

2023-2024 学年江苏省无锡市惠山区八年级（下）期中数学试卷

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分.在每小题所给出的四个选项中，只有一项是正确的，请用 2B 铅笔把答题卡上相应的选项标号涂黑）

1.（3 分）下列新能源汽车车标中，既是轴对称图形也是中心对称图形的是（ ）



2.（3 分）空气主要成分中氮气约占 78%，氧气约占 21%，其他微量气体约占 1%. 要反映上述信息，宜采用的统计图是（ ）

A. 条形统计图

B. 折线统计图

C. 扇形统计图

D. 以上三种都可以

3.（3 分）投掷两枚质地均匀的正方体骰子，下列事件是必然事件的是（ ）

A. 点数的和为 6

B. 点数的和小于 13

C. 点数的和大于 12

D. 点数的和为奇数

4.（3 分）若分式 $\frac{2}{2x-3}$ 有意义，则 x 的取值范围是（ ）

A. $x < \frac{3}{2}$

B. $x > \frac{3}{2}$

C. $x \neq \frac{3}{2}$

D. $x = \frac{3}{2}$

5.（3 分）今年我市有 4 万名学生参加中考，为了了解这些考生的数学成绩，从中抽取 2000 名考生的数学成绩进行统计分析. 在这个问题中，下列说法正确的是（ ）

A. 这 4 万名考生的全体是总体

B. 每个考生是个体

C. 2000 名考生是总体的一个样本

D. 样本容量是 2000

6.（3 分）菱形具有而矩形不一定具有的性质是（ ）

A. 对角线互相平分

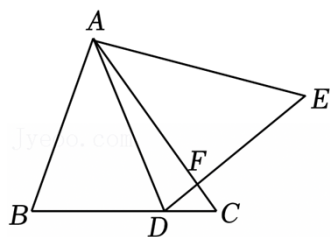
B. 对角线相等

C. 邻边互相垂直

D. 对角线互相垂直

7.（3 分）如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 55^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 逆时针旋转 α ($0^\circ < \alpha < 55^\circ$)，得到 $\triangle ADE$ ， DE

交 AC 于 F . 当 $\alpha=30^\circ$ 时, 点 D 恰好落在 BC 上, 此时 $\angle AFE$ 等于 ()



- A. 110° B. 100° C. 90° D. 80°

8. (3 分) 随着生活水平的提高和环保意识的增强, 小亮家购置了新能源电动汽车, 这样他乘电动汽车比乘公交车上学所需的时间少用了 15 分钟, 已知电动汽车的平均速度是公交车的 2.5 倍, 小亮家到学校的距离为 8 千米. 若设乘公交车平均每小时走 x 千米, 则可列方程为 ()

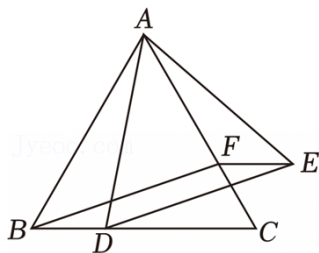
- A. $\frac{8}{x} + 15 = \frac{8}{2.5x}$ B. $\frac{8}{x} = \frac{8}{2.5x} + 15$
C. $\frac{8}{x} + \frac{1}{4} = \frac{8}{2.5x}$ D. $\frac{8}{x} = \frac{8}{2.5x} + \frac{1}{4}$

9. (3 分) 小明在研究某个菱形时, 发现下列说法中只有一个是错误的, 你认为错误的是 ()

- A. 菱形一条对角线长为 6
B. 菱形的面积为 26
C. 菱形的对角线均为整数
D. 菱形的周长为 20

10. (3 分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形, 点 D 是边 BC 上的一点, 且 $BD=1$, 以 AD 为边作等边 $\triangle ADE$, 过点 E 作 $EF \parallel BC$ 交 AC 于点 F , 连接 BF , 则下列结论中其中正确的有 ()

- ① $\triangle ABD \cong \triangle BCF$; ② 四边形 $BDEF$ 是平行四边形; ③ $S_{\text{四边形}BDEF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; ④ $S_{\triangle AEF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

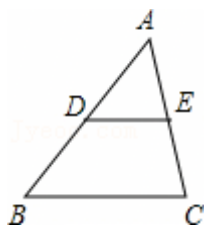


- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

二、填空题 (本大题共 8 小题, 每小题 2 分, 共 16 分. 不需写出解答过程, 只需把答案直接填写在答题卡上相应的位置处)

11. (2 分) 2024! “loong” 年大吉! 中国文化自信得到前所未有的彰显. 在 “loong” 中, 字母 “o” 出现的频数是 _____.

12. (2 分) 已知 $\triangle ABC$ 中, D 、 E 分别是 AB 、 AC 边上的中点, 且 $DE=3\text{cm}$, 则 $BC=$ _____ cm .



13. (2分) 若分式 $\frac{x^2-4}{x+2}$ 的值为 0, 则 $x=$ _____.

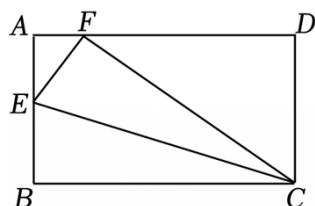
14. (2分) 在 $\square ABCD$ 中, 若 $\angle A = \angle B + 50^\circ$, 则 $\angle B$ 的度数为 _____ 度.

15. (2分) 某学习小组做“用频率估计概率”的试验时, 计算了某一结果出现的频率, 并绘制了表格, 则该结果发生的概率约为 _____ (精确到 0.1).

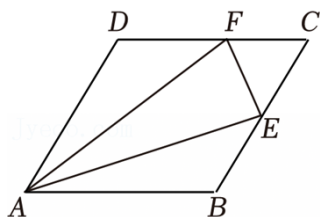
试验次数	100	500	1000	2000	4000
频率	0.37	0.32	0.34	0.339	0.333

16. (2分) 关于 x 的分式方程 $\frac{m}{x+3} = 1 - \frac{2x}{x+3}$ 有增根, 则 m 的值为 _____.

17. (2分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 E 是边 AB 上一点, 将 $\triangle BCE$ 沿 CE 折叠, 使点 B 落在 AD 边上的 F 处, 已知 $AD=5$, $AB=3$, 则 BE 的长为 _____.



18. (2分) 如图, 菱形 $ABCD$ 中, $\angle DAB=60^\circ$, 点 E 在边 BC 上, 点 F 在边 CD 上, 且 $BE=EC=2$, 若 $\angle DFA=2\angle EAB$, 则 $CF=$ _____.



三、解答题 (本大题共 9 小题, 共 74 分. 请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

19. (8分) 计算:

(1) $\frac{2a-3}{a+1} - \frac{a-2}{a+1}$;

(2) $(\frac{1}{x-2} - 1) \div \frac{3-x}{x^2-4}$.

