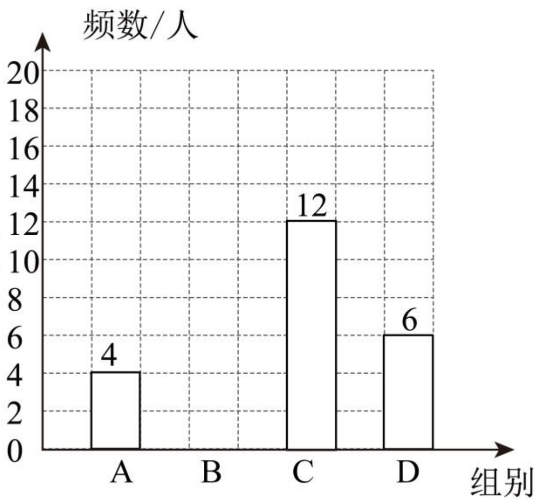
4 5 6 7 3 6 7 5 8 3 4 7 3 4 6 5 5 5 7 8

数据整理

本数	$0<x\le 2$	$2<x\le 4$	$4<x\le 6$	$6<x\le 8$
组别	A	B	C	D
频数	4	m	12	n

数据分析 绘制成不完整的扇形统计图和条形统计图：





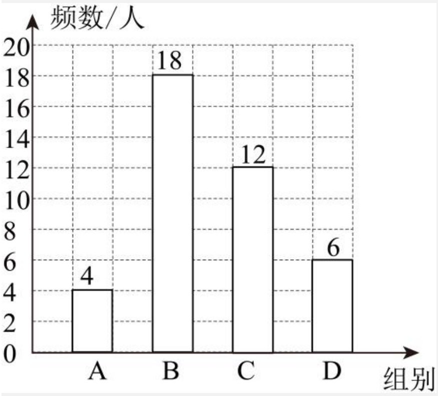
依据统计信息回答问题：

(1)在统计表中，$m=$______；在条形统计图中，补全组别 B 的条形图示.

(2)在扇形统计图中，C 部分对应的圆心角的度数为______度；

(3)若该校九年级学生人数为 240 人，请根据上述调查结果，估计该校九年级学生读书在 4 本以上的人数.

【详解】（1）由条形统计图可得：$m=40-4-12-6=18$



……………………………………1 分

（2）解：$\frac{12}{40}\times100\%=30\%$，$360°\times30\%=108°$，

故答案为：$108°$．……………………………………3 分

（3）解：∵40 人中共有 $6+12=18$ 名学生读书在 4 本以上，

∴ $240\times\frac{18}{40}\times100\%=108$（人）……………………………………5 分

答：该校八年级学生读书在 4 本以上的人数为 108 人.

20．（5 分）同学们利用几何画图软件开展了"图案设计"项目式学习，下面是三位同学在 4×4 的正方形网格中设计的三种不同图案的一部分，请将图 1 中的图案补成既是轴对称图形，又是中心对称图形，将图 2 中的图案补成中心对称图形，在图 3 中设计一个图案，使其是中心对称图形，但不是轴对称图形.

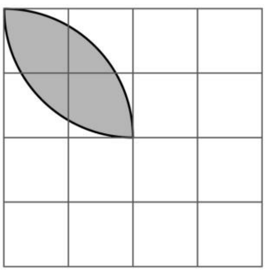


图1

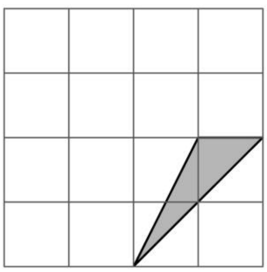


图2

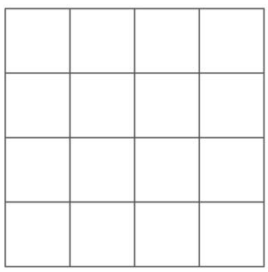


图3

【详解】解：如图，答案不唯一.

