

2024-2025 学年八年级数学下学期第一次月考卷

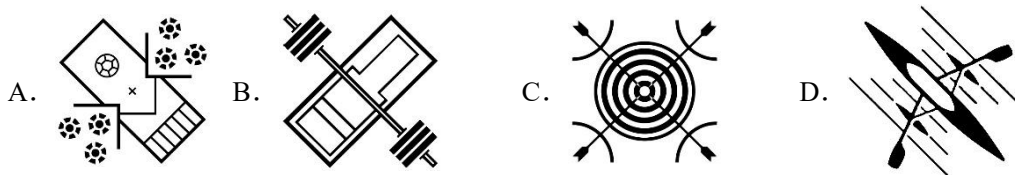
(考试时间：90 分钟 试卷满分：120 分)

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 做选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。
3. 做填空题和解答题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
4. 测试范围：苏科版八年级下第7章、9、12章。
5. 难度系数：0.70

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1. 在 2024 年巴黎奥运会上，中国体育代表团获得 40 金、27 银和 24 铜共 91 枚奖牌，创造了中国参加境外奥运会的最佳战绩。以下是巴黎奥运会部分项目的图标，其中是中心对称图形的是（ ）



【答案】C

【详解】解：A、该图不能找到这样的点，使图形绕这个点旋转 180° 后与原来的图形重合，
 $\therefore$ 不是中心对称图形，故本选项不符合题意；
B、该图不能找到这样的点，使图形绕这个点旋转 180° 后与原来的图形重合，
 $\therefore$ 不是中心对称图形，故本选项不符合题意；
C、该图能找到这样的点，使图形绕这个点旋转 180° 后与原来的图形重合，
 $\therefore$ 是中心对称图形，故本选项符合题意；
D、该图不能找到这样的点，使图形绕这个点旋转 180° 后与原来的图形重合，
 $\therefore$ 不是中心对称图形，故本选项不符合题意。

故选：C。

2. 下列计算正确的是（ ）

A. $\sqrt{4} = \pm 2$ B. $|1 - \sqrt{2}| = 1 - \sqrt{2}$ C. $\sqrt[3]{(-4)^3} = -4$ D. $\sqrt{(-2)^2} = -2$

【答案】C

【详解】解：A、 $\sqrt{4}=2$ ，选项错误，故此选项不合题意；

B、 $|1-\sqrt{2}|=\sqrt{2}-1$ ，选项错误，故此选项不合题意；

C、 $\sqrt[3]{(-4)^3}=-4$ ，选项正确，故此选项符合题意；

D、 $\sqrt{(-2)^2}=2$ ，选项错误，故此选项不合题意；

故选：C.

3. 2024 年 10 月 30 日，神舟十九号载人飞船发射取得圆满成功，航天员乘组顺利进驻中国空间站，为了解某校七年级学生对此次载人飞船发射的知晓情况，从该校随机抽取了 100 名七年级学生进行调查，下列说法正确的是（ ）

A. 总体是某校七年级学生

B. 个体是每个学生

C. 样本是抽取的 100 个学生

D. 样本容量是 100

【答案】D

【详解】解：A、总体是某校七年级学生对此次载人飞船发射的知晓情况，故 A 不符合题意；

B、个体是每个学生对此次载人飞船发射的知晓情况，故 B 不符合题意；

C、样本是抽取的 100 个学生对此次载人飞船发射的知晓情况，故 C 不符合题意；

D、样本容量是 100，故 D 符合题意；

故选：D.

4. 已知 n 是正整数， $\sqrt{18n}$ 是整数，则 n 的最小值为（ ）

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】A

【详解】解： $\because n$ 是正整数， $\sqrt{18n}$ 是正整数，

$\therefore 18n$ 是一个完全平方数，

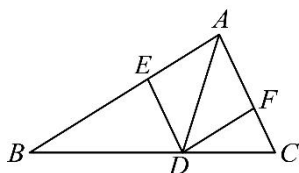
$\because 18n = 2 \times 3^2 \times n = 3^2 \times (2n)$ ，

$\therefore 2n$ 是一个完全平方数，

$\therefore n$ 的最小值为 2，

故选：A.