20. (8分) 解方程:

$$(1) \frac{2}{x+2} = \frac{3}{x-2};$$

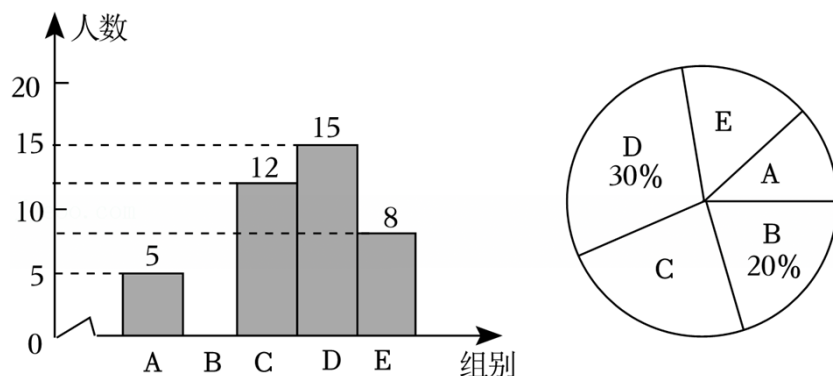
$$(2) \frac{x+1}{x-1} - \frac{4}{x^2-1} = 1.$$

21. (6分) 观察下面的等式: $\frac{1}{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$, $\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$, ……

(1) 按上面的规律归纳出一个一般的结论 (用含 n 的等式表示, 其中 n 为正整数).

(2) 请运用分式的有关知识, 推理说明这个结论是正确的.

22. (8分) 2023年10月26日11时14分, 神舟十七号载人飞船成功发射, 中国载人航天与空间站建设迎来全新的发展阶段. 为了弘扬航天精神, 实验中学开展了主题为“理想高于天, 青春梦启航”的航天知识竞答活动, 学校随机抽取了七年级的部分同学的成绩进行整理, 分成五组: A 组60分以下; B 组60~70分; C 组70~80分; D 组80~90分; E 组90~100分. 每个组都含最小值不含最大值, 例如 B 组包括60分, 但不包括70分, 并绘制了如图所示的条形、扇形统计图.



根据以上信息, 解答下列问题:

(1) 本次随机抽查 _____ 名同学; 并补全频数分布直方图;

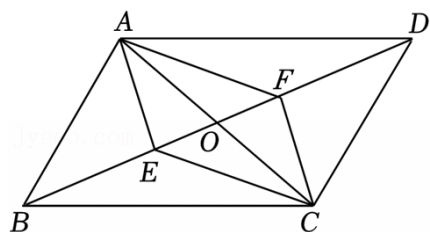
(2) 扇形统计图中, C 组所在扇形的圆心角度数为 _____;

(3) 该校要对成绩为 E 组90~100分的学生进行奖励, 按成绩从高分到低分设一、二等奖, 并且一、二等奖的人数比例为2:8, 请你估计该校1500名学生中获得一等奖的学生人数.

23. (8分) 如图, $\square ABCD$ 的对角线 AC , BD 相交于点 O , 点 E , F 在对角线 BD 上, 且 $BE=FD$, 连接 AE , EC , CF , AF .

(1) 求证: 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

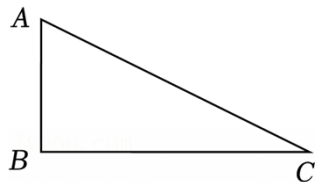
(2) 若 $BE=EF$, 且 $\triangle CFO$ 的面积等于6, 则四边形 $ABCD$ 的面积为 _____.



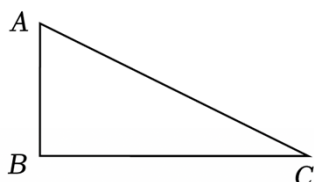
24. (8分) 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=90^\circ$.

(1) 尺规作图: 作矩形 $ABCD$; (不写作法, 保留作图痕迹)

(2) 在 (1) 的条件下, 若 $AB=4$, $BC=8$, 点 E 为边 AD 上一点, 若 BE 的中垂线分别交边 AD 、边 BC 于点 M 、 N , 则 MN 的长的取值范围为 _____. (如需画草图, 请使用试题卷中的图 2)



(图1)



(图2)

25. (8分) 某校开设智能机器人编程的校本课程, 购买了 A 、 B 两种型号的机器人模型. A 型机器人模型单价比 B 型机器人模型单价多 200 元, 用 2000 元购买 A 型机器人模型和用 1200 元购买 B 型机器人模型的数量相同.

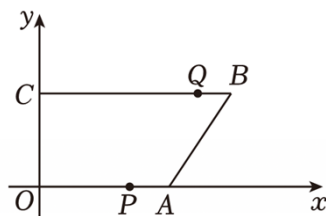
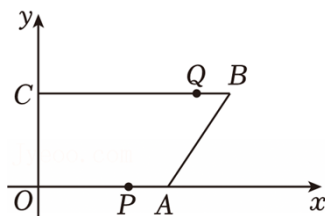
(1) 求 A 型, B 型机器人模型的单价分别是多少元?

(2) 学校准备再次购买 A 型和 B 型机器人模型共 40 台, 购买 B 型机器人模型不超过 A 型机器人模型的 3 倍. 问购买 A 型和 B 型机器人模型各多少台时花费最少? 最少花费是多少元?

26. (10分) 如图, 在平面直角坐标系中, 点 $A(4, 0)$, $B(6, 3)$, $C(0, 3)$.

(1) 若动点 P 从原点 O 出发, 以每秒 3 个单位长度沿着 x 轴正方向运动, 动点 Q 从点 B 出发, 以每秒 1 个单位长度向点 C 运动, 当点 Q 到达点 C 处时, 两点都停止运动. 设运动时间为 t (秒). 若以 A 、 B 、 P 、 Q 四个点为顶点的四边形是平行四边形, 求此时 t 的值;

(2) 点 M 在 x 轴上, 平面内是否存在点 N , 当以 A 、 C 、 M 、 N 为顶点的四边形是菱形时, 请直接写出所有满足条件的点 N 的坐标.



(备用图)

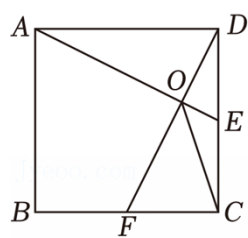
27. (10分) 已知, 正方形 $ABCD$ 中, 点 E , F 分别在 CD , BC 上, 连接 AE , DF .

(1) 如图 1, 若 E 为 CD 的中点, $AE \perp DF$ 于点 O .

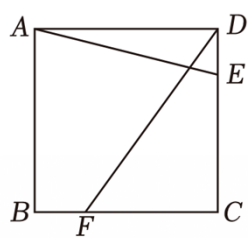
①求证: $AE=DF$;

②连接 OC , 求 $\frac{AO}{CO}$ 的值;

(2) 如图 2, 若 $AB = 4$, $DE = BF$, 则 $AE + DF$ 的最小值为 _____.