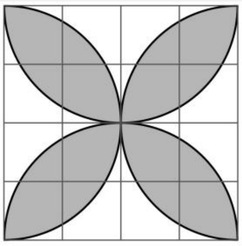


图1

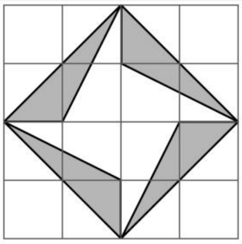


图2

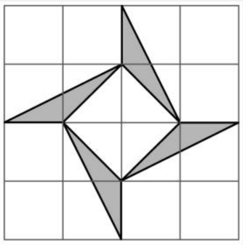
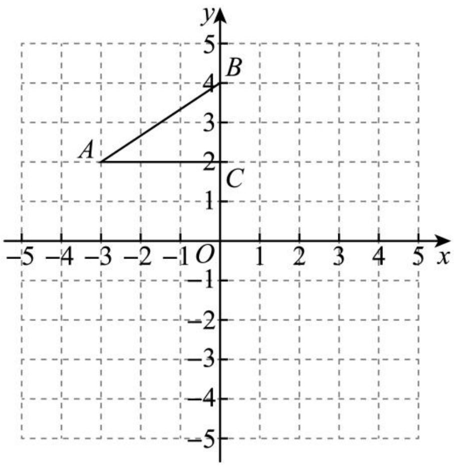


图3

……………………………………………5 分

21．（5 分）在平面直角坐标系中，Rt△ABC 的三个顶点分别是 $A\left(-3,2\right)$，$B\left(0,4\right)$，$C\left(0,2\right)$

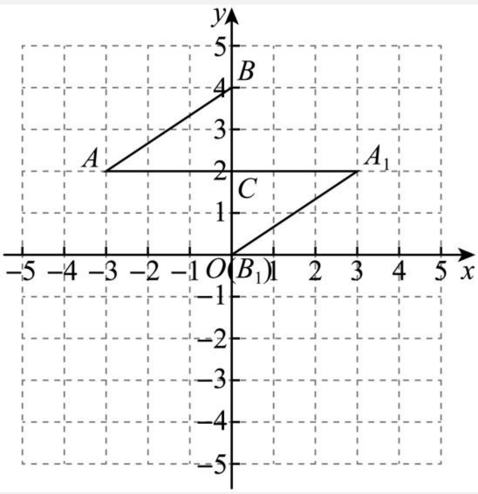


(1)将V ABC 以点 C 为旋转中心旋转$180°$，画出旋转后对应的 A_1B_1C；

(2)将V ABC 以点 O 为旋转中心逆时针旋转$90°$，画出旋转后对应的$\triangle A_2B_2C_2$；

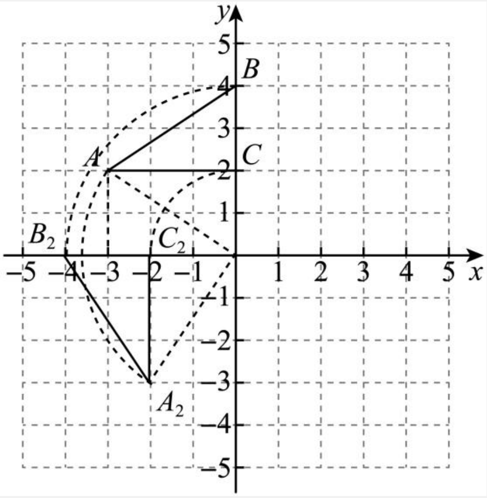
(3)在 x 轴上有一点 P，使得 $PA+PB$ 的值最小，请直接写出点 P 的坐标．

【详解】（1）解：如图，



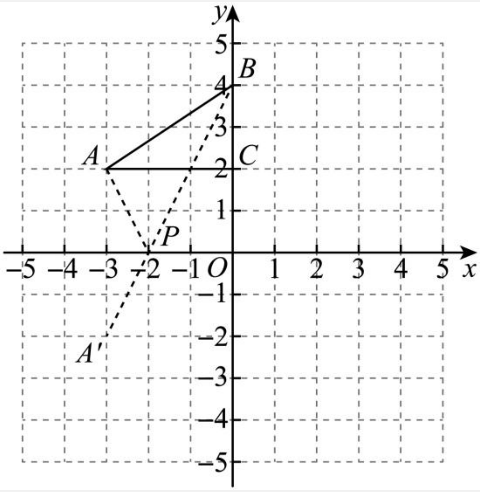
∴ A_1B_1C 即为所求；……………………………………………1 分

（2）解：如图，



∴$\triangle A_2B_2C_2$即为所求；…………………………………………2 分

（3）解：如图，作点 A 关于x轴的对称点A'，连接AA'，与x轴交于点P，



∴ $PA = PA'$，

∴根据两点之间线段最短可得：$PA + PB = PA' + PB = A'B$，

根据网格可知：点P的坐标为$(-2,0)$，

∴点P即为所求，点P的坐标为$(-2,0)$．…………………………………………5 分

22．（5 分）如图，在 $ABCD$ 中，点E在BC上，$AB = BE$，BF平分$\angle ABC$交AD于点F，请用无刻度的直尺画图(保留作图痕迹，不写画法)．