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel CA$ ， $DF \parallel BA$ ，下列四个判断不正确的是（ ）



- A. 四边形 $AEDF$ 是平行四边形
- B. 如果 $\angle BAC = 90^\circ$ ，那么四边形 $AEDF$ 是矩形
- C. 如果 AD 平分 $\angle BAC$ ，那么四边形 $AEDF$ 是矩形
- D. 如果 $AD \perp BC$ ，且 $AB = AC$ ，那么四边形 $AEDF$ 是菱形

【答案】C

【详解】解：由 $DE \parallel CA$ ， $DF \parallel BA$ ，根据两组对边分别平行的四边形是平行四边形可得四边形 $AEDF$ 是平行四边形；

又有 $\angle BAC = 90^\circ$ ，根据有一角是直角的平行四边形是矩形，可得四边形 $AEDF$ 是矩形．故 A、B 正确；

如果 AD 平分 $\angle BAC$ ，那么 $\angle EAD = \angle FAD$ ，又有 $DF \parallel BA$ ，可得 $\angle EAD = \angle ADF$ ，

$\therefore \angle FAD = \angle ADF$ ，

$\therefore AF = FD$ ，那么根据邻边相等的平行四边形是菱形，可得四边形 $AEDF$ 是菱形，而不一定是矩形．故 C 错误；

如果 $AD \perp BC$ 且 $AB = AC$ ，那么 AD 平分 $\angle BAC$ ，同上可得四边形 $AEDF$ 是菱形．故 D 正确．

故选：C

6. 下列结论中，矩形具有而菱形不一定具有的性质是（ ）

- A. 内角和为 360°
- B. 对角线互相平分
- C. 对角线相等
- D. 对角线互相垂直

【答案】C

【详解】A、菱形、矩形的内角和都为 360° ，故本选项错误；

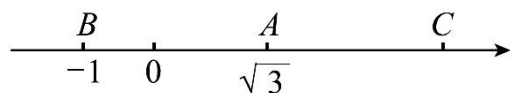
B、对角互相平分，菱形、矩形都具有，故本选项错误；

C、对角线相等菱形不具有，而矩形具有，故本选项正确；

D、对角线互相垂直，菱形具有而矩形不具有，故本选项错误；

故选：C

7. 如图，数轴上，点 A 为线段 BC 的中点， A ， B 两点对应的实数分别是 $\sqrt{3}$ 和 -1 ，则点 C 所对应的实数是（ ）



A. $1+\sqrt{3}$

B. $\frac{3}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}$

C. $2\sqrt{3}-1$

D. $2\sqrt{3}+1$

【答案】D**【详解】**解：由题可知： $AB=\sqrt{3}-(-1)=\sqrt{3}+1$ ， $\because$ 点 A 为线段 BC 的中点，

$\therefore AC=AB=\sqrt{3}+1$ ，

 $\therefore A$ 对应的实数是 $\sqrt{3}$ ， $\therefore C$ 点对应的实数是 $2\sqrt{3}+1$ 。

故选：D。

8. 我国南宋著名数学家秦九韶在他的著作《数书九章》一书中，给出了下面的公式：如果一个三角形的三

边长分别为 a 、 b 、 c ，则该三角形的面积为 $S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]}$ 。已知 $\triangle ABC$ 的三边长 a 、 b 、 c 分别为 1 、 $\sqrt{3}$ 、 2 ，则 $\triangle ABC$ 的面积是（ ）

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

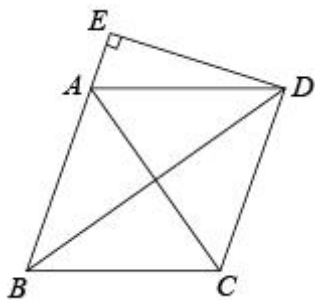
C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\sqrt{3}$

【答案】C**【详解】**解： $\because \triangle ABC$ 的三边长 a 、 b 、 c 分别为 1 、 $\sqrt{3}$ 、 2 ，

$$\therefore S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]}=\sqrt{\frac{1}{4}\left[1\times 3-\left(\frac{1+3-4}{2}\right)^2\right]}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}，$$

故选：C。

9. 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $AB=5$ ， $AC=6$ ，过点 D 作 $DE\perp BA$ ，交 BA 的延长线于点 E ，则线段 DE 的长为（ ）