(图 1)



(图 2)

2023-2024 学年江苏省无锡市惠山区八年级（下）期中数学试卷

参考答案与试题解析

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	C	B	C	D	D	B	D	B	D

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分.在每小题所给出的四个选项中，只有一项是正确的，请用 2B 铅笔把答题卡上相应的选项标号涂黑）

1.（3 分）下列新能源汽车车标中，既是轴对称图形也是中心对称图形的是（ ）



【分析】根据中心对称图形的定义，结合选项所给图形进行判断即可．把一个图形绕某一点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形就叫做中心对称图形，这个点叫做对称中心．

【解答】解：选项 A、B、C 均不能找到这样的点，使图形绕某一点旋转 180° 后和原图形完全重合，所以不是中心对称图形，

选项 D 能找到这样的点，使图形绕某一点旋转 180° 后和原图形完全重合，所以是中心对称图形，故选：D．

【点评】此题主要考查了中心对称图形的概念．中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180° 后与原图重合．

2.（3 分）空气主要成分中氮气占约 78%，氧气约占 21%，其他微量气体约占 1%．要反映上述信息，宜采用的统计图是（ ）

A. 条形统计图

B. 折线统计图

C. 扇形统计图

D. 以上三种都可以

【分析】根据扇形统计图的特点：①用扇形的面积表示部分在总体中所占的百分比．②易于显示每组数据相对于总数的大小即可得到答案．

【解答】解：空气主要成分中氮气占约 78%，氧气约占 21%，其他微量气体约占 1%．要反映上述信息，

【分析】总体是指考查的对象的全体，个体是总体中的每一个考查的对象，样本是总体中所抽取的一部分个体，而样本容量则是指样本中个体的数目．我们在区分总体、个体、样本、样本容量，这四个概念时，首先找出考查的对象，从而找出总体、个体．再根据被收集数据的这一部分对象找出样本，最后再根据样本确定出样本容量．

【解答】解：A．这4万名考生的数学成绩是总体，此选项错误；

B．每个考生的数学成绩是个体，此选项错误；

C．2000名考生的数学成绩是总体的一个样本，此选项错误；

D．样本容量是2000，此选项正确；

故选：D．

【点评】本题考查了总体、个体、样本、样本容量的概念，解题要分清具体问题中的总体、个体与样本，关键是明确考查的对象．总体、个体与样本的考查对象是相同的，所不同的是范围的大小．样本容量是样本中包含的个体的数目，不能带单位．

6. (3分) 菱形具有而矩形不一定具有的性质是 ()

A. 对角线互相平分

B. 对角线相等

C. 邻边互相垂直

D. 对角线互相垂直

【分析】根据菱形和矩形的性质即可做出判断．

【解答】解：A、菱形的对角线相互平分，矩形的对角线也相互平分，不符合题意；

B、菱形的对角线有可能相等而矩形的对角线相等，不符合题意；

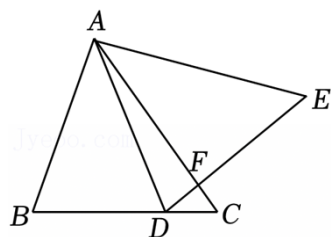
C、菱形的邻边不一定垂直，矩形的邻边互相垂直，不符合题意；

D、菱形点的对角线互相垂直，矩形的对角线不一定垂直，符合题意．

故选：D．

【点评】本题考查了菱形和矩形的性质，熟练掌握相关知识点是解决本题的关键．

7. (3分) 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=55^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 逆时针旋转 α ($0^\circ < \alpha < 55^\circ$)，得到 $\triangle ADE$ ，DE 交 AC 于 F．当 $\alpha=30^\circ$ 时，点 D 恰好落在 BC 上，此时 $\angle AFE$ 等于 ()



A. 110°

B. 100°

C. 90°

D. 80°

【分析】由 $\triangle ABC$ 逆时针旋转 α° ($0^\circ < \alpha < 55^\circ$)，得到 $\triangle ADE$ ， $\alpha=30^\circ$ ，得 $\angle BAD = \angle EAF =$

30° ， $AB=AD$ ，得 $\angle B=(180^\circ-30^\circ)\div 2=75^\circ$ ，由 $\angle BAC=55^\circ$ ，得 $\angle E=\angle C=180^\circ-55^\circ-75^\circ=50^\circ$ ，即可得 $\angle AFE=180^\circ-\angle E-\angle EAF=100^\circ$ 。

【解答】解：由 $\triangle ABC$ 逆时针旋转 α° （ $0^\circ<\alpha<55^\circ$ ），得到 $\triangle ADE$ ， $\alpha=30^\circ$ ，

得 $\angle BAD=\angle EAF=30^\circ$ ， $AB=AD$ ，

得 $\angle B=(180^\circ-30^\circ)\div 2=75^\circ$ ，

由 $\angle BAC=55^\circ$ ，

得 $\angle E=\angle C=180^\circ-55^\circ-75^\circ=50^\circ$ ，

得 $\angle AFE=180^\circ-\angle E-\angle EAF=100^\circ$ 。

故选：B。

【点评】本题主要考查了三角形的旋转，解题关键是旋转性质的正确应用。

- 8.（3分）随着生活水平的提高和环保意识的增强，小亮家购置了新能源电动汽车，这样他乘电动汽车比乘公交车上学所需的时间少用了15分钟，已知电动汽车的平均速度是公交车的2.5倍，小亮家到学校的距离为8千米．若设乘公交车平均每小时走 x 千米，则可列方程为（　　）

A. $\frac{8}{x}+15=\frac{8}{2.5x}$

B. $\frac{8}{x}=\frac{8}{2.5x}+15$

C. $\frac{8}{x}+\frac{1}{4}=\frac{8}{2.5x}$

D. $\frac{8}{x}=\frac{8}{2.5x}+\frac{1}{4}$

【分析】根据乘电动汽车与乘公交车速度间的关系，可得出乘电动汽车平均每小时走 $2.5x$ 千米，利用时间=路程 $\div$ 速度，结合乘电动汽车比乘公交车上学所需的时间少用了15分钟，即可得出关于 x 的分式方程，此题得解。

【解答】解： $\because$ 电动汽车的平均速度是公交车的2.5倍，乘公交车平均每小时走 x 千米，

$\therefore$ 乘电动汽车平均每小时走 $2.5x$ 千米。

依题意得： $\frac{8}{x}=\frac{8}{2.5x}+\frac{15}{60}$ ，

即 $\frac{8}{x}=\frac{8}{2.5x}+\frac{1}{4}$ 。

故选：D。

【点评】本题考查了由实际问题抽象出分式方程，找准等量关系，正确列出分式方程是解题的关键。

- 9.（3分）小明在研究某个菱形时，发现下列说法中只有一个是错误的，你认为错误的是（　　）

A. 菱形一条对角线长为6

B. 菱形的面积为26

C. 菱形的对角线均为整数

D. 菱形的周长为 20

【分析】根据菱形的性质进行判断各个选项的正确性即可.

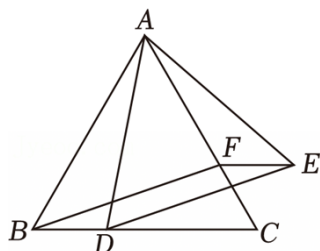
【解答】解：若菱形 $ABCD$ 的周长为 20，则边长 $=\frac{20}{4}=5$ ，两条对角线可以是 6 和 8，面积为 $\frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$ ，

故选：B.

【点评】此题考查菱形的性质，关键是根据菱形的性质得出边长和对角线以及面积解答.