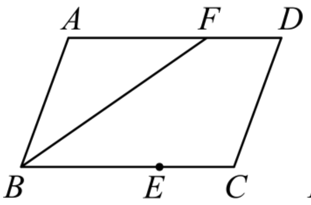


图1

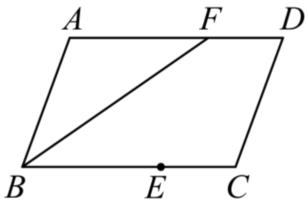


图2

(1)在图1中，过点A 画出△ABF 中 BF 边上的高 AG；

(2)在图 2 中，过点 C 画出 C 到 BF 的垂线段 CH .

【详解】(1) 解：如图 1， AG 即为所求.

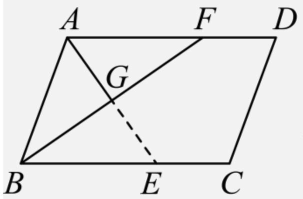


图1

. ...2 分

(2) 解：如图 2，连接 AC， BD 交于点 O，作射线 EO，交 AD 于 G，连接 CG，交 BF 于 H，则 CH 即为所求.

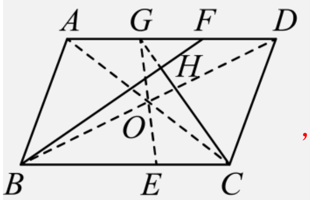


图2

，

理由是：如图 3，连接 AE，

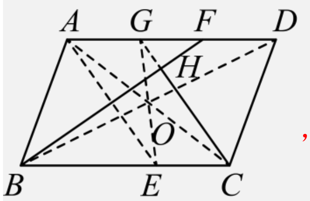


图3

，

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $OA = OC$， $AG // CE$，

∴ $\angle AGO = \angle CEO$，

∵ $\angle AOG = \angle COE$，

∴ $AOG \cong COE(AAS)$，

∴ $OG = OE$，

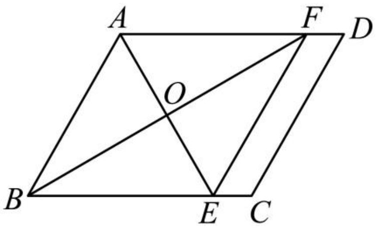
∴四边形 $AECG$ 是平行四边形，

∴ $AE // CG$，

∵ $AE \perp BF$，

∴ $CG \perp BF$，即 $CH \perp BF$． ……………………………………………5 分

23．（6 分）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 F 在边 AD 上，$AB = AF$，连接 BF，点 O 为 BF 的中点，AO 的延长线交边 BC 于点 E，连接 EF．



(1)求证：四边形 $ABEF$ 是菱形；

(2)若平行四边形 $ABCD$ 的周长为 24，$CE = 2$，$\angle BAD = 120°$，求 AE 的长．

【详解】（1）证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AD // BC$，

∴ $\angle AFB = \angle EBF$，$\angle FAE = \angle BEA$

∵ O 为 BF 的中点，

∴ $BO = FO$，

∴ $\triangle AOF \cong \triangle EOB$，

∴ $BE = FA$，

∴四边形 $ABEF$ 是平行四边形，

又 $AB = AF$，

∴平行四边形 $ABEF$ 是菱形； ……………………………………………3 分

（2）解：∵ $AD = BC$，$AF = BE$，

∴ $DF = CE = 2$，

∵平行四边形 $ABCD$ 的周长为 24，

∴菱形 $ABEF$ 的周长为：$24 - 4 = 20$，

∴ $AB = 20 \div 4 = 5$，

∵ $\angle BAD = 120°$，

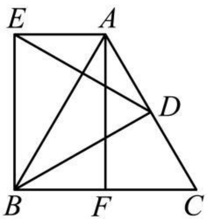
$\therefore \angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAD=60^{\circ}$，