A. $\frac{12}{5}$

B. $\frac{18}{5}$

C. 4

D. $\frac{24}{5}$

【答案】D

【详解】解：记 AC 与 BD 的交点为 O ，

$\because$ 菱形 $ABCD$ ， $AC = 6$ ，

$\therefore AC \perp BD$ ， $OA = OC = 3$ ， $OB = OD$ ，

$\because AB = 5$ ，

$\therefore OB = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ ， $BD = 8$ ，

$\therefore$ 菱形的面积 $= \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$ ，

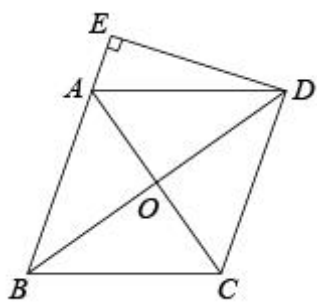
$\because DE \perp AB$ ，

$\therefore$ 菱形的面积 $= AB \cdot DE$ ，

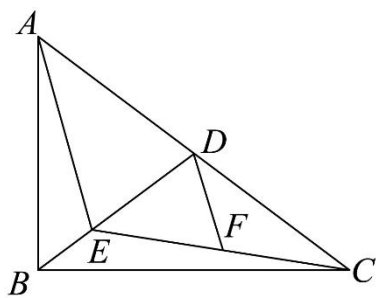
$\therefore 5DE = 24$ ，

$\therefore DE = \frac{24}{5}$ 。

故选 D。



10. 如图，在 $Rt \triangle ABC$ 中， D 为斜边 AC 的中点， E 为 BD 上一点， F 为 CE 中点。若 $AE = AD$ ， $DF = 2$ ，则 BD 的长为（ ）



A. $2\sqrt{2}$

B. 3

C. $2\sqrt{3}$

D. 4

【答案】D

【详解】解： $\because D$ 为斜边 AC 的中点， F 为 CE 中点， $DF = 2$ ，

$\therefore AE = 2DF = 4$ ，

$\because AE = AD$ ，

$$\therefore AD=4,$$

在 $Rt\triangle ABC$ 中, D 为斜边 AC 的中点,

$$\therefore BD = \frac{1}{2} AC = AD = 4,$$

故选: D.

二、填空题: 本题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分。

11. 若二次根式 $\sqrt{3-2x}$ 在实数范围内有意义, 那么 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \leq \frac{3}{2}$

【详解】解: 根据题意, 得

$$3-2x \geq 0,$$

解得: $x \leq \frac{3}{2},$

故答案是: $x \leq \frac{3}{2}.$

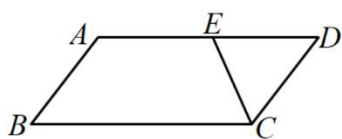
12. 已知菱形 $ABCD$ 的两条对角线长分别为 $\sqrt{6}$ 和 $2\sqrt{2}$, 则该菱形的面积为_____.

【答案】 $2\sqrt{3}$

【详解】解: 菱形的面积 $= \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{3},$

故答案为: $2\sqrt{3}.$

13. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AD=2AB$, CE 平分 $\angle BCD$ 交 AD 边于点 E , 且 $AE=2$, 则 AB 的长为__.



【答案】 2

【详解】解: $\because CE$ 平分 $\angle BCD$ 交 AD 边于点 E ,

$$\therefore \angle ECD = \angle ECB,$$

$\because$ 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC, AB = CD,$

$$\therefore \angle DEC = \angle ECB,$$

$$\therefore \angle DEC = \angle DCE,$$

$$\therefore DE = DC,$$

$$\because AD = 2AB,$$

$$\therefore AD = 2CD,$$

$$\therefore AE = DE = AB = 2$$

故答案为：2.

14. 若 $(2 + \sqrt{3})(2 + m)$ 的积是有理数，则无理数 m 的值为_____.