10. (3 分) 如图，已知 $\triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形，点 D 是边 BC 上的一点，且 $BD=1$ ，以 AD 为边作等边 $\triangle ADE$ ，过点 E 作 $EF \parallel BC$ 交 AC 于点 F ，连接 BF ，则下列结论中其中正确的有 ()

① $\triangle ABD \cong \triangle BCF$ ；② 四边形 $BDEF$ 是平行四边形；③ $S_{\text{四边形}BDEF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ；④ $S_{\triangle AEF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【分析】连接 EC ，过点 C 作 $CH \perp EF$ 于点 H 。先证明 $\triangle BAD \cong \triangle CAE$ ，再证明 $\triangle EFC$ 是等边三角形，即可解决问题。

【解答】解：连接 EC ，过点 C 作 $CH \perp EF$ 于点 H 。

$\because \triangle ABC, \triangle ADE$ 都是等边三角形，

$\therefore AB = AC, AD = AE, \angle BAC = \angle DAE = \angle ABC = \angle ACB = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle BAD = \angle CAE$ ，

在 $\triangle BAD$ 与 $\triangle CAE$ 中，

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE \\ AD = AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE$ (SAS)，故①正确；

$\therefore BD = EC = 1, \angle ACE = \angle ABD = 60^\circ$ ，

$\because EF \parallel BC$ ，

$\therefore \angle EFC = \angle ACB = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle EFC$ 是等边三角形，

$\therefore EF = EC = BD = 1, FH = EH = \frac{1}{2}$ ，

$$\therefore CH = \sqrt{EC^2 - EH^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore EF \parallel BD,$$

$\therefore$ 四边形 $BDEF$ 是平行四边形，故②正确，

$$\therefore BD = CF = 1, BA = BC, \angle ABD = \angle BCF,$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle BCF$ (SAS)，故①正确，

$$\therefore S_{\text{平行四边形} BDEF} = BD \cdot CH = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 故③正确,}$$

$$\therefore AC = BC = 3, BD = CF = 1,$$

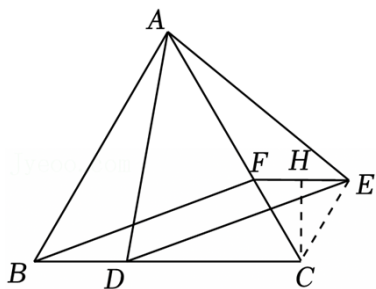
$$\therefore CD = 2BD, AF = 2CF,$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle AEF} = \frac{2}{3} \cdot S_{\triangle AEC} = \frac{2}{3} S_{\triangle ABD} = \frac{2}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 故④正确,}$$

$\therefore$ ①②③④都正确，

故选：D.



【点评】 本题考查平行四边形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、等边三角形的判定与性质以及勾股定理等知识，熟练掌握平行四边形的判定与性质是解题的关键．

二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 2 分，共 16 分.不需写出解答过程，只需把答案直接填写在答题卡上相应的位置处）

11. (2 分) 2024! “loong” 年大吉! 中国文化自信得到前所未有的彰显. 在 “loong” 中，字母 “o” 出现的频数是 2 .

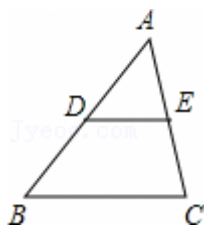
【分析】 根据频数定义可得答案.

【解答】 解：字母 “o” 出现的频数是 2.

故答案为：2.

【点评】 此题主要考查了频数，关键是掌握频数是指每个对象出现的次数.

12. (2 分) 已知 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分别是 AB 、 AC 边上的中点，且 $DE = 3\text{cm}$ ，则 $BC =$ 6 cm .



【分析】由 D, E 分别是边 AB, AC 的中点，首先判定 DE 是三角形的中位线，然后根据三角形的中位线定理求得 BC 的值即可。

【解答】解：∵ $\triangle ABC$ 中， D, E 分别是 AB, AC 边上的中点，
∴ DE 是三角形的中位线，
∵ $DE = 3\text{cm}$ ，
∴ $BC = 2DE = 6\text{cm}$ 。

故答案为：6。

【点评】本题重点考查了中位线定理，中位线是三角形中的一条重要线段，由于它的性质与线段的中点及平行线紧密相连，因此，它在几何图形的计算及证明中有着广泛的应用。

13. (2分) 若分式 $\frac{x^2-4}{x+2}$ 的值为 0，则 $x = \underline{2}$ 。

【分析】分式的值是 0 的条件是，分子为 0，分母不为 0。

【解答】解：∵ $x^2 - 4 = 0$ ，
∴ $x = \pm 2$ ，
当 $x = 2$ 时， $x + 2 \neq 0$ ，
当 $x = -2$ 时， $x + 2 = 0$ 。
∴ 当 $x = 2$ 时，分式的值是 0。

故答案为：2。

【点评】分式是 0 的条件中特别需要注意的是分母不能是 0，这是经常考查的知识点。

14. (2分) 在 $\square ABCD$ 中，若 $\angle A = \angle B + 50^\circ$ ，则 $\angle B$ 的度数为 65 度。

【分析】由平行四边形的性质可得 $\angle A + \angle B = 180^\circ$ ，即可求解。

【解答】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
∴ $\angle A + \angle B = 180^\circ$ ，
∵ $\angle A = \angle B + 50^\circ$ ，
∴ $\angle B = 65^\circ$ ， $\angle A = 115^\circ$ ，

故答案为：65。

【点评】 本题考查了平行四边形的性质，掌握平行四边形的邻角互补是解题的关键.

15. (2分) 某学习小组做“用频率估计概率”的试验时，计算了某一结果出现的频率，并绘制了表格，则该结果发生的概率约为 0.3 (精确到 0.1).

试验次数	100	500	1000	2000	4000
频率	0.37	0.32	0.34	0.339	0.333

【分析】 由表中数据可判断频率在 0.3 左右摆动，于是利用频率估计概率可判断该结果发生的概率为 0.3.

【解答】 解：根据某一结果出现的频率统计表，估计在一次实验中该结果出现的概率为 0.3，
故答案为：0.3.

【点评】 本题主要考查了利用频率估计概率，解题的关键是只能购物概率公式.

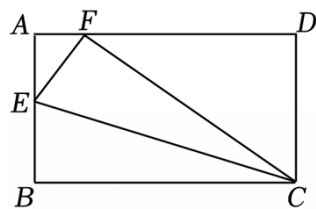
16. (2分) 关于 x 的分式方程 $\frac{m}{x+3} = 1 - \frac{2x}{x+3}$ 有增根，则 m 的值为 6.

【分析】 首先把所给的分式方程化为整式方程，然后根据分式方程有增根，得到 $x+3=0$ ，据此求出 x 的值，代入整式方程求出 m 的值即可.

【解答】 解：去分母，得： $m = x+3 - 2x$ ，
由分式方程有增根，得到 $x+3=0$ ，即 $x = -3$ ，
把 $x = -3$ 代入整式方程，可得： $m = -3+3 - 2 \times (-3) = 6$.
故答案为：6.

【点评】 此题主要考查了分式方程的增根，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：(1) 化分式方程为整式方程；(2) 把增根代入整式方程即可求得相关字母的值.

17. (2分) 如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 E 是边 AB 上一点，将 $\triangle BCE$ 沿 CE 折叠，使点 B 落在 AD 边上的 F 处，已知 $AD=5$ ， $AB=3$ ，则 BE 的长为 $\frac{5}{3}$.



【分析】 根据翻折的性质和勾股定理可求出 DF ，进而求出 AF ，在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中由勾股定理可求出 BE .

