

2022-2023 学年江苏省无锡市宜兴外国语学校八年级（下）期中数学试卷

一、精心选一选（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. （3 分）下列图形中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的（ ）



2. （3 分）下列各式是最简二次根式的是（ ）

A. $\sqrt{\frac{1}{2}}$

B. $\sqrt{0.2}$

C. $\sqrt{2}$

D. $\sqrt{20}$

3. （3 分）若 $a \neq b$ ，则下列分式变形正确的是（ ）

A. $\frac{a+1}{b+1} = \frac{a}{b}$

B. $\frac{a-1}{b-1} = \frac{a}{b}$

C. $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{b}$

D. $\frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$

4. （3 分）已知两个不等于 0 的实数 a 、 b 满足 $a+b=0$ ，则 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ 等于（ ）

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

5. （3 分）下列等式一定成立的是（ ）

A. $\sqrt{a^2} = a$

B. $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

C. $\sqrt{(a-b)^2} = a - b$

D. $\sqrt[3]{(a-b)^3} = a - b$

6. （3 分）已知在四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ，添加下列一个条件后，一定能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形的是（ ）

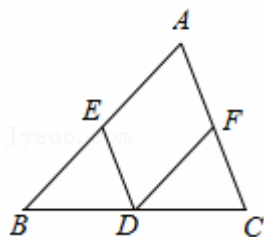
A. $AD = BC$

B. $AC = BD$

C. $\angle A = \angle C$

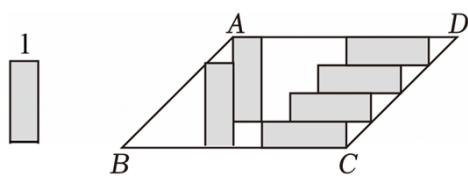
D. $\angle A = \angle B$

7. （3 分）如图， D 、 E 、 F 分别是 $\triangle ABC$ 各边中点，则以下说法错误的是（ ）



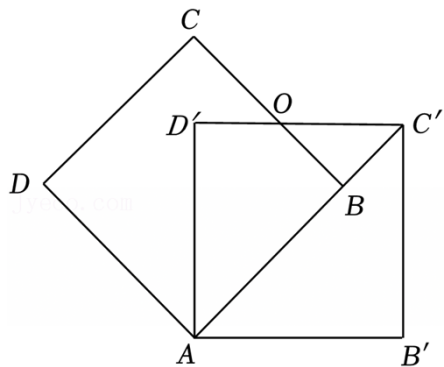
- A. $\triangle BDE$ 和 $\triangle DCF$ 的面积相等
- B. 四边形 $AEDF$ 是平行四边形
- C. 若 $AB=BC$ ，则四边形 $AEDF$ 是菱形
- D. 若 $\angle A=90^\circ$ ，则四边形 $AEDF$ 是矩形

8. (3分) 将6张宽为1的小长方形按如图摆放在平行四边形 $ABCD$ 中，则平行四边形 $ABCD$ 的面积为 ()



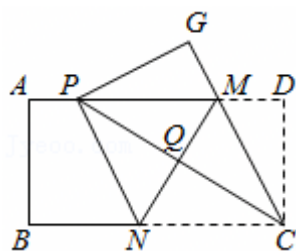
- A. $24\sqrt{2}$ B. $16+4\sqrt{2}$ C. 32 D. $16\sqrt{2}$

9. (3分) 把边长为4的正方形 $ABCD$ 绕点 A 顺时针旋转 45° 得到正方形 $AB'C'D'$ ，边 BC 与 $D'C'$ 交于点 O ，则四边形 $ABOD'$ 的周长是 ()



- A. $8\sqrt{2}$ B. 8 C. $4\sqrt{2}$ D. $4+4\sqrt{2}$

10. (3分) 如图，矩形纸片 $ABCD$ ， $AB=4$ ， $BC=8$ ，点 M 、 N 分别在矩形的边 AD 、 BC 上，将矩形纸片沿直线 MN 折叠，使点 C 落在矩形的边 AD 上，记为点 P ，点 D 落在 G 处，连接 PC ，交 MN 于点 Q ，连接 CM 。下列结论：①四边形 $CMPN$ 是菱形；②点 P 与点 A 重合时， $MN=5$ ；③ $\triangle PQM$ 的面积 S 的取值范围是 $4 \leq S \leq 5$ 。其中所有正确结论的序号是 ()



A. ①②③

B. ①②

C. ①③

D. ②③

二、仔细填一填（本大题共 10 小题，每空 3 分，共计 30 分）

11. (3 分) 若二次根式 $\sqrt{a-2}$ 在实数范围内有意义，则 a 的取值范围为 _____.

12. (3 分) 当 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时，分式 $\frac{x-1}{x+1}$ 的值为 0.

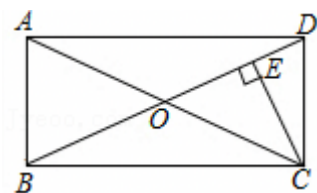
13. (3 分) 请写出 $\sqrt{8}$ 的一个同类二次根式：_____.

14. (3 分) 若 a, b 满足 $a^2 - 4a + 4 + \sqrt{b+2} = 0$ ，则 $b^a = \underline{\hspace{2cm}}$.

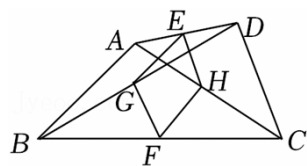
15. (3 分) 已知非零实数 x, y 满足 $y = \frac{x}{x+1}$ ，则 $\frac{x-y+3xy}{xy}$ 的值等于 _____.

16. (3 分) 已知 $xy < 0$ ，化简 $\sqrt{x^2 y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

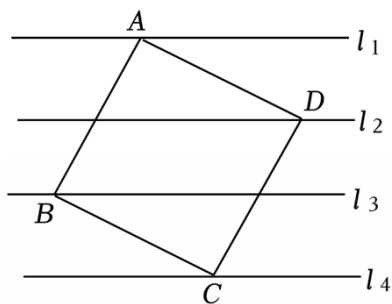
17. (3 分) 如图，矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，过点 C 作 $CE \perp BD$ ，垂足为点 E . 若 $OE = 1$ ， $BD = 2\sqrt{2}$. 则 $CE = \underline{\hspace{2cm}}$.



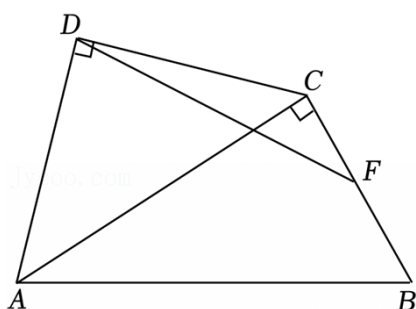
18. (3 分) 如图，在四边形 $ABCD$ 中， AB 与 CD 不平行， $AB = 6$ ， E, F, G, H 分别是 AD, BC, BD, AC 的中点. 当 $CD = \underline{\hspace{2cm}}$ 时，四边形 $EGFH$ 是菱形.



19. (3 分) 如图，已知直线 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3 \parallel l_4$ ，且相邻两条平行直线间的距离都是 d ，如果正方形 $ABCD$ 的四个顶点分别在四条直线上，且面积是 5，则 $d = \underline{\hspace{2cm}}$.



20. (3分) 将一副三角尺如图拼接：含 30° 角的三角尺 ($\triangle ABC$) 的长直角边与含 45° 角的三角尺 ($\triangle ACD$) 的斜边恰好重合。已知 $AB=4\sqrt{3}$ ， E, F 分别是边 AC, BC 上的动点，当四边形 $DEBF$ 为平行四边形时，该四边形的面积是 _____。



三、认真答一答 (本大题共 8 小题，共计 90 分)

21. (16分) 计算 (1) $\sqrt{24} \times \sqrt{\frac{1}{3}} + |1-\sqrt{2}| + (\pi-\sqrt{3})^0$;

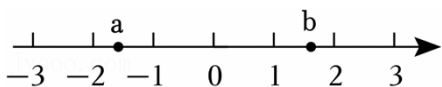
(2) $(\sqrt{3}-2)^2 + (\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)$;

(3) $\frac{a}{a-b} - \frac{b}{b-a}$;

(4) $(\frac{a+1}{a-1} + \frac{1}{a^2-2a+1}) \div \frac{a}{a-1}$.