【答案】 $-\sqrt{3}$ （答案不唯一）

【详解】解： $(2 + \sqrt{3})(2 + m)$

$$= 4 + 2\sqrt{3} + 2m + \sqrt{3}m$$

$(2 + \sqrt{3})(2 + m)$ 的积是有理数， m 是无理数，

$\therefore 2\sqrt{3} + 2m + \sqrt{3}m$ 是有理数，

令 $2\sqrt{3} + 2m + \sqrt{3}m = a$ ，（ a 是有理数）

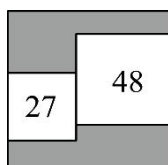
$$\text{解得： } m = \frac{a - 2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = (a - 2\sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = (2a + 6) - (a + 4)\sqrt{3},$$

当 $2a + 6 = 0$ 即 $a = -3$ ，

时 $m = -\sqrt{3}$ ，

故答案为： $-\sqrt{3}$ （答案不唯一）.

15. 如图，从一个大正方形中裁去面积为 27 和 48 的两个小正方形，则剩下阴影部分的面积是_____.



【答案】 72

【详解】解： $\because$ 两个小正方形面积为 27 和 48，

$$\therefore \text{大正方形边长为： } \sqrt{27} + \sqrt{48} = 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 7\sqrt{3},$$

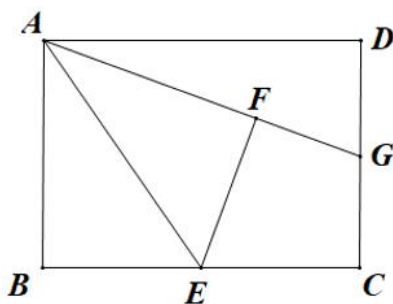
$$\therefore \text{大正方形面积为 } (7\sqrt{3})^2 = 147,$$

$$\therefore \text{留下的阴影部分面积和为： } 147 - 27 - 48 = 72$$

故答案为： 72.

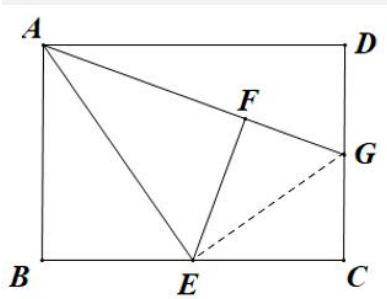
16. 如图，在长方形 $ABCD$ 中，点 E 是 BC 的中点，将 ABE 沿着 AE 折叠得到 $\triangle AFE$ ，延长 AF 交 CD 于点

G ，若 $AG = \frac{25}{2}$ ， $AB = 8$ ，则 CG 的长为_____.



【答案】 $\frac{9}{2}$

【详解】解：如图，连接 EG ，



$\because$ 在长方形 $ABCD$ 中，点 E 是 BC 的中点，

$\therefore BE = CE$ ， $\angle B = \angle C = 90^\circ$ ，

$\because$ 将 ABE 沿着 AE 折叠得到 $\triangle AFE$ ，

$\therefore AF = AB$ ， $BE = FE$ ， $\angle AFE = \angle B = 90^\circ$ ，

$\therefore FE = CE$ ， $\angle EFG = 90^\circ$ ，

在 $\text{Rt } EGF$ 和 $\text{Rt } EGC$ 中，

$$\begin{cases} FE = CE \\ EG = EG \end{cases},$$

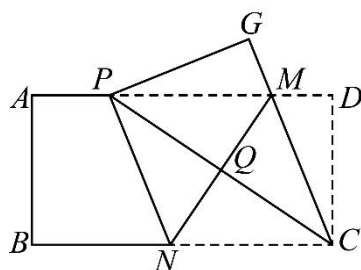
$\therefore \text{Rt } EGF \cong \text{Rt } EGC (\text{HL})$ ，

$$\therefore CG = FG = AG - AF = AG - AB = \frac{25}{2} - 8 = \frac{9}{2},$$

故答案为： $\frac{9}{2}$.

17. 如图，矩形纸片 $ABCD$ ， $AB = 4$ ， $BC = 8$ ，点 M 、 N 分别在矩形的边 AD 、 BC 上，将矩形纸片沿直线 MN 折叠，使点 C 落在矩形的边 AD 上，记为点 P ，点 D 落在 G 处，连接 PC ，交 MN 于点 Q ，连接 CM . 下列结论：①四边形 $CMPN$ 是菱形；②点 P 与点 A 重合时， $MN = 5$ ；③ PQM 的面积 S 的取值范围是

$4 \leq S \leq 5$. 其中所有正确结论的序号是_____.