【解答】 解：由翻折的性质可知， $BE = EF$ ， $BC = FC = AD = 5$ ，
在 $\text{Rt}\triangle CDF$ 中， $CF = 5$ ， $CD = AB = 3$ ，
 $\therefore DF = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ ，

$$\therefore AF = AD - DF = 5 - 4 = 1,$$

设 $BE = x$ ，则 $EF = x$ ， $AE = 3 - x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中，由勾股定理得： $AF^2 + AE^2 = EF^2$ ，

$$\text{即 } 1 + (3 - x)^2 = x^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{5}{3},$$

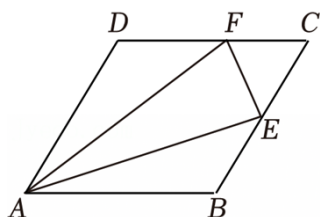
$$\text{即 } BE = \frac{5}{3}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{5}{3}.$$

【点评】 本题考查矩形的性质，直角三角形的边角关系以及翻折轴对称的性质，掌握翻折的性质以及直角三角形的边角关系是正确解答的关键。

18. (2分) 如图，菱形 $ABCD$ 中， $\angle DAB = 60^\circ$ ，点 E 在边 BC 上，点 F 在边 CD 上，且 $BE = EC = 2$ ，

若 $\angle DFA = 2\angle EAB$ ，则 $CF = \frac{8}{5}$ 。



【分析】 延长 AE ， DC 相交于点 G ，根据菱形的性质和全等三角形的判定和性质得出 $AF = AB + CF$ ，进而利用勾股定理解答即可。

【解答】 解：延长 AE ， DC 相交于点 G ，作 $AH \perp CD$ 于点 H ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore CD = BC = BE + EC = 4, \quad CD \parallel AB,$$

$$\therefore \angle EAB = \angle G,$$

在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle GCE$ 中，

$$\begin{cases} \angle AEB = \angle GEC \\ \angle EAB = \angle G \\ BE = CE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle GCE \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AB = CG,$$

$$\therefore \angle AFD = 2\angle EAB, \quad \angle AFD = \angle FAG + \angle G,$$

$$\therefore \angle FAG = \angle G,$$

$$\therefore AF=FG,$$

$$\therefore AF=AB+CF,$$

$$\text{设 } CF=x, AF=x+4, DF=4-x,$$

$$\because \angle DAB=60^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC=120^\circ,$$

$$\therefore \angle ADH=60^\circ,$$

$$\because AD=4,$$

$$\therefore HD=2,$$

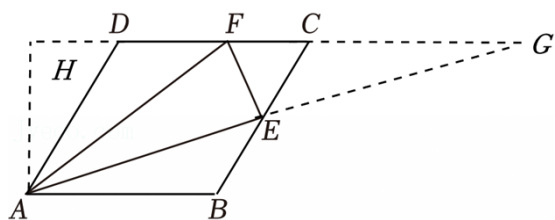
$$\because AD^2 - HD^2 = AF^2 - HF^2,$$

$$\text{即 } 4^2 - 2^2 = (x+4)^2 - (6-x)^2,$$

$$\text{解得: } x=\frac{8}{5},$$

$$\therefore FC=\frac{8}{5},$$

$$\text{故答案为: } \frac{8}{5}.$$



【点评】此题考查菱形的性质，关键是根据菱形的性质和全等三角形的判定和性质得出 $AF=AB+CF$ 解答.

三、解答题（本大题共 9 小题，共 74 分.请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

19.（8 分）计算：

$$(1) \frac{2a-3}{a+1} - \frac{a-2}{a+1};$$

$$(2) \left(\frac{1}{x-2} - 1\right) \div \frac{3-x}{x^2-4}.$$

【分析】（1）利用同分母的分式的减法法则运算；

（2）先把括号内通分，再把除法运算化为乘法运算，然后约分即可.

$$\text{【解答】解：(1) 原式} = \frac{2a-3-(a-2)}{a+1}$$

$$= \frac{2a-3-a+2}{a+1}$$

$$= \frac{a-1}{a+1};$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 原式} &= \frac{1-(x-2)}{x-2} \cdot \frac{(x+2)(x-2)}{-(x-3)} \\ &= \frac{x-3}{x-2} \cdot \frac{(x+2)(x-2)}{x-3} \\ &= x+2. \end{aligned}$$

【点评】 本题考查了分式的混合运算：分式的混合运算，一般按常规运算顺序，但有时应先根据题目的特点，运用乘法的运算律运算，会简化运算过程.

20. (8 分) 解方程：

$$(1) \frac{2}{x+2} = \frac{3}{x-2};$$

$$(2) \frac{x+1}{x-1} - \frac{4}{x^2-1} = 1.$$

【分析】 (1) 方程两边都乘 $(x+2)(x-2)$ 得出 $2(x-2) = 3(x+2)$ ，求出方程的解，再进行检验即可；

(2) 方程两边都乘 $(x+1)(x-1)$ 得出 $(x+1)^2 - 4 = (x+1)(x-1)$ ，求出方程的解，再进行检验即可.

【解答】 解：(1) $\frac{2}{x+2} = \frac{3}{x-2},$

方程两边都乘 $(x+2)(x-2)$ ，得 $2(x-2) = 3(x+2)$ ，

$$2x - 4 = 3x + 6,$$

$$2x - 3x = 6 + 4,$$

$$-x = 10,$$

$$x = -10,$$

检验：当 $x = -10$ 时， $(x+2)(x-2) \neq 0$ ，

所以分式方程的解是 $x = -10$ ；

$$(2) \frac{x+1}{x-1} - \frac{4}{x^2-1} = 1,$$

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{4}{(x+1)(x-1)} = 1,$$

方程两边都乘 $(x+1)(x-1)$ ，得 $(x+1)^2 - 4 = (x+1)(x-1)$ ，

$$x^2 + 2x + 1 - 4 = x^2 - 1,$$

$$x^2 + 2x - x^2 = -1 - 1 + 4,$$

$$2x=2,$$

$$x=1,$$

检验：当 $x=1$ 时， $(x+1)(x-1)=0$ ，

所以 $x=1$ 是增根，

即分式方程无解。

【点评】 本题考查了解分式方程，能把分式方程转化成整式方程是解此题的关键。

21. (6分) 观察下面的等式： $\frac{1}{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ ， $\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$ ， $\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$ ，……

(1) 按上面的规律归纳出一个一般的结论（用含 n 的等式表示，其中 n 为正整数）。

(2) 请运用分式的有关知识，推理说明这个结论是正确的。

【分析】 (1) 利用已知等式中各分母之间的数量关系得到一般的结论为 $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$ (n 为正整数)；

(2) 利用通分把等式右边通分、约分得到等式的左边。

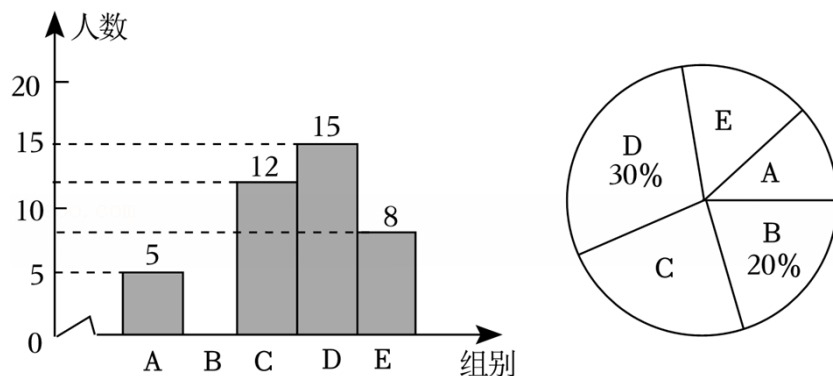
【解答】 解：(1) 一般的结论为： $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$ (n 为正整数)；

$$(2) \because \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n+1}{n(n+1)}=\frac{1}{n},$$

$$\therefore \frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)} \quad (n \text{ 为正整数}).$$