又 $AB=BE$，

∴ ABE 是等边三角形，

$\therefore AE=AB=5$． ……………………………………………6 分

24.（6 分）如图，在等边$\triangle ABC$ 中，点 D 是 AC 的中点，AF 是 BC 边上的中线，连接 BD，以 BD 为边作等边$\triangle BDE$，连接 AE．



(1)求证：四边形 $AEBF$ 为矩形；

(2)若 $AC=4$，求四边形 $AEBF$ 的面积．

【详解】（1）证明：∵ ABC 是等边三角形，点 D 是 AC 的中点，AF 是 BC 边的中线，

$\therefore AF=BD, \angle CBD=30^{\circ}, AF\perp BC$，

∵ BDE 是等边三角形，

$\therefore BE=BD, \angle DBE=60^{\circ}$，

$\therefore AF=BD=BE, \angle EBF=\angle AFB=90^{\circ}$，

$\therefore AF /\!/ BE$,

∴四边形 $AEBF$ 是平行四边形，

又$\because \angle AFB=90^{\circ}$,

∴四边形 $AEBF$ 是矩形．……………………………………………3 分

（2）解：$\because AC=4, \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore BC=AC=AB=4$，

∵ AF 是 BC 边的中线，

$\therefore \angle AFB=90^{\circ}, BF=\frac{1}{2}BC=2$，

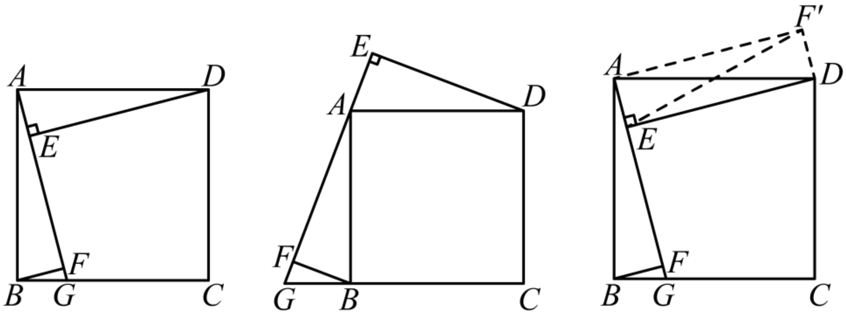
在 Rt ABF 中，由勾股定理得：$AF=\sqrt{AB^{2}-BF^{2}}=2\sqrt{3}$，

又∵四边形 $AEBF$ 是矩形，

$\therefore S_{矩形AEBF}=AF\cdot BF=2\sqrt{3}\times 2=4\sqrt{3}$． ……………………………………………6 分

25．（8 分）教材中有这样一道题：如图①所示，四边形 $ABCD$ 是正方形，G 是 BC 上的任意一点，$DE \perp AG$ 于点 E，BF DE，且交 AG 于点 F．求证：$AF - BF = EF$．

小明通过证明△AED≌△BFA 解决了问题，在此基础上他进一步提出了以下问题，请你解答．



图①　图②　图③

(1)若图①中的点 G 为 CB 延长线上一点，其余条件不变，如图②所示，猜想此时 AF、BF、EF 之间的数量关系，并证明你的结论；

(2)将图①中的△ABF 绕点 A 逆时针旋转，使得 AB 与 AD 重合，记此时点 F 的对应点为点 F'，如图③所示，若正方形的边长为 6，求 EF' 的长度．

【详解】（1）解：$AF + BF = EF$．

证明如下：

$\because$ 正方形 $ABCD$，

$\therefore AB = AD$，$\angle BAD = \angle BAG + \angle EAD = 90°$．

$\because DE \perp AG$，

$\therefore \angle AED = 90°$．

$\therefore \angle EAD + \angle ADE = 90°$．

$\therefore \angle ADE = \angle BAF$．

又Q $BF // DE$，

$\therefore \angle AFB = \angle AED = 90°$．

在△AED 和V BFA 中，

$\because \angle AFB = \angle AED$，$\angle ADE = \angle BAF$，$AB = AD$．

$\therefore$ AED≌ BFA(AAS)．

$\therefore BF = AE$．

$\because AF + AE = EF$，

$\therefore AF + BF = EF$．……………………………………………4 分

（2）解：如图，由题设得$\triangle AED \cong \triangle BFA$，

$\therefore AF = DE$，

由旋转的性质知：$\angle FAF' = 90°$，$DE = AF' = AF$，

$\therefore \angle F'AE = \angle AED = 90°$，

$\therefore AF' // ED$．

$\therefore$四边形$AEDF'$为平行四边形．

又$\because \angle AED = 90°$，

$\therefore$四边形$AEDF'$是矩形．

$\therefore EF' = AD = 6$．……………………………………………8分

26．（8分）如图1，在$Rt\triangle ABC$中，$\angle A = 90°$，$AB = AC$，点D、E分别在边AB，AC上，$AD = AE$，连接DC，点M、P、N分别为DE，DC，BC的中点．