【答案】①③

【详解】 $\because PM \parallel CN$,

$$\therefore \angle PMN = \angle MNC,$$

$$\therefore \angle MNC = \angle PNM,$$

$$\therefore \angle PMN = \angle PNM,$$

$$\therefore PM = PN,$$

$$\therefore NC = NP,$$

$$\therefore PM = CN,$$

$$\therefore MP \parallel CN,$$

$\therefore$ 四边形 $CNPM$ 是平行四边形,

$$\therefore CN = NP,$$

$\therefore$ 四边形 $CNPM$ 是菱形, 故①正确;

$$\therefore CP \perp MN, \angle BCP = \angle MCP,$$

$$\therefore \angle MQC = \angle D = 90^\circ,$$

点 P 与点 A 重合时, 如图 1 所示:

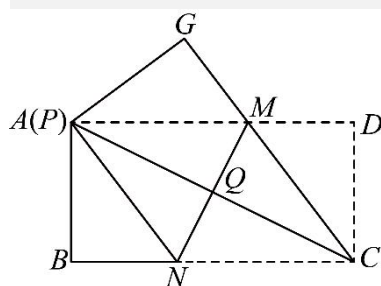


图1

设 $BN = x$, 则 $AN = NC = 8 - x$,

在 $\text{Rt } \triangle ABN$ 中, $AB^2 + BN^2 = AN^2$,

$$\text{即 } 4^2 + x^2 = (8 - x)^2,$$

解得 $x=3$,

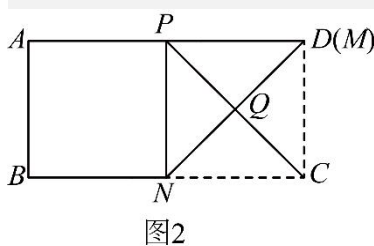
$$\therefore CN=8-3=5, \quad AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{16+64}=4\sqrt{5},$$

$$\therefore CQ=\frac{1}{2}AC=2\sqrt{5},$$

$$\therefore QN=\sqrt{CN^2-CQ^2}=\sqrt{25-20}=\sqrt{5},$$

$$\therefore MN=2QN=2\sqrt{5}, \text{ 故②错误;}$$

当 MN 过点 D 时, 如图 2 所示:



此时, CN 最短, 四边形 $CMPN$ 的面积最小, 则 S 最小为 $S=\frac{1}{4}S_{\text{菱形}CMPN}=\frac{1}{4}\times 4\times 4=4$,

当 P 点与 A 点重合时, CN 最长, 四边形 $CMPN$ 的面积最大, 则 S 最大为 $S=\frac{1}{4}\times 5\times 4=5$,

$\therefore 4\leq S\leq 5$, 故③正确.

故答案为: ①③.

18. 分母有理化: 分母有理化又称“有理化分母”, 也就是把分母中的根号化去. 指的是如果代数式中分母有根号, 那么通常将分子、分母同乘以分母的有理化因式, 达到化去分母中根号的目的. 如:

$\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\frac{1\times(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}-1$, 观察此算式规律回答问题, 已知 $m=\frac{2024}{\sqrt{2025}-1}$, 则 $m^2-2m-2024$ 的值是_____.

【答案】0

$$\text{【详解】解: } m=\frac{2024}{\sqrt{2025}-1}=\frac{2024(\sqrt{2025}+1)}{(\sqrt{2025}-1)(\sqrt{2025}+1)}=\frac{2024(\sqrt{2025}+1)}{2024}=\sqrt{2025}+1$$

$$\therefore m^2-2m-2024$$

$$=m^2-2m+1-1-2024$$

$$=(m-1)^2-2025$$

$$=(\sqrt{2025}+1-1)^2-2025$$

$$=2025-2025$$

$=0$,

故答案为: 0.