【点评】 本题考查了分式的混合运算：分式的混合运算，一般按常规运算顺序，但有时应先根据题目的特点，运用乘法的运算律运算，会简化运算过程。

22. (8分) 2023年10月26日11时14分，神舟十七号载人飞船成功发射，中国载人航天与空间站建设迎来全新的发展阶段。为了弘扬航天精神，实验中学开展了主题为“理想高于天，青春梦启航”的航天知识竞答活动，学校随机抽取了七年级的部分同学的成绩进行整理，分成五组： A 组60分以下； B 组60~70分； C 组70~80分； D 组80~90分； E 组90~100分。每个组都含最小值不含最大值，例如 B 组包括60分，但不包括70分，并绘制了如图所示的条形、扇形统计图。



根据以上信息，解答下列问题：

(1) 本次随机抽查 50 名同学；并补全频数分布直方图；

(2) 扇形统计图中， C 组所在扇形的圆心角度数为 86.4° ；

(3) 该校要对成绩为 E 组 $90\sim 100$ 分的学生进行奖励，按成绩从高分到低分设一、二等奖，并且一、二等奖的人数比例为 $2:8$ ，请你估计该校 1500 名学生中获得一等奖的学生人数。

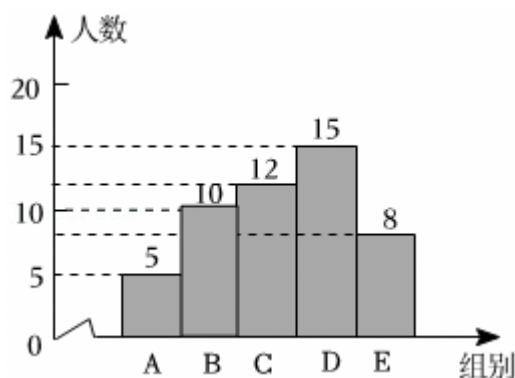
【分析】(1) 由 D 组人数及其所占百分比可得总人数，总人数乘以 B 组对应百分比求出其人数即可补全图形；

(2) 360° 乘以 C 组人数所占比例即可；

(3) 总人数乘以一等奖人数所占比例，再乘以样本中 E 组人数所占比例即可。

【解答】解：(1) 本次随机抽查的学生人数是 $15 \div 30\% = 50$ (人)，
 B 组人数为 $50 \times 20\% = 10$ (人)，

补全图形如下：



故答案为：50；

(2) 扇形统计图中， C 组所在扇形的圆心角度数为 $360^\circ \times \frac{12}{50} = 86.4^\circ$ ，

故答案为： 86.4° ；

(3) $1500 \times \frac{8}{50} \times \frac{2}{2+8} = 48$ (人)，

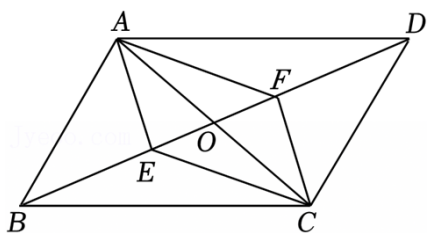
答：估计该校 1500 名学生中获得一等奖的学生人数为 48 人。

【点评】本题考查频数分布直方图、扇形统计图、用样本估计总体，解答本题的关键是明确统计图的特点和中位数的含义，利用数形结合的思想解答。

23. (8 分) 如图， $\square ABCD$ 的对角线 AC ， BD 相交于点 O ，点 E ， F 在对角线 BD 上，且 $BE=FD$ ，连接 AE ， EC ， CF ， AF 。

(1) 求证：四边形 $AECF$ 是平行四边形。

(2) 若 $BE=EF$ ，且 $\triangle CFO$ 的面积等于 6，则四边形 $ABCD$ 的面积为 72。



【分析】(1) 由平行四边形的性质得 $AO=CO$ ， $BO=DO$ ，再证明 $EO=FO$ ，然后由平行四边形的判定即可得出结论；

(2) 由 $BE=EF=FD$ ，得 $S_{\triangle ABE}=S_{\triangle AEF}=S_{\triangle ADF}$ ，再求出 $S_{\triangle ABE}=S_{\triangle AEF}=S_{\triangle ADF}=2S_{\triangle CFO}=12$ ，然后由平行四边形的性质即可得出结论。

【解答】(1) 证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AO=CO, BO=DO,$$

$$\because BE=FD,$$

$$\therefore BO - BE = DO - FD,$$

$$\text{即 } EO=FO,$$

$\therefore$ 四边形 $AE CF$ 是平行四边形；

(2) 解： $\because BE=EF=FD$ ，

$$\therefore S_{\triangle ABE}=S_{\triangle AEF}=S_{\triangle ADF},$$

$$\because EO=FO,$$

$$\therefore S_{\triangle ABE}=S_{\triangle AEF}=S_{\triangle ADF}=2S_{\triangle CFO}=2 \times 6 = 12,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore S_{\triangle ABD}=S_{\triangle CBD}=12+12+12=36,$$

$$\therefore S_{\text{平行四边形 } ABCD}=2 \times 36 = 72,$$

故答案为：72。

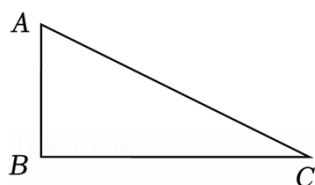
【点评】 本题考查了平行四边形的判定与性质以及三角形面积等知识，熟练掌握平行四边形的判定与性质是解题的关键。

24. (8 分) 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC=90^\circ$ 。

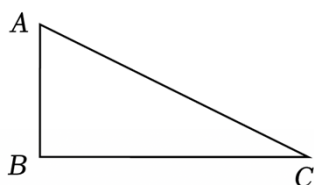
(1) 尺规作图：作矩形 $ABCD$ ；(不写作法，保留作图痕迹)

(2) 在 (1) 的条件下，若 $AB=4$ ， $BC=8$ ，点 E 为边 AD 上一点，若 BE 的中垂线分别交边 AD 、边 BC 于点 M 、 N ，则 MN 的长的取值范围为 $2\sqrt{5} \leq MN \leq 4\sqrt{2}$ 。(如需画草图，请使用试题卷中的图

2)



(图1)

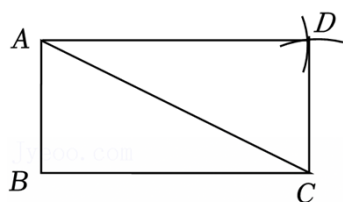


(图2)

【分析】(1) 分别以 A , C 为圆心, BC , AB 为半径作弧, 两弧交于点 D , 连接 AD , CD 即可;

(2) 判断出如图 2 中, 当点 M 与 A 重合时, MN 的长最大, 如图 2 中, 当点 E 以 D 重合时, MN 的长最小, 分别求出最大值, 最小值可得结论.