22. (12分) (1) 先化简，再求值： $(1+\frac{1}{x-1}) \cdot \frac{x^2-1}{x}$ ，其中 $x=\sqrt{3}-1$;

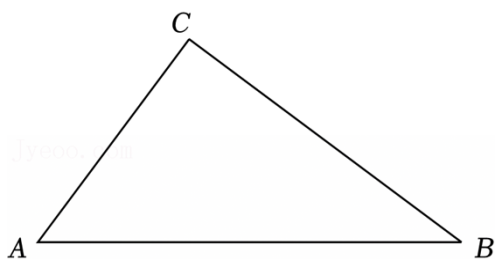
(2) 数 a, b 在数轴上的位置如图所示，化简： $\sqrt{(a-b)^2} + \sqrt{(b-1)^2} - \sqrt{(a+1)^2}$.



23. (8分) 如图，已知 $\triangle ABC$ ，请用直尺 (不带刻度) 和圆规，按下列要求作图 (不要求写作法，但要保留作图痕迹)。

(1) 作菱形 $AMNP$ ，使点 M, N, P 在边 AB, BC, CA 上;

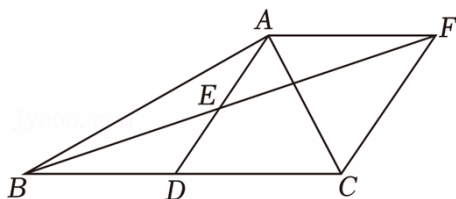
(2) 若 $\angle C=90^\circ$ ， $\angle A=60^\circ$ ， $AC=6$ 时，则菱形 $AMNP$ 的面积为 _____。



24. (10 分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, D 是 BC 的中点, E 是 AD 的中点, 过点 A 作 $AF\parallel BC$ 交 BE 的延长线于点 F .

(1) 证明: $\triangle AEF\cong\triangle DEB$;

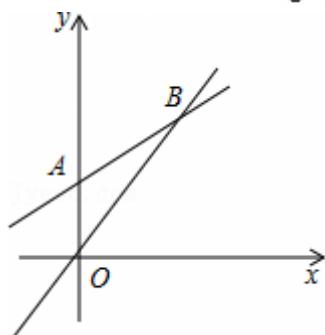
(2) 若 $AB=2\sqrt{2}$, 当四边形 $ADCF$ 为正方形时, 求 BF 的长.



25. (8 分) 已知直线 $l_1: y=\frac{2}{3}x+2$ 与 y 轴交于点 A .

(1) A 点的坐标为.

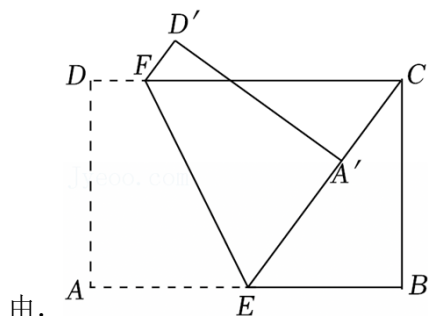
(2) 直线 l_1 和 $l_2: y=\frac{4}{3}x$ 交于点 B , 若以 O 、 A 、 B 、 C 为顶点的四边形是平行四边形, 求点 C 的坐标.



26. (10 分) 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=6$, $AD=4$, E 、 F 分别为 AB 、 CD 边上的两点, 把四边形 $AEFD$ 沿 EF 翻折得到四边形 $A'EFD'$, 点 A' 恰好在线段 EC 上.

(1) 若 $AE=3$, 求 $D'F$ 的长;

(2) 连结 AF , $A'F$. 问: 当 AE 取何值时, 四边形 $AEA'F$ 为菱形? 请说明理由.



27. (12分)【阅读材料】

像 $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = 3$, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ ($a \geq 0$), $(\sqrt{b} + 1)(\sqrt{b} - 1) = b - 1$ ($b \geq 0$), ..., 两个含有二次根式的代数式相乘, 积不含有二次根式, 我们称这两个代数式互为有理化因式.

例如, $\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{3}$, $\sqrt{2} + 1$ 与 $\sqrt{2} - 1$, $2\sqrt{3} + 3\sqrt{5}$ 与 $2\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$, ..., 等都是互为有理化因式. 进行二次根式计算时, 利用有理化因式, 可以化去分母中的根号.

【解决问题】

(1) $3 - \sqrt{2}$ 的有理化因式为 _____;

(2) 化简: $\frac{4}{\sqrt{3}+1} - \frac{6}{\sqrt{3}}$;

(3) ①如图1, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 2$, $AC = 4$, 点 C 到 AB 边的距离为 _____;

②如图2, $\triangle ABC$ 中, $\angle CAB$ 与 $\angle CBA$ 的角平分线相交于点 P , 若 $\triangle ABC$ 的周长为 $2\sqrt{5} + 4$, 面积为3, 则点 P 到 AB 边的距离为 _____.

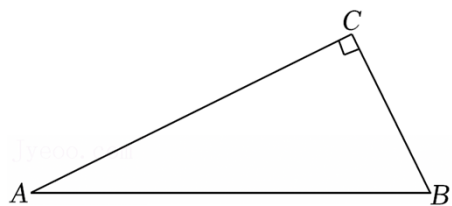


图1

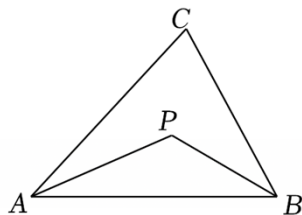


图2

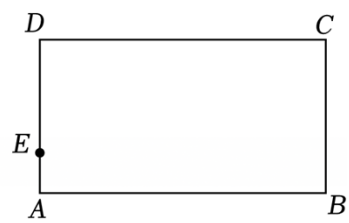
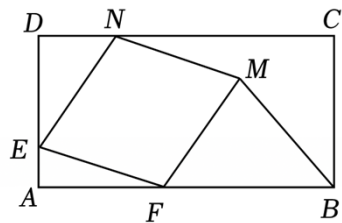
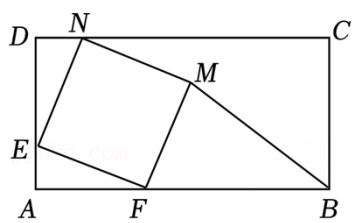
28. (14分) 已知: 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 16$, $BC = 10$. 在 AD 上取一点 E , $AE = 4$, 点 F 是 AB 边上的一个动点, 以 EF 为一边作菱形 $EFMN$, 使点 N 落在 CD 边上, 点 M 落在矩形 $ABCD$ 内或其边上. 若 $AF = x$, $\triangle BFM$ 的面积为 S .

(1) 当四边形 $EFMN$ 是正方形时, 求 x 的值;

(2) 当四边形 $EFMN$ 是菱形时, 求 S 与 x 的函数关系式;

(3) 当 $x =$ _____ 时, $\triangle BFM$ 的面积 S 最大; 当 $x =$ _____ 时, $\triangle BFM$ 的面积 S 最小;

(4) 在 $\triangle BFM$ 的面积 S 由最大变为最小的过程中, 请直接写出点 M 运动的路线长: _____.



备用图

2022-2023 学年江苏省无锡市宜兴外国语学校八年级（下）期中数学试卷

参考答案与试题解析

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	C	D	A	D	C	C	C	A	C

一、精心选一选（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. （3 分）下列图形中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的（ ）



【分析】 把一个图形绕某一点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形就叫做中心对称图形，如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形叫做轴对称图形，由此即可判断.

【解答】 解：AC 中的图形既不是轴对称图形，又不是中心对图形，故 AC 不符合题意；

B、图形是轴对称图形，不是中心对称图形，故 B 不符合题意；

D、图形既是轴对称图形，又是中心对称图形，故 D 符合题意.

故选：D.

【点评】 本题考查轴对称图形，中心对称图形，关键是掌握轴对称图形、中心对称图形的定义.

2. （3 分）下列各式是最简二次根式的是（ ）

A. $\sqrt{\frac{1}{2}}$

B. $\sqrt{0.2}$

C. $\sqrt{2}$

D. $\sqrt{20}$

【分析】 根据最简二次根式的定义对各选项分析判断利用排除法求解.

【解答】 解：A、 $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 不是最简二次根式，错误；

B、 $\sqrt{0.2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 不是最简二次根式，错误；

C、 $\sqrt{2}$ 是最简二次根式，正确；

D、 $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ 不是最简二次根式，错误；

故选：C.

【点评】本题考查最简二次根式的定义，最简二次根式必须满足两个条件：（1）被开方数不含分母；（2）被开方数不含能开得尽方的因数或因式.

3. (3分) 若 $a \neq b$ ，则下列分式变形正确的是 ()

A. $\frac{a+1}{b+1} = \frac{a}{b}$

B. $\frac{a-1}{b-1} = \frac{a}{b}$

C. $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{b}$

D. $\frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$

【分析】根据分式的基本性质，进行计算即可解答.