三、解答题: 本题共 9 小题, 共 66 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

19. (本题 6 分) 计算:

$$(1) \sqrt{48} \div \sqrt{3} - \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{12} + \sqrt{24};$$

$$(2) \left(-\frac{1}{2}\right) - \sqrt{12} + (1 - \sqrt{2})^0 - |\sqrt{3} - 2|.$$

【详解】(1) 解: $\sqrt{48} \div \sqrt{3} - \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{12} + \sqrt{24}$

$$= \sqrt{48 \div 3} - \sqrt{\frac{1}{2} \times 12} + 2\sqrt{6}$$

$$= 4 - \sqrt{6} + 2\sqrt{6}$$

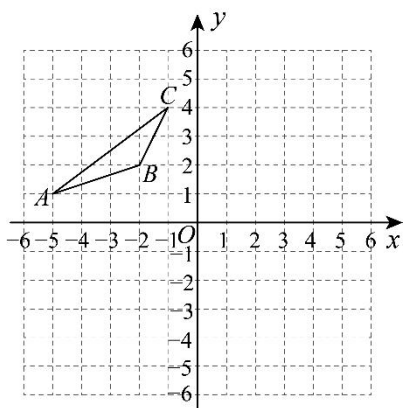
$$= 4 + \sqrt{6}; \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

(2) 解: $\left(-\frac{1}{2}\right) - \sqrt{12} + (1 - \sqrt{2})^0 - |\sqrt{3} - 2|$

$$= -\frac{1}{2} - 2\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} - 2$$

$$= -\frac{3}{2} - \sqrt{3}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

20. (本题 6 分) 如图, 在平面直角坐标系中, 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标分别为 $A(-5,1)$, $B(-2,2)$, $C(-1,4)$.

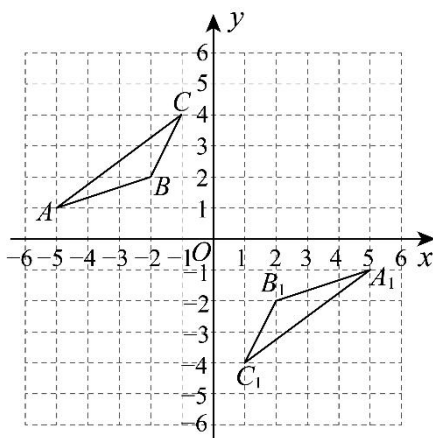


(1) $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 关于原点 O 成中心对称, 画出 $\triangle A_1B_1C_1$;

(2) $\triangle A_1B_1C_1$ 的面积为_____;

(3) 若 D 点在第一象限, 且以 A 、 B 、 C 、 D 为顶点的四边形是平行四边形, 则 D 点的坐标为_____.

【详解】(1) 解: $A_1B_1C_1$ 即为所作:



2 分

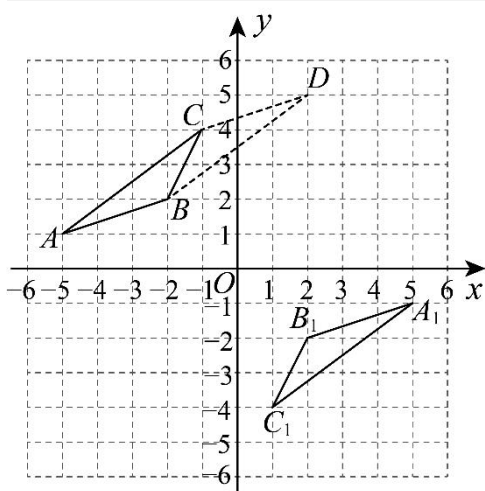
(2) 解: $S_{\triangle ABC} = 3 \times 4 - \frac{1}{2} \times 3 \times 4 - 1 \times 1 - \frac{1}{2} \times 1 \times 2 - \frac{1}{2} \times 1 \times 3 = 2.5$;4 分

(3) 解: $\because A(-5, 1), B(-2, 2), C(-1, 4)$.

$\therefore$ 可知点 A 向右平移了 3 个单位, 向上平移了 1 个单位得到点 B,

则 $C(-1, 4)$ 向右平移 3 个单位, 向上平移 1 个单位得到点 D,

$\therefore$ 点 D 的坐标为 (2, 5).



故答案为: (2, 5).6 分

21. (本题 6 分) 在解决问题“已知 $a = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$, 求 $2a^2 - 8a + 1$ 的值”时, 小明是这样分析与解答的: 先将 a 进行分母有理化, 过程如下:

$$a = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3},$$

$$\therefore (a-2)^2 = 3, \quad a^2 - 4a + 4 = 3,$$

$$\therefore a^2 - 4a = -1,$$

$$\therefore 2a^2 - 8a + 1 = 2(a^2 - 4a) + 1 = 2 \times (-1) + 1 = -1.$$

请你根据上述分析过程，解决如下问题：

(1) 若 $a = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ ，请将 a 进行分母有理化；

(2) 在 (1) 的条件下，求 $2a^3 - 4a^2 - 1$ 的值.