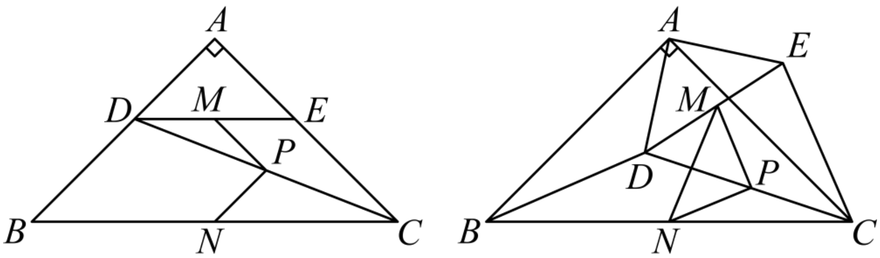


图1　图2

(1)求证：$PM = PN$，$PM \perp PN$；

(2)把$\triangle ADE$绕点A逆时针方向旋转到图2的位置，连接MN，BD，CE，判断$\triangle PMN$的形状，并说明理由；

(3)把$\triangle ADE$绕点A在平面内自由旋转，若$AD = 4$，$AB = 10$，请求出$\triangle PMN$面积的最大值．

【详解】（1）$\because$点P，N分别为DC，BC的中点，

$\therefore PN // BD$，$PN = \frac{1}{2}BD$，

$\because$点M，P分别为DE，DC的中点，

$\therefore PM // CE$，$PM = \frac{1}{2}CE$，

$\because AB = AC$，$AD = AE$，

$\therefore BD = CE$，

$\therefore PM = PN$，

$\because PN // BD$，

$\therefore \angle DPN = \angle ADC$，

$\because PM // CE$，

$\therefore \angle DPM = \angle DCA$，

$\because \angle A = 90°$，

$\therefore \angle ADC + \angle ACD = 90°$，

$\therefore \angle MPN = \angle DPM + \angle DPN = \angle DCA + \angle ADC = 90°$，

$\therefore PM \perp PN$． ……………………………………………2 分

（2）解： $\triangle PMN$ 是等腰直角三角形，理由如下：

由旋转知，$\angle BAD = \angle CAE$，

$\because AB = AC$， $AD = AE$，

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE(\mathrm{SAS})$，

$\therefore \angle ABD = \angle ACE$， $BD = CE$，

利用三角形的中位线得 $PN = \frac{1}{2}BD$， $PM = \frac{1}{2}CE$，

$\therefore PM = PN$，

$\therefore \triangle PMN$ 是等腰三角形，

同（1）的方法得 $PM // CE$，

$\therefore \angle DPM = \angle DCE$，

同（1）的方法得 $PN // BD$，

$\therefore \angle PNC = \angle DBC$，

$\because \angle DPN = \angle DCB + \angle PNC = \angle DCB + \angle DBC$，

$\therefore \angle MPN = \angle DPM + \angle DPN$

$= \angle DCE + \angle DCB + \angle DBC$

$= \angle BCE + \angle DBC$

$= \angle ACB + \angle ACE + \angle DBC$

$= \angle ACB + \angle ABD + \angle DBC$

$= \angle ACB + \angle ABC$，

$\because \angle A = 90°$，

$\therefore \angle ACB + \angle ABC = 90°$，

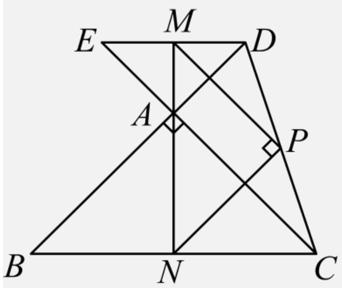
$\therefore \angle MPN = 90°$，

$\therefore \triangle PMN$ 是等腰直角三角形． ……………………………………………5 分

（3）解：由（2）知 $\triangle PMN$ 是等腰直角三角形， $PM = PN = \frac{1}{2}BD$，

∴当 BD 最大时，PM 最大，$S_{\triangle PMN}$ 的面积最大，

∴如图所示，当点 D 在 BA 的延长线上时，BD 最大，



此时可有 $BD = AB + AD = 14$，

∴ $PM = 7$，

∴ $S_{\triangle PMN\text{最大}} = \frac{1}{2}PM^2 = \frac{1}{2}\times 7^2 = \frac{49}{2}$． ....8 分