【解答】解：A、 $\frac{a+1}{b+1} \neq \frac{a}{b}$ ，故A不符合题意；

B、 $\frac{a-1}{b-1} \neq \frac{a}{b}$ ，故B不符合题意；

C、 $\frac{a^2}{b^2} \neq \frac{a}{b}$ ，故C不符合题意；

D、 $\frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$ ，故D符合题意；

故选：D.

【点评】本题考查了分式的基本性质，熟练掌握分式的基本性质是解题的关键.

4. (3分) 已知两个不等于0的实数 a 、 b 满足 $a+b=0$ ，则 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ 等于 ()

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

【分析】方法一：先把所求式子通分，然后将分子变形，再根据两个不等于0的实数 a 、 b 满足 $a+b=0$ ，可以得到 $ab \neq 0$ ，再将 $a+b=0$ 代入化简后的式子即可解答本题.

方法二：根据 $a+b=0$ ，得到 $a = -b$ ，然后代入所求式子，即可得到所求式子的值.

【解答】解：方法一： $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$

$$= \frac{b^2}{ab} + \frac{a^2}{ab}$$

$$= \frac{b^2 + a^2}{ab}$$

$$= \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab},$$

$\because$ 两个不等于0的实数 a 、 b 满足 $a+b=0$,

$\therefore ab \neq 0$,

当 $a+b=0$ 时, 原式 $= \frac{0^2 - 2ab}{ab} = -2$,

故选: A.

方法二: $\because$ 两个不等于 0 的实数 a 、 b 满足 $a+b=0$,

$$\therefore a = -b,$$

$$\therefore \frac{b+a}{a-b}$$

$$= \frac{b}{-b} + \frac{-b}{b}$$

$$= -1 + (-1)$$

$$= -2,$$

故选: A.

【点评】 本题考查分式的化简求值, 解答本题的关键是明确分式化简求值的方法.

5. (3 分) 下列等式一定成立的是 ()

A. $\sqrt{a^2} = a$

B. $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

C. $\sqrt{(a-b)^2} = a - b$

D. $\sqrt[3]{(a-b)^3} = a - b$

【分析】 直接利用二次根式的性质化简判断即可.

【解答】 解: A、 $\sqrt{a^2} = |a|$, 故此选项错误;

B、 $\sqrt{a^2 + b^2}$, 无法化简, 故此选项错误;

C、 $\sqrt{(a-b)^2} = |a - b|$, 故此选项错误;

D、 $\sqrt[3]{(a-b)^3} = a - b$, 故此选项正确.

故选: D.

【点评】 此题主要考查了二次根式的乘除法以及二次根式的性质与化简, 正确化简二次根式是解题关键.

6. (3 分) 已知在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 添加下列一个条件后, 一定能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形的是 ()

A. $AD = BC$

B. $AC = BD$

C. $\angle A = \angle C$

D. $\angle A = \angle B$

【分析】 利用平行线的判定与性质结合平行四边形的判定得出即可.

【解答】 解: 如图所示: $\because AB \parallel CD$,

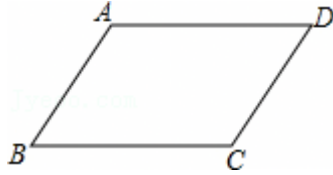
$$\therefore \angle B + \angle C = 180^\circ,$$

当 $\angle A = \angle C$ 时, 则 $\angle A + \angle B = 180^\circ$,

故 $AD \parallel BC$,

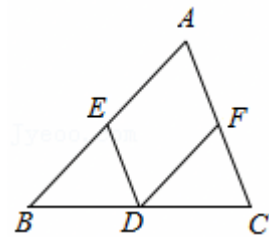
则四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

故选: C .



【点评】 此题主要考查了平行线的判定与性质以及平行四边形的判定, 得出 $AD \parallel BC$ 是解题关键.

7. (3分) 如图, D 、 E 、 F 分别是 $\triangle ABC$ 各边中点, 则以下说法错误的是 ()



A. $\triangle BDE$ 和 $\triangle DCF$ 的面积相等

B. 四边形 $AEDF$ 是平行四边形

C. 若 $AB=BC$, 则四边形 $AEDF$ 是菱形

D. 若 $\angle A=90^\circ$, 则四边形 $AEDF$ 是矩形

【分析】 根据矩形的判定定理, 菱形的判定定理, 三角形中位线定理判断即可.

【解答】 解: A. 连接 EF ,

$\because D$ 、 E 、 F 分别是 $\triangle ABC$ 各边中点,

$\therefore EF \parallel BC$, $BD=CD$,

设 EF 和 BC 间的距离为 h ,

$$\therefore S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2}BD \cdot h, \quad S_{\triangle DCF} = \frac{1}{2}CD \cdot h,$$

$$\therefore S_{\triangle BDE} = S_{\triangle DCF},$$

故本选项不符合题意;

B. $\because D$ 、 E 、 F 分别是 $\triangle ABC$ 各边中点,

$\therefore DE \parallel AC$, $DF \parallel AB$,

$\therefore DE \parallel AF$, $DF \parallel AE$,

$\therefore$ 四边形 $AEDF$ 是平行四边形,

故本选项不符合题意;

C. $\because D、E、F$ 分别是 $\triangle ABC$ 各边中点，

$$\therefore EF = \frac{1}{2}BC, DF = \frac{1}{2}AB,$$

若 $AB=BC$ ，则 $FE=DF$ ，

$\therefore$ 四边形 $AEDF$ 不一定是菱形，

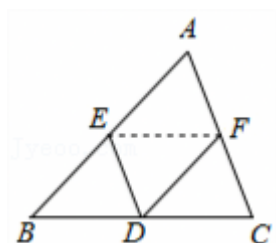
故本选项符合题意；

D. $\because$ 四边形 $AEDF$ 是平行四边形，

$\therefore$ 若 $\angle A=90^\circ$ ，则四边形 $AEDF$ 是矩形，

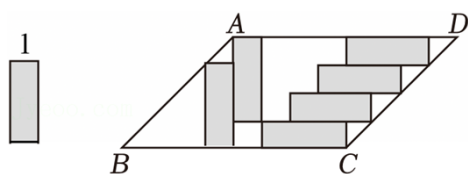
故本选项不符合题意；

故选：C.



【点评】 本题考查了矩形的判定，菱形的判定，平行四边形的判定，三角形的中位线定理，熟练掌握矩形的判定定理是解题的关键.

8. (3 分) 将 6 张宽为 1 的小长方形按如图摆放在平行四边形 $ABCD$ 中，则平行四边形 $ABCD$ 的面积为 ()



- A. $24\sqrt{2}$ B. $16+4\sqrt{2}$ C. 32 D. $16\sqrt{2}$

【分析】 过点 A 作 $AF \perp BC$ 于 F ，过点 C 作 $CE \perp AD$ 于 E ，由图形可知 $AE=CF=AF=CE=4$ ， $DE=BF=4$ ，则 $BC=8$ ，即可得出结论.

【解答】 解：过点 A 作 $AF \perp BC$ 于 F ，过点 C 作 $CE \perp AD$ 于 E ，如图所示：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB=CD$ ， $AD=BC$ ， $AD \parallel BC$ ，

$\therefore AF \perp AD$ ， $CE \perp BC$ ，

$\therefore$ 四边形 $AFCE$ 是矩形，

$\therefore AE=CF$ ，

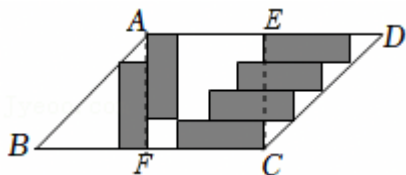
$\therefore DE=BF$ ，

由图形可知： $AE=CF=AF=CE=4$ ， $DE=BF=4$ ，

$$\therefore BC=BF+CF=8,$$

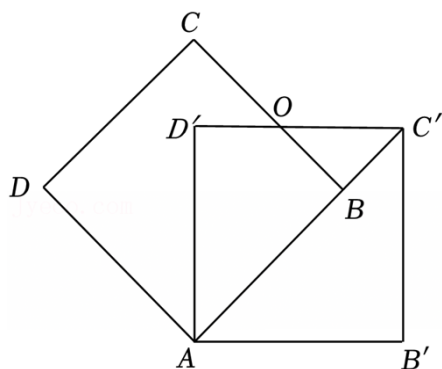
$$\therefore \text{平行四边形 } ABCD \text{ 的面积} = BC \cdot AF = 8 \times 4 = 32,$$

故选：C.