【详解】(1) 解： $a = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}+1$ ；3 分

(2) 解： $\because a = \sqrt{2}+1$,

$$\therefore a-1 = \sqrt{2},$$

$$\therefore a^2 - 2a + 1 = 2,$$

$$\therefore a^2 - 2a = 1,$$

$$\therefore 2a^3 - 4a^2 - 1$$

$$= 2a(a^2 - 2a) - 1$$

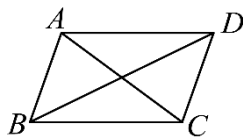
$$= 2a - 1$$

$$= 2(\sqrt{2}+1) - 1$$

$$= 2\sqrt{2}+1 \text{6 分}$$

22. (本题 6 分) 小刚在学习了正方形之后，给同桌小宇提出了一个问题.

如图，在 $ABCD$ 中，连接对角线 AC ， BD ，请从下列四个条件：① $AB = BC$ ；② $\angle ABC = 90^\circ$ ；③ $AC = BD$ ；④ $AC \perp BD$ 中选两个作为补充条件，使 $ABCD$ 为正方形，并给予证明



请你完成小刚给小宇提出的这个问题

(1) 你选择的两个补充条件是_____ (只填写一种所选两个补充条件的序号)；

(2) 请用 (1) 中你所选的两个补充条件作为已知条件，证明 $ABCD$ 为正方形.

【详解】(1) 解：依题意：选择的两个补充条件是①②； (答案不唯一)2 分

(2) 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB = BC$$

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\because \angle ABC = 90^\circ$$

$\therefore$ 菱形 $ABCD$ 是正方形.....6 分

23. (本题 6 分) 著名数学教育家 G·波利亚, 有句名言: “发现问题比解决问题更重要”, 这句话启发我们: 要想学会数学, 就需要观察, 发现问题, 探索问题的规律性东西, 要有一双敏锐的眼睛. 请先阅读下列材料, 再解决问题:

数学上有一些被开方数带根号的数能通过完全平方公式及二次根式的性质化简.

例如:

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2-2 \times 1 \times \sqrt{2}+1} = \sqrt{(\sqrt{2})^2-2 \times 1 \times \sqrt{2}+1} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2}-1 \quad \text{解决问题:}$$

$$(1) \text{在括号内填上适当的数: } \sqrt{14-6\sqrt{5}} = \sqrt{9-2 \times 3 \times \sqrt{5}+\text{①}} = \sqrt{(3-\text{②})^2} = \text{③}$$

$$\text{①: } \underline{\hspace{2cm}}, \text{②: } \underline{\hspace{2cm}}, \text{③: } \underline{\hspace{2cm}}.$$

(2) 根据上述思路, 化简并求出 $\sqrt{52-14\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}}$ 的值.

【详解】 (1) 解: 根据题意可得 $\sqrt{14-6\sqrt{5}}$

$$= \sqrt{9-2 \times 3 \times \sqrt{5}+5}$$

$$= \sqrt{(3-\sqrt{5})^2}$$

$$= 3-\sqrt{5},$$

故答案为: $5; \sqrt{5}; 3-\sqrt{5}; \dots\dots\dots 3$ 分

$$(2) \text{解: 原式} = \sqrt{7^2-2 \times 7 \times \sqrt{3}+(\sqrt{3})^2} + \sqrt{2^2+2 \times 2 \times \sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{(7-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(2+\sqrt{3})^2}$$

$$= 7-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}$$

$$= 9. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

24. (本题 6 分) 我国古代数学家秦九韶在《数书九章》中记述了“三斜求积术”, 即已知三角形的三边长,

求它的面积. 用符号表示为 $S = \sqrt{\frac{1}{4} \left[a^2 b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2 \right]}$ (其中 a, b, c 为三角形的三边长, S 为三角形的面积).

请利用这个公式求出当 $a = \sqrt{5}, b = 3, c = 2\sqrt{5}$ 时的三角形的面积.