27．（10 分）【课本再现】

（1）如图 1，正方形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，点 O 又是正方形 $A_1B_1C_1O$ 的一个顶点，而且这两个正方形的边长都为 1，四边形 $OEBF$ 为两个正方形重叠部分，正方形 $A_1B_1C_1O$ 可绕点 O 转动．则下列结论正确的是______（填序号即可）：

①$\triangle AEO \cong \triangle BFO$；

②$OE = OF$；

③四边形 $OEBF$ 的面积总等于 $\frac{1}{4}$；

④连接 EF，总有 $AE^2 + CF^2 = EF^2$．

【类比迁移】

（2）如图 2，矩形 $ABCD$ 的中心 O 是矩形 $A_1B_1C_1O$ 的一个顶点，A_1O 与边 AB 相交于点 E，C_1O 与边 CB 相交于点 F，连接 EF，矩形 $A_1B_1C_1O$ 可绕着点 O 旋转，猜想 AE, CF, EF 之间的数量关系，并进行证明；

【拓展应用】

（3）如图 3，在 Rt$\triangle ACB$ 中，$\angle C = 90°, AC = 6\text{cm}, BC = 8\text{cm}$，直角 $\angle EDF$ 的顶点 D 在边 AB 的中点处，它的两条边 DE 和 DF 分别与直线 AC, BC 相交于点 $E, F, \angle EDF$ 可绕着点 D 旋转，当 $AE = 4\text{cm}$ 时，请直接写出 EF 的长度．

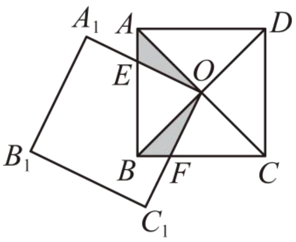


图1

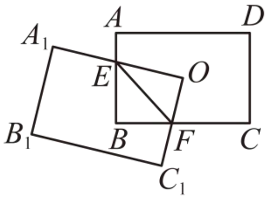


图2

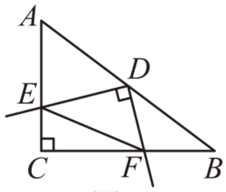
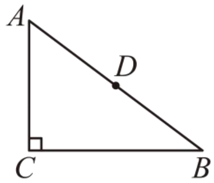


图3



（备用图）

【详解】（1）解：∵正方形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，点 O 又是正方形 $A_1B_1C_1O$ 的一个顶点，而且这两个正方形的边长都为 1，

∴ $\angle ABC=\angle AOB=\angle A'OC'=90°$； $\angle OAB=\angle OBA=\angle OBC=\angle OCB=45°$，

∴ $AB=BC$， $OA=OB=OC=OD$， $S_{正方形ABCD}=AB^2=1$，

∵ $\angle AOE=90°-\angle EOB=\angle BOF$， $OA=OB$，

∴ $AEO≌BFO(SAS)$，

∴ $OE=OF$，

故①②正确；

根据正方形的性质，得 $S_{AOB}=\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}=\frac{1}{4}$，

∵ $\triangle AEO≌\triangle BFO$，

∴ $S_{AEO}=S_{BFO}$， $AE=BF$，

∴ $S_{AEO}+S_{BEO}=S_{BFO}+S_{BEO}$，

∴ $S_{四边形OEBF}=S_{AOB}=\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}=\frac{1}{4}$，

故③正确；

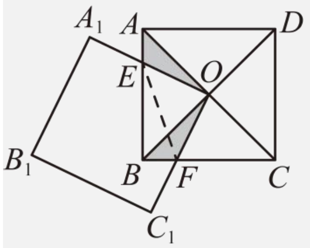
∵ $AE=BF$， $AB=BC$，

∴ $BE=CF$，

根据勾股定理得到 $BF^2+BE^2=EF^2$，

故 $AE^2+CF^2=EF^2$，

故④正确.