【点评】 本题考查了矩形的性质、平行四边形的性质等知识，熟练掌握平行四边形的性质和矩形的性质是解题的关键.

9. (3分) 把边长为4的正方形 $ABCD$ 绕点 A 顺时针旋转 45° 得到正方形 $AB'C'D'$ ，边 BC 与 $D'C'$ 交于点 O ，则四边形 $ABOD'$ 的周长是 ()



- A. $8\sqrt{2}$ B. 8 C. $4\sqrt{2}$ D. $4+4\sqrt{2}$

【分析】 根据正方形的性质求出 BC' ， OC' ，进而求出 $D'O$ 即可解答.

【解答】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore AC=4\sqrt{2}, \angle DAB=90^\circ,$$

$\therefore$ 把边长为4的正方形 $ABCD$ 绕点 A 顺时针旋转 45° 得到正方形 $AB'C'D'$ ，

$$\therefore \angle D'AC=45^\circ = \angle BCO,$$

$$\therefore BC=4\sqrt{2}-4=OB,$$

$$\therefore CO=8-4\sqrt{2},$$

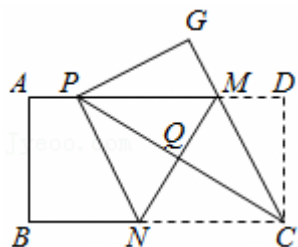
$$\therefore D'O=4\sqrt{2}-4,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABOD' \text{ 的周长} = 2AB+OB+D'O=8+4\sqrt{2}-4+4\sqrt{2}-4=8\sqrt{2}.$$

故选：A.

【点评】 本题考查正方形的性质，旋转的性质，勾股定理，熟练掌握正方形的性质是解题关键.

10. (3分) 如图, 矩形纸片 $ABCD$, $AB=4$, $BC=8$, 点 M 、 N 分别在矩形的边 AD 、 BC 上, 将矩形纸片沿直线 MN 折叠, 使点 C 落在矩形的边 AD 上, 记为点 P , 点 D 落在 G 处, 连接 PC , 交 MN 于点 Q , 连接 CM . 下列结论: ① 四边形 $CMPN$ 是菱形; ② 点 P 与点 A 重合时, $MN=5$; ③ $\triangle PQM$ 的面积 S 的取值范围是 $4 \leq S \leq 5$. 其中所有正确结论的序号是 ()



- A. ①②③ B. ①② C. ①③ D. ②③

【分析】 先判断四边形 $CMPN$ 是平行四边形, 再根据 $PN=CN$ 判断四边形 $CMPN$ 是菱形, 点 P 与点 A 重合时设 $BN=x$, 表示出 $AN=NC=8-x$, 利用勾股定理求出 x , 进而求出 MN 即可判断②, 当 MN 过 D 点时, 求出四边形 $CMPN$ 面积的最小值, 当 P 与 A 重合时, 求出四边形面积的最大值, 即可判断③.

【解答】 解: $\because PM \parallel CN$,

$$\therefore \angle PMN = \angle MNC,$$

$$\because \angle MNC = \angle PNM,$$

$$\therefore \angle PMN = \angle PNM,$$

$$\therefore PM = PN,$$

$$\because NC = NP,$$

$$\therefore PM = CN,$$

$$\because MP \parallel CN,$$

$$\therefore \text{四边形 } CNPM \text{ 是平行四边形},$$

$$\because CN = NP,$$

$$\therefore \text{四边形 } CNPM \text{ 是菱形},$$

故①正确;

如图 1, 当点 P 与 A 重合时, 设 $BN=x$, 则 $AN=NC=8-x$,

在 $\text{Rt}\triangle ABN$ 中, $AB^2 + BN^2 = AN^2$,

$$\text{即 } 4^2 + x^2 = (8-x)^2,$$

解得 $x=3$,

$$\therefore CN = 8 - 3 = 5,$$

$$\because AB=4, BC=8,$$

$$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=4\sqrt{5},$$

$$\therefore CQ=\frac{1}{2}AC=2\sqrt{5},$$

$$\therefore QN=\sqrt{CN^2-CQ^2}=\sqrt{5},$$

$$\therefore MN=2QN=2\sqrt{5},$$

故②不正确；

由题知，当 MN 过点 D 时， CN 最短，如图 2，四边形 $CMPN$ 的面积最小，

$$\text{此时 } S=\frac{1}{4}S_{\text{菱形 } CMPN}=\frac{1}{4}\times 4\times 4=4,$$

当 P 点与 A 点重合时， CN 最长，如图 1，四边形 $CMPN$ 的面积最大，

$$\text{此时 } S=\frac{1}{4}\times 5\times 4=5,$$

$$\therefore 4\leq S\leq 5 \text{ 正确,}$$

故选：C.

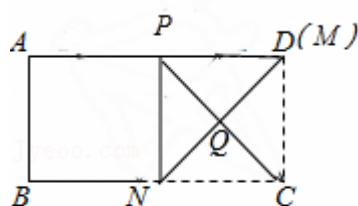


图2

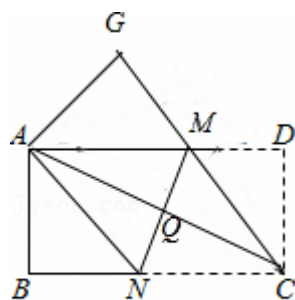


图1

【点评】 本题主要考查翻折问题，三角形的面积，矩形、菱形及平行四边形的性质等知识点，熟练应用矩形、菱形、平行四边形的性质及翻折的性质是解题的关键．

二、仔细填一填（本大题共 10 小题，每空 3 分，共计 30 分）

11. （3 分）若二次根式 $\sqrt{a-2}$ 在实数范围内有意义，则 a 的取值范围为 $a\geq 2$ ．

【分析】 二次根式的被开方数是非负数．

【解答】解：依题意，得

$$a - 2 \geq 0,$$

解得， $a \geq 2$.

故答案为： $a \geq 2$.

【点评】考查了二次根式的意义和性质．概念：式子 $\sqrt{a}$ ($a \geq 0$) 叫二次根式．性质：二次根式中的被开方数必须是非负数，否则二次根式无意义．

12. (3 分) 当 $x = \underline{1}$ 时，分式 $\frac{x-1}{x+1}$ 的值为 0.

【分析】分式的值为零的条件：分子为 0，分母不为 0.

【解答】解：根据题意，得

$$x - 1 = 0, \text{ 且 } x + 1 \neq 0,$$

解得 $x = 1$.

故答案为：1.

【点评】本题考查了分式的值为零的条件．若分式的值为零，需同时具备两个条件：(1) 分子为 0；(2) 分母不为 0. 这两个条件缺一不可.

13. (3 分) 请写出 $\sqrt{8}$ 的一个同类二次根式：如： $\sqrt{2}$ ， $5\sqrt{2}$ ， $\sqrt{32}$ 等.

【分析】先将 $\sqrt{8}$ 化为最简二次根式，然后再写出一个被开方数与它相同的二次根式即可.

【解答】解：因为 $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ，所以与 $\sqrt{8}$ 是同类二次根式的有： $\sqrt{2}$ ， $5\sqrt{2}$... (答案不唯一)

【点评】此题主要考查了同类二次根式的定义．即：化成最简二次根式后，被开方数相同的二次根式叫做同类二次根式.

14. (3 分) 若 a 、 b 满足 $a^2 - 4a + 4 + \sqrt{b+2} = 0$ ，则 $b^a = \underline{4}$.

【分析】先根据完全平方公式整理，再根据非负数的性质列方程求出 a 、 b 的值，然后代入代数式进行计算即可得解.

【解答】解： $a^2 - 4a + 4 + \sqrt{b+2} = 0$,

$$(a - 2)^2 + \sqrt{b+2} = 0,$$

则 $a - 2 = 0$ 或 $b + 2 = 0$,

所以 $a = 2$ ， $b = -2$,

所以 $b^a = (-2)^2 = 4$.

故答案为：4.

【点评】本题考查了非负数的性质：几个非负数的和为 0 时，这几个非负数都为 0.

15. (3分) 已知非零实数 x, y 满足 $y = \frac{x}{x+1}$, 则 $\frac{x-y+3xy}{xy}$ 的值等于 4.

【分析】由 $y = \frac{x}{x+1}$ 得: $x - y = xy$, 整体代入到代数式中求值即可.

【解答】解: 由 $y = \frac{x}{x+1}$ 得: $xy + y = x$,

$$\therefore x - y = xy,$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{xy+3xy}{xy}$$

$$= \frac{4xy}{xy}$$

$$= 4.$$

故答案为: 4.