【解答】解: (1) 如图 1 中, 四边形 $ABCD$ 即为所求;

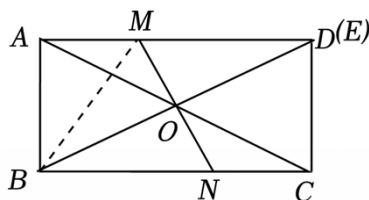
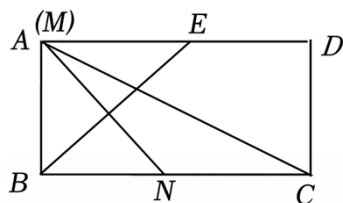


(图1)

(2) 如图 2 中, 当点 M 与 A 重合时, MN 的长最大, 最大值 $=\sqrt{2}AB=4\sqrt{2}$;

如图 2 中, 当点 E 以 D 重合时, 连接 BM , 设 BD , AC 交于点 O , MN 的长最小, 设 $BM=DM=x$, 则有 $x^2=4^2+(8-x)^2$,

解得 $x=5$,



(图2)

$$\because \angle BAD=90^\circ, AB=4, AD=8,$$

$$\therefore BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5},$$

$$\therefore OB=OD=2\sqrt{5},$$

$$\therefore OM=ON=\sqrt{DM^2-OD^2}=\sqrt{5^2-(2\sqrt{5})^2}=\sqrt{5},$$

$$\therefore MN=2\sqrt{5},$$

$$\therefore 2\sqrt{5}\leq MN\leq 4\sqrt{2}.$$

故答案为: $2\sqrt{5}\leq MN\leq 4\sqrt{2}$.

【点评】 本题考查作图 - 复杂作图，线段的垂直平分线的性质，矩形的判定和性质等知识，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题.

25. (8 分) 某校开设智能机器人编程的校本课程，购买了 A ， B 两种型号的机器人模型. A 型机器人模型单价比 B 型机器人模型单价多 200 元，用 2000 元购买 A 型机器人模型和用 1200 元购买 B 型机器人模型的数量相同.

(1) 求 A 型， B 型机器人模型的单价分别是多少元？

(2) 学校准备再次购买 A 型和 B 型机器人模型共 40 台，购买 B 型机器人模型不超过 A 型机器人模型的 3 倍. 问购买 A 型和 B 型机器人模型各多少台时花费最少？最少花费是多少元？

【分析】 (1) 根据“用 2000 元购买 A 型机器人模型和用 1200 元购买 B 型机器人模型的数量相同”列方程求解；

(2) 先根据“购买 B 型机器人模型不超过 A 型机器人模型的 3 倍”求出取值范围，再根据一次函数的性质求解.

【解答】 解：(1) 设 A 型编程机器人模型单价是 x 元， B 型编程机器人模型单价是 $(x - 200)$ 元.

根据题意：
$$\frac{2000}{x} = \frac{1200}{x-200},$$

解这个方程，得： $x = 500$,

经检验， $x = 500$ 是原方程的根，

$\therefore x - 200 = 300$,

答： A 型编程机器人模型单价是 500 元， B 型编程机器人模型单价是 300 元；

(2) 设购买 A 型编程机器人模型 m 台，购买 B 型编程机器人模型 $(40 - m)$ 台，

购买 A 型和 B 型编程机器人模型共花费 w 元，

由题意得： $40 - m \leq 3m$,

解得： $m \geq 10$,

$w = 500m + 300 \times (40 - m)$,

即： $w = 200m + 12000$,

$\because 200 > 0$,

$\therefore w$ 随 m 的减小而减小.

当 $m = 10$ 时， w 取得最小值 14000，

$\therefore 40 - m = 30$,

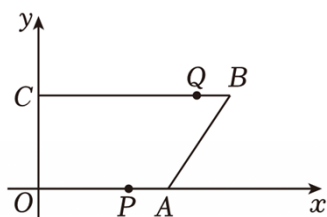
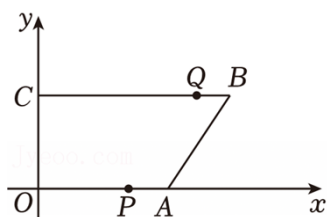
答：购买 A 型机器人模型 10 台和 B 型机器人模型 30 台时花费最少，最少花费是 14000 元.

【点评】 本题考查了分式方程的应、一元一次不等式的应用及一次函数的应用，找到相等关系是解题的关键.

26. (10 分) 如图，在平面直角坐标系中，点 $A(4, 0)$ ， $B(6, 3)$ ， $C(0, 3)$.

(1) 若动点 P 从原点 O 出发，以每秒 3 个单位长度沿着 x 轴正方向运动，动点 Q 从点 B 出发，以每秒 1 个单位长度向点 C 运动，当点 Q 到达点 C 处时，两点都停止运动. 设运动时间为 t (秒). 若以 A 、 B 、 P 、 Q 四个点为顶点的四边形是平行四边形，求此时 t 的值；

(2) 点 M 在 x 轴上，平面内是否存在点 N ，当以 A 、 C 、 M 、 N 为顶点的四边形是菱形时，请直接写出所有满足条件的点 N 的坐标.



(备用图)

【分析】 (1) 分两种情况，由平行四边形的性质可得出答案；

(2) 分不同情况画出图形，由菱形的性质可得出答案.

【解答】 解：(1) 若点 P 在点 A 的左侧，四边形 $PABQ$ 为平行四边形， $PA=QB$,

由题意得 $4-3t=t$,

解得 $t=1$,

若点 P 在点 A 的右侧，四边形 $PAQB$ 为平行四边形， $PA=QB$,

$$\therefore 3t-4=t,$$

解得 $t=2$,

综上： $t=1$ 或 2 时，以 A ， B ， P ， Q 为顶点的四边形为平行四边形.

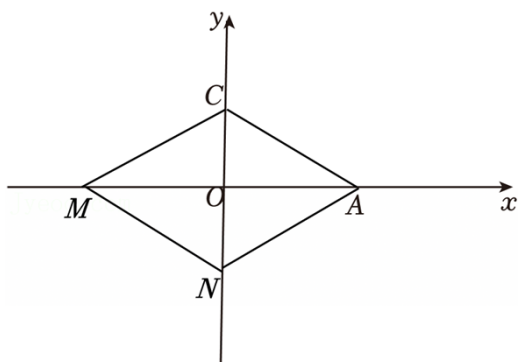
(2) N 点坐标为 $(-5, 3)$ ， $(5, 3)$ ， $(0, -3)$ ， $(\frac{25}{8}, 3)$.

$\because$ 点 $A(4, 0)$ ， $C(0, 3)$,

$$\therefore AO=4, OC=3,$$

$$\therefore AC=\sqrt{OA^2+OC^2}=5,$$

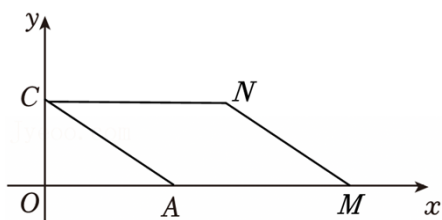
如图，以 AC 为边，四边形 $ACMN$ 是菱形，



$$\therefore C(0, 3),$$

$$\therefore N(0, -3);$$

如图，以 AC 为边，四边形 $ACNM$ 是菱形，



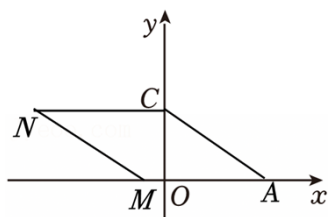
$$\therefore CN=AC=5, CN \parallel AM,$$

$$\therefore N(5, 3);$$

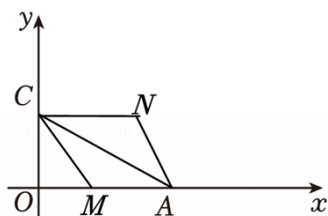
如图，以 AC 为边，四边形 $ACNM$ 是菱形，

$$\therefore CN=AC=5, CN \parallel AM,$$

$$\therefore N(-5, 3);$$



如图，以 AC 为对角线，四边形 $ACNM$ 是菱形，



$$\text{设 } CM=AM=CN=x,$$

$$\therefore OM=4-x,$$

$$\therefore OC^2+OM^2=CM^2,$$

$$\therefore 3^2 + (4 - x)^2 = x^2,$$

$$\therefore x = \frac{25}{8},$$

$$\therefore CN = \frac{25}{8},$$

$$\therefore N\left(\frac{25}{8}, 3\right);$$

综上所述，以 A 、 C 、 M 、 N 为顶点的四边形是菱形时，点 N 的坐标为 $(-5, 3)$ ， $(5, 3)$ ， $(0, -3)$ ， $\left(\frac{25}{8}, 3\right)$ 。