故答案为：①②③④． ………………………………………4 分

（2）解：连接 AC，延长 EO 交 CD 于点 G，

∵矩形 $ABCD$ 的中心 O 是矩形 $A_1B_1C_1O$ 的一个顶点，A_1O 与边 AB 相交于点 E，

∴ $\angle DCF=\angle EOF=90°$；$OA=OC$，$AE // CG$，

∴ $\angle EAO=\angle GCO$

∵ $\angle AOE=\angle COG$，

∴ $AEO≌ CGO$，

∴ $OG=OE, AE=CG$，

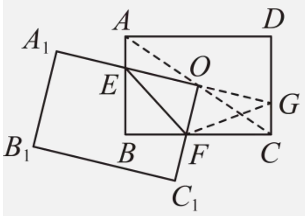
∵ $\angle EOF=90°$，

∴直线 OF 是线段 EG 的垂直平分线，

∴ $EF=FG$，

由勾股定理，得 $CF^2+CG^2=FG^2$，

故 $AE^2+CF^2=EF^2$．



（3）解：当点 E 在 AC 上时，

过点 B 作 BM　AC，交 ED 的延长线于点 M，连接 FM

∵ BM　AC，

∴ $\angle C+\angle CBM=180°$；$\angle EAD=\angle MBD$，

∵ $\angle ADE=\angle BDM$，$AD=BD$，$\angle C=90°$，

∴ $AED≌ BMD$，$\angle CBM=90°$，

∴ $ED=DM, AE=BM$，

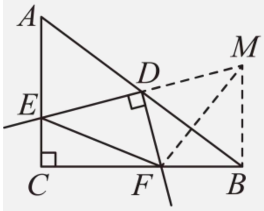
∵ $\angle EDF=90°$，

∴直线 DF 是线段 EM 的垂直平分线，

∴ $EF=FM$ ，

由勾股定理，得 $BF^2+BM^2=FM^2$，

故 $AE^2+BF^2=EF^2$.



∵ $AC=6\text{cm}, BC=8\text{cm}$ ， $AE=4\text{cm}$ ，

∴ $CE=2\text{cm}$ ， $AE=BM=4\text{cm}$ ，

设 $CF=x\text{cm}$， 则 $BF=(8-x)\text{cm}$，

∴ $CE^2+CF^2=BM^2+BF^2$，

∴ $2^2+x^2=4^2+(8-x)^2$，

∴ $x=\dfrac{19}{4}$，

∴ $EF=\sqrt{2^2+\left(\dfrac{19}{4}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{17}}{4}(\text{cm})$；

当点 E 在 CA 的延长线上时，

过点 B 作 $BN/\!/AC$ ， 交 ED 的延长线于点 N， 连接 FN

∵ $BN/\!/AC$ ， $\angle ACB=90°$ ，

∴ $\angle ACB=\angle NBF=90°$ ； $\angle EAD=\angle NBD$ ，

∵ $\angle ADE=\angle BDN$ ， $AD=BD$, ，

∴ $AED≌ BND$ ，

∴ $ED=DN, AE=BN$ ，

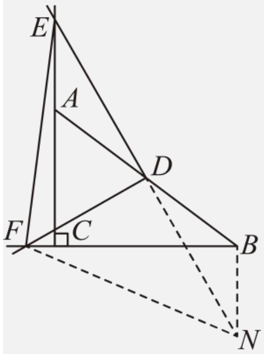
∵ $\angle EDF=90°$ ，

∴直线 DF 是线段 EN 的垂直平分线，

∴ $EF=FN$ ，

由勾股定理，得 $BF^2+BN^2=FN^2$ ，

故 $AE^2+BF^2=EF^2$.



$\because AC = 6\text{cm}, BC = 8\text{cm}$， $AE = 4\text{cm}$，

$\therefore CE = 10\text{cm}$， $AE = BN = 4\text{cm}$，

设$CF = x\text{cm}$，则$BF = (8 + x)\text{cm}$，

$\therefore CE^2 + CF^2 = BN^2 + BF^2$，

$\therefore 10^2 + x^2 = 4^2 + (8 + x)^2$，

$\therefore x = \dfrac{5}{4}$，

$\therefore EF = \sqrt{10^2 + \left(\dfrac{5}{4}\right)^2} = \dfrac{5\sqrt{65}}{4}(\text{cm})$；

故EF的长度为$\dfrac{5\sqrt{17}}{4}$ cm或$\dfrac{5\sqrt{65}}{4}$ cm． ……………………………………………10分