【点评】本题考查了求分式的值, 对条件进行化简, 得到 $x - y = xy$, 把 $x - y$ 看作整体, 代入到代数式求值是解题的关键.

16. (3分) 已知 $xy < 0$, 化简 $\sqrt{x^2 y} = \underline{-x\sqrt{y}}$.

【分析】根据 x, y 符号进行二次根式的化简.

【解答】解: $\because xy < 0, x^2 y \geq 0$,

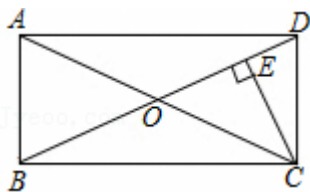
$$\therefore y > 0, x < 0,$$

$$\therefore \sqrt{x^2 y} = -x\sqrt{y}.$$

故答案为: $-x\sqrt{y}$.

【点评】本题考查了二次根式的性质与化简. 注意, 二次根式的被开方数是非负数.

17. (3分) 如图, 矩形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , 过点 C 作 $CE \perp BD$, 垂足为点 E . 若 $OE = 1, BD = 2\sqrt{2}$. 则 $CE = \underline{1}$.



【分析】根据矩形的性质以及勾股定理即可求出答案.

【解答】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle BCD = 90^\circ, OA = OC = OD = OB = \frac{1}{2}BD = \sqrt{2},$$

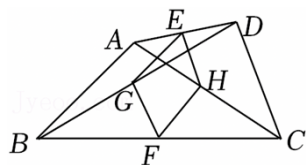
$$\because OE = 1, CE \perp BD,$$

$$\therefore \text{由勾股定理可知: } CE = 1,$$

故答案为：1.

【点评】 本题考查矩形，解题的关键是熟练运用矩形的性质以及勾股定理，本题属于基础题型.

18. (3分) 如图，在四边形 $ABCD$ 中， AB 与 CD 不平行， $AB=6$ ， E ， F ， G ， H 分别是 AD ， BC ， BD ， AC 的中点. 当 $CD=$ 6 时，四边形 $EGFH$ 是菱形.



【分析】 根据邻边相等的平行四边形是菱形解答.

【解答】 证明： $\because E$ ， G 分别是 AD ， BD 的中点，

$\therefore EG$ 是 $\triangle DAB$ 的中位线，

$$\therefore EG = \frac{1}{2}AB, EG \parallel AB,$$

同理， $FH = \frac{1}{2}AB, FH \parallel AB,$

$$\therefore EG = FH, EG \parallel FH,$$

$\therefore$ 四边形 $EGFH$ 是平行四边形；

$\because F$ ， G 分别是 BC ， BD 的中点，

$\therefore FG$ 是 $\triangle DCB$ 的中位线，

$$\therefore FG = \frac{1}{2}CD, FG \parallel CD,$$

当 $AB=CD$ 时， $EG=FG$ ，

$\therefore$ 四边形 $EGFH$ 是菱形；

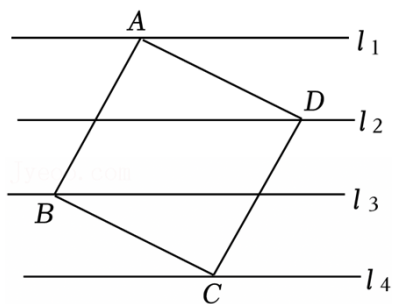
$$\because AB=6,$$

$\therefore$ 当 $CD=6$ 时，四边形 $EGFH$ 是菱形.

故答案为：6.

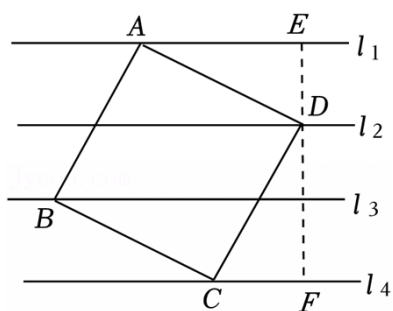
【点评】 本题考查的是中点四边形，掌握三角形中位线定理、菱形的判定定理是解题的关键.

19. (3分) 如图，已知直线 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3 \parallel l_4$ ，且相邻两条平行直线间的距离都是 d ，如果正方形 $ABCD$ 的四个顶点分别在四条直线上，且面积是 5，则 $d=$ 1.



【分析】过 D 点作直线 EF 与平行线垂直，与 l_1 交于点 E ，与 l_4 交于点 F 。易证 $\triangle ADE \cong \triangle DFC$ ，可得 $CF = DE = d$ ， $DF = 2d$ ，在 $\text{Rt}\triangle CDF$ 中，结合正方形的面积公式构建方程即可解决问题。

【解答】解：过点 D 作 $EF \perp l_2$ ，交 l_1 于 E 点，交 l_4 于 F 点。



$\because l_1 \parallel l_2 \parallel l_3 \parallel l_4$ ， $EF \perp l_2$ ，

$\therefore EF \perp l_1$ ， $EF \perp l_4$ ，

即 $\angle AED = \angle DFC = 90^\circ$ 。

$\therefore \angle ADE + \angle DAE = 90^\circ$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore \angle ADC = 90^\circ$ ， $AD = CD$ ，

$\therefore \angle ADE + \angle CDF = 90^\circ$ 。

$\therefore \angle CDF = \angle DAE$ ，

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle DCF$ 中，

$$\begin{cases} \angle AED = \angle DFC \\ \angle DAE = \angle CDF, \\ AD = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle DCF$ (AAS)，

$\therefore CF = DE = d$ 。

在 $\text{Rt}\triangle DCF$ 中， $CD^2 = CF^2 + DF^2$ ， $DF = 2d$ ，

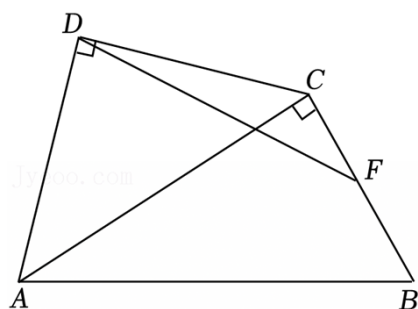
$\therefore 5 = d^2 + 4d^2$ ，

$\therefore d = 1$ (负值已舍)。

故答案为 1.

【点评】本题考查全等三角形的判定与性质、正方形的性质和面积计算，根据平行线之间的距离构造全等的直角三角形是关键.

20. (3 分) 将一副三角尺如图拼接：含 30° 角的三角尺 ($\triangle ABC$) 的长直角边与含 45° 角的三角尺 ($\triangle ACD$) 的斜边恰好重合. 已知 $AB=4\sqrt{3}$, E, F 分别是边 AC, BC 上的动点, 当四边形 $DEBF$ 为平行四边形时, 该四边形的面积是 9.



【分析】由平行四边形的性质可得 $\angle DEC = \angle ACB = 90^\circ$, 由等腰直角三角形的性质可得 $AE = CE = DE$, 根据含 30° 的直角三角形的性质可求解 AC 的长, 即可求得 $DE = CD = 3$, 利用四边形的面积公式可求解.

【解答】解: 由题意得, 当四边形 $DEBF$ 为平行四边形时, $BC \parallel DE$,

$$\therefore \angle DEC = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore AD = CD,$$

$$\therefore AE = CE = DE,$$

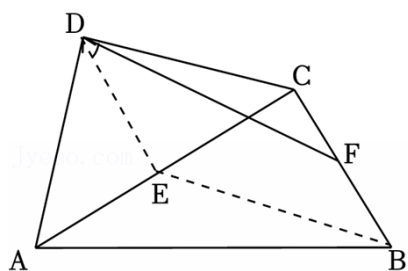
$$\therefore \angle BAC = 30^\circ, AB = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore BC = 2\sqrt{3}, AC = 6,$$

$$\therefore DE = CE = 3,$$

$$\therefore \text{四边形 } DEBF \text{ 的面积为: } DE \cdot CE = 9,$$

故答案为: 9.



【点评】本题考查平行四边形的性质, 等腰直角三角形的性质, 含 30° 角的直角三角形的性质, 求出 $DE = CE = 3$ 是解题的关键.

三、认真答一答（本大题共 8 小题，共计 90 分）

21. (16 分) 计算 (1) $\sqrt{24} \times \sqrt{\frac{1}{3}} + |1 - \sqrt{2}| + (\pi - \sqrt{3})^0$;

(2) $(\sqrt{3} - 2)^2 + (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)$;

(3) $\frac{a}{a-b} - \frac{b}{b-a}$;

(4) $(\frac{a+1}{a-1} + \frac{1}{a^2-2a+1}) \div \frac{a}{a-1}$.