【点评】 本题考查了平行四边形的判定与性质，菱形的判定与性质，勾股定理，熟练掌握以上知识是解题的关键。

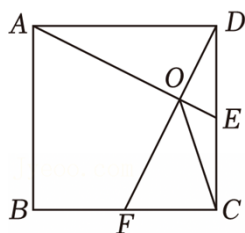
27. (10 分) 已知，正方形 $ABCD$ 中，点 E ， F 分别在 CD ， BC 上，连接 AE ， DF 。

(1) 如图 1，若 E 为 CD 的中点， $AE \perp DF$ 于点 O 。

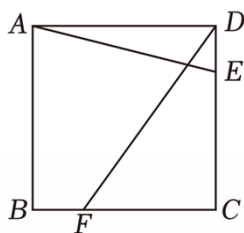
① 求证： $AE = DF$ ；

② 连接 OC ，求 $\frac{AO}{CO}$ 的值；

(2) 如图 2，若 $AB = 4$ ， $DE = BF$ ，则 $AE + DF$ 的最小值为 $4\sqrt{5}$ 。



(图 1)



(图 2)

【分析】 (1) ① 利用 $\angle EAD = \angle FDC$ ， $AD = DC$ ， $\angle ADE = \angle DCF$ 推导出 $\triangle ADE \cong \triangle DCF$ ，进而得证；

② 如图 (1)，过点 C 作 $CG \perp DF$ 于点 G ，作 $CH \perp AE$ 于 AE 的延长线点 H ，推导出 $\triangle GCF \cong \triangle HCE$ (AAS)，进而得到 $GC = HC$ ，推导出 $\triangle ADE \cong \triangle DCF$ ，得到 $\angle DAE = \angle CDF$ ，进一步推导出 $\triangle AOD \cong \triangle DGC$ (AAS)，得到 $AO = DG$ ， $DO = GC$ ，

又 $\because OG = GC$ ，得到 $AO = 2GC$ ，进而得出 $\frac{AO}{CO} = \frac{2GC}{\sqrt{2}GC} = \sqrt{2}$ ；

(2) 连接 AF ，延长 DC 至 P ，使得 $CD = CP$ ，连接 FP ，首先推导出 $\triangle ADE \cong \triangle ABF$ (SAS)，得到 $AE = AF$ ，所以 $AE + DF = AF + FP \geq AP$ ，最后利用勾股定理得到 $AP = \sqrt{AD^2 + DP^2} = 4\sqrt{5}$ ，即可得解。

故答案为： $4\sqrt{5}$ 。

【解答】 (1) ① 证明：由正方形 $ABCD$ 可知 $AD = DC$ ， $\angle ADF + \angle CDF = 90^\circ$ ， $\angle ADE = \angle DCF = 90^\circ$ ，

又 $\because AE \perp DF$,

$\therefore \angle EAD + \angle ADF = 90^\circ$, 即 $\angle EAD = \angle CDF$.

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle DCF$ 中,

$$\begin{cases} \angle EAD = \angle FDC \\ AD = DC \\ \angle ADE = \angle DCF \end{cases},$$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle DCF$ (ASA),

$\therefore AE = DF$;

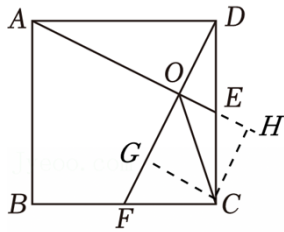
②解: 如图 (1), 过点 C 作 $CG \perp DF$ 于点 G , 作 $CH \perp AE$ 于 AE 的延长线点 H ,

又 $\because AE \perp DF$,

$\therefore$ 四边形 $OGCH$ 为矩形,

$\therefore \angle GCH = 90^\circ$,

$\because \angle FCG + \angle GCE = 90^\circ$, $\angle GCE + \angle ECH = 90^\circ$,



(图 1)

$\therefore \angle GCF = \angle HCE$,

由①知 $\triangle ADE \cong \triangle DCF$,

$\therefore DE = CF = \frac{1}{2}CD$,

$\therefore FC = EC$,

$\because \angle FGC = \angle EHC = 90^\circ$,

$\therefore \triangle GCF \cong \triangle HCE$ (AAS),

$\therefore GC = HC$,

$\therefore$ 四边形 $OGCH$ 为正方形,

$\therefore OC = \sqrt{2}OG$,

$\because \triangle ADE \cong \triangle DCF$,

$\therefore \angle DAE = \angle CDF$,

$\because \angle AOD = \angle DGC = 90^\circ$, $AD = CD$,

$\therefore \triangle AOD \cong \triangle DGC$ (AAS),

$$\therefore AO=DG, DO=GC,$$

$$\text{又} \because OG=GC,$$

$$\therefore AO=2GC,$$

$$\therefore \frac{AO}{CO} = \frac{2GC}{\sqrt{2}GC} = \sqrt{2};$$

(2) 如图 (2), 连接 AF , 延长 DC 至 P , 使得 $CD=CP$, 连接 FP ,

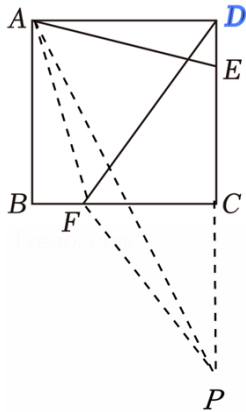


图 (2)

$$\because CF \text{ 垂直平分 } DP,$$

$$\therefore DF=PF,$$

$$\because AD=AB, \angle ADE=\angle B=90^\circ, BF=DE,$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle ABF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore AE=AF,$$

$$\therefore AE+DF=AF+FP \geq AP,$$

$$\because AD=AB=4, DP=8,$$

$$\therefore AP = \sqrt{AD^2 + DP^2} = 4\sqrt{5},$$

故答案为: $4\sqrt{5}$.

【点评】 本题是四边形的综合题, 主要考查了正方形的性质、全等三角形的判定与性质、垂直平分线的性质、勾股定理、两点之间线段最短, 解决此题的关键是过点 C 分别作 $CH \perp DF$ 于 H , $CG \perp AE$ 于 G , 构造 $\triangle CHF \cong \triangle CGE$, 连接 AF , 延长 DC 至 P , 使得 $CD=CP$, 连接 EP , 将 $AE+DF$ 的最小值转化为 AP 的长.