【分析】(1) 根据二次根式的乘法法则、绝对值的计算方法和零指数幂的运算结果来进行计算;

(2) 根据完全平方公式和平差公式去掉小括号; 再进行合并同类项即可;

(3) 先将第二分式变成分母是 $a - b$ 的形式, 再进行相减即可;

(4) 先将小括号里的分式进行通分再计算, 最后将除法变成乘法再计算即可.

【解答】解: (1) $\sqrt{24} \times \sqrt{\frac{1}{3}} + |1 - \sqrt{2}| + (\pi - \sqrt{3})^0$;
 $= 2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 + 1$
 $= 3\sqrt{2}$;

(2) $(\sqrt{3} - 2)^2 + (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)$
 $= 3 - 4\sqrt{3} + 4 + 3 - 1$
 $= 9 - 4\sqrt{3}$;

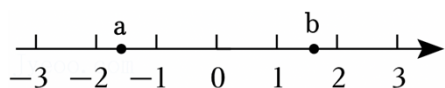
(3) $\frac{a}{a-b} - \frac{b}{b-a}$
 $= \frac{a}{a-b} + \frac{b}{a-b}$
 $= \frac{a+b}{a-b}$;

(4) $(\frac{a+1}{a-1} + \frac{1}{a^2-2a+1}) \div \frac{a}{a-1}$
 $= (\frac{(a+1)(a-1)}{(a-1)^2} + \frac{1}{(a-1)^2}) \div \frac{a}{a-1}$
 $= \frac{a^2}{(a-1)^2} \times \frac{a-1}{a}$
 $= \frac{a}{a-1}$.

【点评】本题考查了二次根式和分式的混合运算, 解题的关键是根据运算顺序和计算法则来计算.

22. (12 分) (1) 先化简, 再求值: $(1 + \frac{1}{x-1}) \cdot \frac{x^2-1}{x}$, 其中 $x = \sqrt{3} - 1$;

(2) 数 a 、 b 在数轴上的位置如图所示，化简： $\sqrt{(a-b)^2} + \sqrt{(b-1)^2} - \sqrt{(a+1)^2}$.



【分析】(1) 先将原式通分化简，然后再整体代入计算即可；

(2) 由数轴可知， $-2 < a < -1$ ， $1 < b < 2$ ，因此 $a - b < 0$ ， $b - 1 > 0$ ， $a + 1 < 0$ ，据此进行开根号计算即可.

【解答】解：(1) 原式 $= \frac{x-1+1}{x-1} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{x} = \frac{x}{x-1} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{x} = x+1$,

当 $x = \sqrt{3} - 1$ 时，

原式 $= x+1 = \sqrt{3} - 1 + 1 = \sqrt{3}$;

(2) 由数轴可知， $-2 < a < -1$ ， $1 < b < 2$,

$\therefore a - b < 0$ ， $b - 1 > 0$ ， $a + 1 < 0$,

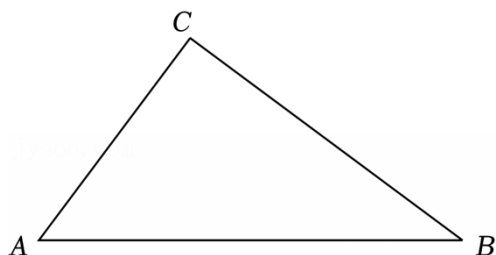
$\therefore$ 原式 $= -(a - b) + (b - 1) + (a + 1) = -a + b + b - 1 + a + 1 = 2b$.

【点评】本题考查的是二次根式的化简求值，实数与数轴和分式的化简求值，熟练掌握其运算法则是解题的关键.

23. (8 分) 如图，已知 $\triangle ABC$ ，请用直尺（不带刻度）和圆规，按下列要求作图（不要求写作法，但要保留作图痕迹）.

(1) 作菱形 $AMNP$ ，使点 M 、 N 、 P 在边 AB 、 BC 、 CA 上；

(2) 若 $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = 60^\circ$ ， $AC = 6$ 时，则菱形 $AMNP$ 的面积为 $8\sqrt{3}$.



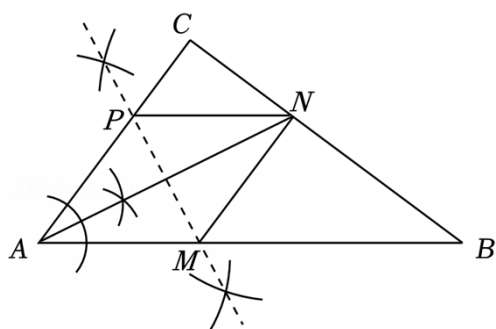
【分析】(1) 结合菱形的判定，先作 $\angle CAB$ 的平分线，交 BC 于点 N ，再作线段 AN 的垂直平分线，分别交 AC ， AB 于点 P ， M ，连接 PN ， MN ，则菱形 $AMNP$ 即为所求.

(2) 结合菱形的性质、含 30° 角的直角三角形的性质、勾股定理求出 AP ， CN 的长，根据菱形的面积公式可得答案.

【解答】解：(1) 如图，先作 $\angle CAB$ 的平分线，交 BC 于点 N ，再作线段 AN 的垂直平分线，分别交 AC ， AB 于点 P ， M ，连接 PN ， MN ，

则四边形 $AMNP$ 为菱形，

即菱形 $AMNP$ 为所求.



(2) $\because$ 四边形 $AMNP$ 为菱形,

$$\therefore \angle CAN = \frac{1}{2} \angle BAC = 30^\circ, AP = PN,$$

$$\therefore \angle PNA = 30^\circ,$$

$$\because \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ANC = 60^\circ$$

$$\therefore \angle PNC = 30^\circ.$$

设 $AP = PN = x$,

则 $CP = AC - AP = 6 - x$,

在 $\text{Rt}\triangle PCN$ 中, $\angle PNC = 30^\circ$,

$$\therefore PN = 2CP,$$

$$\text{即 } x = 2(6 - x),$$

解得 $x = 4$,

$$\therefore CP = 2, CN = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{菱形 } AMNP \text{ 的面积为 } AP \cdot CN = 4 \times 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}.$$

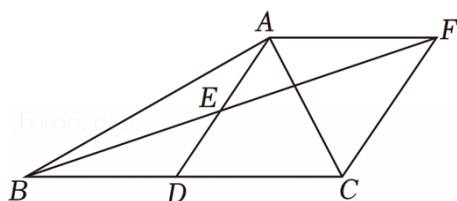
故答案为: $8\sqrt{3}$.

【点评】 本题考查作图—复杂作图、菱形的判定与性质, 熟练掌握菱形的判定与性质是解答本题的关键.

24. (10 分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, D 是 BC 的中点, E 是 AD 的中点, 过点 A 作 $AF \parallel BC$ 交 BE 的延长线于点 F .

(1) 证明: $\triangle AEF \cong \triangle DEB$;

(2) 若 $AB = 2\sqrt{2}$, 当四边形 $ADCF$ 为正方形时, 求 BF 的长.



【分析】(1) 根据平行线的性质得到 $\angle AFE = \angle DBE$ ，根据全等三角形的判定即可得到结论；

(2) 根据四边形 $ADCF$ 为正方形，根据勾股定理求出 BC ，则 $CF = DC = 2$ ，在 $\text{Rt}\triangle BCF$ 中，利用勾股定理即可求解。

【解答】(1) 证明： $\because AF \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle AFE = \angle DBE,$$

$\because E$ 是 AD 的中点，

$$\therefore AE = DE,$$

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle DEB$ 中，

$$\begin{cases} \angle AFE = \angle DBE \\ \angle FEA = \angle BED, \\ AE = DE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle DEB \text{ (AAS)};$$

(2) 解： $\because$ 四边形 $ADCF$ 是正方形，

$$\therefore AD = CD = CF, \angle ADC = \angle DCF = 90^\circ,$$

$\because D$ 是 BC 的中点，

$$\therefore BD = CD,$$

$$\therefore AB = AC = 2\sqrt{2},$$

$$\because \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore BC = 4,$$

$$\therefore CD = CF = 2,$$

$$\because \angle DCF = 90^\circ,$$

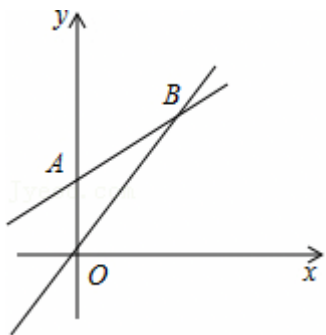
$$\therefore BF = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}.$$

【点评】此题考查了全等三角形的判定和性质，正方形的判定和性质，勾股定理，线段垂直平分线的性质等知识，熟练掌握正方形的性质是解题的关键。

25. (8 分) 已知直线 $l_1: y = \frac{2}{3}x + 2$ 与 y 轴交于点 A 。

(1) A 点的坐标为。

(2) 直线 l_1 和 $l_2: y = \frac{4}{3}x$ 交于点 B ，若以 O 、 A 、 B 、 C 为顶点的四边形是平行四边形，求点 C 的坐标。



【分析】(1) $y = \frac{2}{3}x + 2$, 令 $x = 0$, 则 $y = 2$, 即可求解;

(2) 分 AO 是平行四边形的一条边、 AO 是平行四边形的对角线, 两种情况分别求解即可.

【解答】解: (1) $y = \frac{2}{3}x + 2$, 令 $x = 0$, 则 $y = 2$,

则点 $A(0, 2)$;

(2) 联立直线 l_1 和 l_2 的表达式并解得: $x = 3$,

故点 $B(3, 4)$,

①当 AO 是平行四边形的一条边时,

则点 $C(3, 2)$ 或 $(3, 6)$;

②当 AO 是平行四边形的对角线时,

设点 C 的坐标为 (a, b) , 点 $B(3, 4)$,

BC 的中点和 AO 的中点坐标,

由中点坐标公式: $a + 3 = 0$, $b + 4 = 2$,

解得: $a = -3$, $b = -2$,

故点 $C(-3, -2)$;

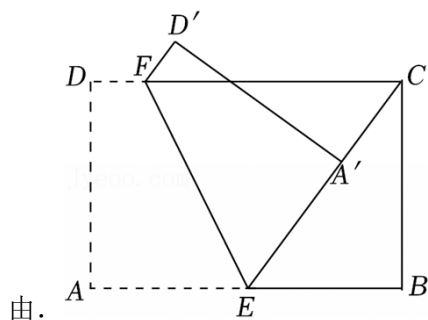
故点 C 坐标为 $(3, 2)$ 或 $(3, 6)$ 或 $(-3, -2)$.

【点评】本题考查的是一次函数综合运用, 涉及到平行四边形的性质, 其中 (2), 要分类求解, 避免遗漏.

26. (10 分) 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 6$, $AD = 4$, E 、 F 分别为 AB 、 CD 边上的两点, 把四边形 $AEFD$ 沿 EF 翻折得到四边形 $A'EFD'$, 点 A' 恰好在线段 EC 上.

(1) 若 $AE = 3$, 求 $D'F$ 的长;

(2) 连结 AF , $A'F$. 问: 当 AE 取何值时, 四边形 $AEA'F$ 为菱形? 请说明理



【分析】(1) 根据折叠的性质可得 $A'E = AE = 3$, $DF = DF$, 再根据矩形的性质可得 $AB = CD = 6$, $AD = BC = 4$, $\angle B = 90^\circ$, 从而得到 $BE = 3$, 由勾股定理可得 $CE = 5$, 从而得到 $CF = CE = 5$, 即可求解;

(2) 根据折叠的性质可得 $A'E = AE$, $A'F = AF$, 再根据菱形的性质可设 $AE = x$, 则 $A'E = AE = AF = x$, $BE = 6 - x$, 由勾股定理可得 $CF = \sqrt{16 + (6 - x)^2}$, $DF = \sqrt{x^2 - 16}$, 再由 $DF + CF = CD$, 即可求解.

【解答】解: (1) 根据题意得: $A'E = AE = 3$, $DF = DF$,
在矩形 $ABCD$ 中, $AB = CD = 6$, $AD = BC = 4$, $\angle B = 90^\circ$,

$$\therefore AE = 3,$$

$$\therefore BE = AB - AE = 3,$$

$$\therefore CE = \sqrt{BC^2 + BE^2} = 5,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle CFE,$$

由折叠可知, $\angle AEF = \angle CEF$,

$$\therefore \angle CFE = \angle CEF,$$

$$\therefore CF = CE = 5,$$

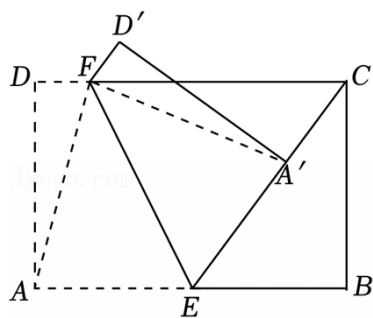
$$\therefore DF = CD - CF = 6 - 5 = 1,$$

由折叠可知, $D'F = DF = 1$,

即 $D'F$ 的长为 1.

(2) 当 $AE = \frac{13}{3}$ 时, 四边形 $AEA'F$ 为菱形, 理由如下:

如图, 连接 AF , $A'F$,



根据题意得： $A'E=AE$ ， $A'F=AF$ ，

$\therefore$ 四边形 $AEA'F$ 为菱形，

$\therefore AE=AF=A'F=A'E$ ，

设 $AE=x$ ，

则 $A'E=AE=AF=x$ ， $BE=6-x$ ，

$\therefore CF=CE=\sqrt{BC^2+BE^2}=\sqrt{16+(6-x)^2}$ ， $DF=\sqrt{AF^2-AD^2}=\sqrt{x^2-16}$ ，

$\therefore DF+CF=CD$ ，

$\therefore \sqrt{x^2-16}+\sqrt{16+(6-x)^2}=6$ ，

解得： $x=\frac{13}{3}$ ，

即 $AE=\frac{13}{3}$ ，

$\therefore$ 当 $AE=\frac{13}{3}$ 时，四边形 $AEA'F$ 为菱形。

【点评】 本题主要考查了矩形与折叠问题，菱形的性质与判定，勾股定理，等腰三角形的判定和性质，熟练掌握矩形与折叠问题，菱形的性质与判定，勾股定理，等腰三角形的判定和性质是解题的关键。

27. (12分) 【阅读材料】

像 $(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})=3$ ， $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a$ ($a\geq 0$)， $(\sqrt{b}+1)(\sqrt{b}-1)=b-1$ ($b\geq 0$)，...，两个含有二次根式的代数式相乘，积不含有二次根式，我们称这两个代数式互为有理化因式。

例如， $\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{3}$ ， $\sqrt{2}+1$ 与 $\sqrt{2}-1$ ， $2\sqrt{3}+3\sqrt{5}$ 与 $2\sqrt{3}-3\sqrt{5}$ ，...，等都是互为有理化因式。进行二次根式计算时，利用有理化因式，可以化去分母中的根号。

【解决问题】

(1) $3-\sqrt{2}$ 的有理化因式为 $3+\sqrt{2}$ ；

(2) 化简： $\frac{4}{\sqrt{3}+1}-\frac{6}{\sqrt{3}}$ ；

(3) ①如图 1， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $BC=2$ ， $AC=4$ ，点 C 到 AB 边的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ；

②如图2， $\triangle ABC$ 中， $\angle CAB$ 与 $\angle CBA$ 的角平分线相交于点 P ，若 $\triangle ABC$ 的周长为 $2\sqrt{5}+4$ ，面积为 3，则点 P 到 AB 边的距离为 $3\sqrt{5}-6$ 。

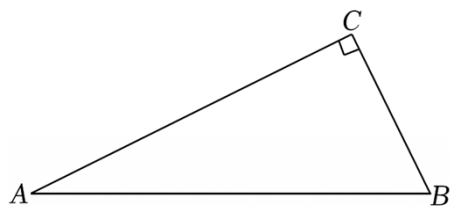


图1

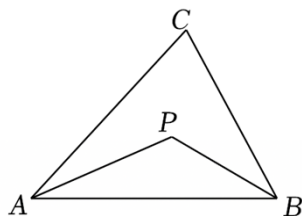


图2

【分析】(1) 利用凑平方差公式的方法找根式的有理化式子；

(2) 利用三角形面积求高即可；

(3) 利用等面积求解即可。

【解答】解：(1) 根据题意可知 $3-\sqrt{2}$ 的有理化因式为 $3+\sqrt{2}$ ；

故答案为： $3+\sqrt{2}$ 。

$$\begin{aligned} (2) & \frac{4}{\sqrt{3}+1} - \frac{6}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{4 \times (\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} - \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \\ &= \frac{4(\sqrt{3}-1)}{2} - \frac{6\sqrt{3}}{3} \\ &= 2\sqrt{3} - 2 - 2\sqrt{3} \\ &= -2; \end{aligned}$$

(3) ① $\because \text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $BC=2$ ， $AC=4$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5},$$

令点 C 到 AB 边的距离为 h ，

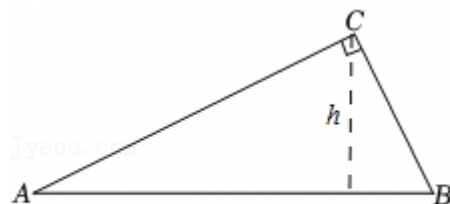


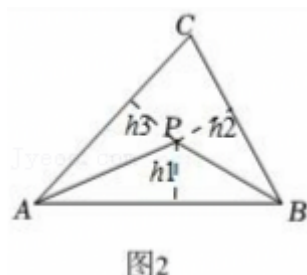
图1

根据等面积列等式方程得：

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 4 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times h,$$

解得 $h = \frac{4\sqrt{5}}{5}$;

②过点 P 分别作边 AB 、 BC 、 AC 的垂线段 h_1 、 h_2 、 h_3 ,



$\because \triangle ABC$ 中, $\angle CAB$ 与 $\angle CBA$ 的角平分线相交于点 P ,

$\therefore$ 线段 $h_1 = h_2 = h_3$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle APB} + S_{\triangle BPC} + S_{\triangle APC},$$

$$= \frac{1}{2}ABh_1 + \frac{1}{2}BCh_2 + \frac{1}{2}ACH_3$$

$$= \frac{1}{2}C_{\triangle ABC}h_1$$

$\because \triangle ABC$ 的周长为 $2\sqrt{5}+4$, 面积为 3,

$$\therefore \frac{1}{2}(2\sqrt{5}+4)h_1 = 3,$$

$$\text{解得 } h_1 = \frac{3}{\sqrt{5}+2} = 3(\sqrt{5}-2) = 3\sqrt{5}-6.$$

故答案为: ① $\frac{4\sqrt{5}}{5}$;

② $3\sqrt{5}-6$.

【点评】 本题考查了因式分解、分母有理化、二次根式的混合运算、角平分线的性质, 做题关键要掌握因式分解、分母有理化、二次根式的混合运算、角平分线的性质.

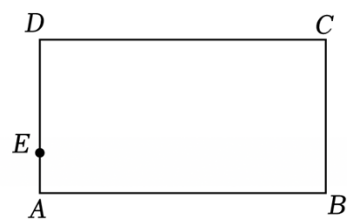
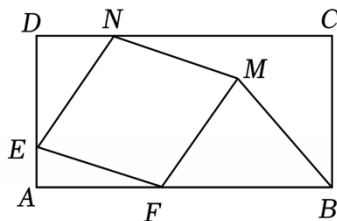
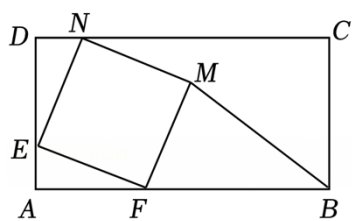
28. (14 分) 已知: 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=16$, $BC=10$. 在 AD 上取一点 E , $AE=4$, 点 F 是 AB 边上的一个动点, 以 EF 为一边作菱形 $EFMN$, 使点 N 落在 CD 边上, 点 M 落在矩形 $ABCD$ 内或其边上. 若 $AF=x$, $\triangle BFM$ 的面积为 S .

(1) 当四边形 $EFMN$ 是正方形时, 求 x 的值;

(2) 当四边形 $EFMN$ 是菱形时, 求 S 与 x 的函数关系式;

(3) 当 $x = \underline{2\sqrt{5}}$ 时, $\triangle BFM$ 的面积 S 最大; 当 $x = \underline{\frac{69}{8}}$ 时, $\triangle BFM$ 的面积 S 最小;

(4) 在 $\triangle BFM$ 的面积 S 由最大变为最小的过程中, 请直接写出点 M 运动的路线长: $\underline{16-2\sqrt{5}}$.



备用图

【分析】(1) 只要证明 $\triangle AEF \cong \triangle DNE$ 即可解决问题；

(2) 如图，连接 FN ，作 $MQ \perp FB$ 于 Q ，想办法证明 $\triangle DNE \cong \triangle QFN$ ，可得 $MQ = DE = 6$ ，由此即可解决问题；

(3) ①如图 3 中，当点 N 与 D 重合时， x 的值最小， $\triangle FBM$ 的面积最大，在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中， $x = 2\sqrt{5}$ 。②如图 4 中，当点 M 在 BC 上时， x 的值最大， $\triangle FBM$ 的面积最小；

(4) 如图 3 中，在 $\triangle FBM$ 的面积 S 由最大变为最小的过程中，点 M 的运动轨迹是平行 AB 的线段，点 M 运动的路线长 $= BF$ 的长。

【解答】解：(1) 如图 1 中，

$\because$ 四边形 $EFMN$ 是正方形，

$\therefore EF = EN$ ， $\angle FEN = \angle A = \angle D = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AEF + \angle AFE = 90^\circ$ ， $\angle AEF + \angle DEN = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AFE = \angle DEN$ ，

$\therefore \triangle AEF \cong \triangle DNE$ (AAS)，

$\therefore AF = DE$ ，

$\because AD = 10$ ， $AE = 4$ ，

$\therefore DE = 6$ ，

$\therefore x = AF = 6$ 。

(2) 如图，连接 FN ，作 $MQ \perp FB$ 于 Q ，则 $\angle MQF = 90^\circ$ ， $\angle MQF = \angle A$ ，

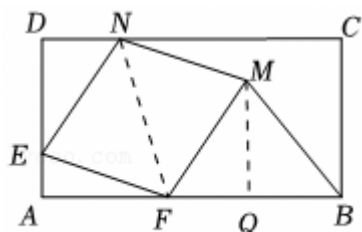


图2

$\because$ 四边形 $FEMN$ 是菱形，

$\therefore EN = FM$ ， $EN \parallel FM$ ，

$$\therefore \angle ENF = \angle NFM,$$

$\because$ 矩形 $ABCD$ 中, $DC \parallel AB$,

$$\therefore \angle DNF = \angle NFQ,$$

$$\therefore \angle DNF - \angle ENF = \angle NFQ - \angle NFM, \text{ 即 } \angle DNE = \angle MFQ,$$

$$\therefore \triangle DNE \cong \triangle QFN \text{ (AAS)},$$

$$\therefore MQ = DE = 6,$$

$$\because AB = 16, AF = x,$$

$$\therefore S_{\triangle FBM} = \frac{1}{2} \times FB \times MQ = 48 - 3x.$$

$$\therefore S \text{ 与 } x \text{ 的函数关系式 } S = 48 - 3x;$$

(3) ①如图 3 中, 当点 N 与 D 重合时, x 的值最小, $\triangle FBM$ 的面积最大,

$$\text{在 Rt}\triangle AEF \text{ 中, } x = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore S \text{ 的最大值} = 48 - 3x = 48 - 6\sqrt{5}.$$

②如图 4 中, 当点 M 在 BC 上时, x 的值最大, $\triangle FBM$ 的面积最小,

此时易证 $CN = AF = x$,

$$\because EN = EF,$$

$$\therefore 4^2 + x^2 = 6^2 + (16 - x)^2,$$

$$\therefore x = \frac{69}{8};$$

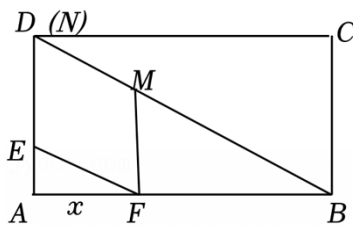


图3

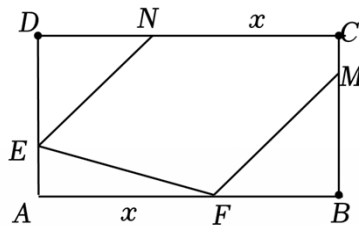


图4

故答案为: ① $2\sqrt{5}$, ② $\frac{69}{8}$.

(4) 如图 3 中, 在 $\triangle FBM$ 的面积 S 由最大变为最小的过程中, 点 M 的运动轨迹是平行 AB 的线段,

$$\text{即点 } M \text{ 运动的路线长} = BF \text{ 的长} = 16 - x = 16 - 2\sqrt{5},$$

$$\text{故答案为: } 16 - 2\sqrt{5}.$$

【点评】 本题考查四边形综合题、矩形的性质、全等三角形的判定和性质、勾股定理、三角形的面积、一次函数的应用等知识, 解题的关键是正确寻找全等三角形解决问题, 学会利用参数构建方程解决问题, 学会利用一次函数的性质确定最值问题, 属于中考压轴题.