【详解】 解: $\because a = \sqrt{5}, b = 3, c = 2\sqrt{5},$

$$\therefore a^2 = 5, b^2 = 9, c^2 = 20,$$

$$\therefore \text{三角形的面积 } S = \sqrt{\frac{1}{4} \left[a^2 b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2 \right]}$$

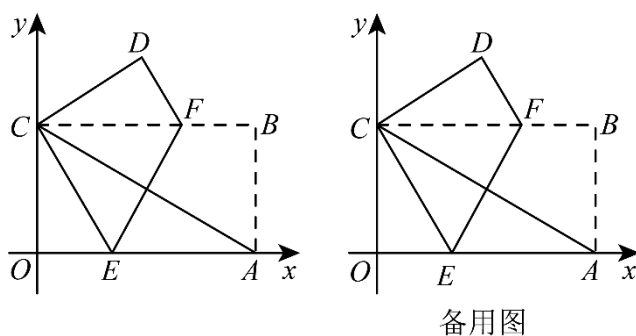
$$= \sqrt{\frac{1}{4} \times \left[45 - \left(\frac{5+9-20}{2} \right)^2 \right]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} \times (45-9)}$$

$$= \sqrt{9}$$

$$= 3. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

25. (本题 8 分) 如图所示, 把矩形纸片 $OABC$ 放入直角坐标系 xOy 中, 使 OA 、 OC 分别落在 x 、 y 轴的正半轴上, 连接 AC , $A(a,0)$, $C(0,c)$, 且 a 、 c 满足 $\sqrt{a+c-12} + (a-2c)^2 = 0$.



- (1) 求 AC 的长;
- (2) 将纸片 $OABC$ 折叠, 使点 A 与点 C 重合 (折痕为 EF), 求折痕为 EF 的长;
- (3) 若点 N 在平面直角坐标系内, 在 x 轴上是否存在点 M , 使以 C 、 E 、 M 、 N 为顶点的四边形为菱形? 若存在, 请直接写出点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【详解】(1) 解: $\because \sqrt{a+c-12} + (a-2c)^2 = 0$,

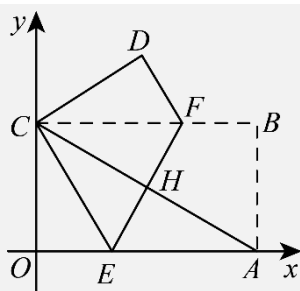
$$\therefore \begin{cases} a+c-12=0 \\ a-2c=0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a=8 \\ c=4 \end{cases},$$

$$\therefore OA=8, OC=4,$$

在 $\text{Rt } AOC$ 中, $AC = \sqrt{OA^2 + OC^2} = 4\sqrt{5}$;2 分

(2) 解: 由翻折得 $EA=EC$, $AC \perp EH$, $AH=HC$, 设 $EA=EC=x$, 则 $OE=8-x$,



在 $\text{Rt}\triangle COE$ 中，由勾股定理得： $x^2 = 4^2 + (8-x)^2$ ，

解得： $x = 5$ ，

$$\because S_{\triangle CEA} = \frac{1}{2} AE \cdot OC = \frac{1}{2} AC \cdot EH,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} \times EH,$$

解得： $EH = \sqrt{5}$ ，

$\because$ 四边形 $ABCO$ 是矩形，

$\therefore BC \parallel OA$ ，

$\therefore \angle CFH = \angle AEH$ ，

$\because \angle CHF = \angle AHE$ ， $AH = HC$ ，

$\therefore \triangle CHF \cong \triangle AHE$ ，

$\therefore EH = HF$ ，

$\therefore EF = 2\sqrt{5}$ ；4 分

(3) 解： $\because$ 点 M 在 x 轴上，

$\therefore$ 设 $M(m, 0)$ ，

$\because C(0, 4)$ ， $M(3, 0)$ ，

$\therefore CM = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ，

当 $CE = EM$ 时，则 $|m - 3| = 5$ ，解得 $m = 8$ 或 $m = -2$ ；

当 $CE = CM$ 时，则 $m^2 + 4^2 = 5^2$ ，解得 $m = 3$ (舍去) 或 $m = -3$ ；

当 $ME = CM$ 时，则 $m^2 + 4^2 = (m - 3)^2$ ，解得 $m = -\frac{7}{6}$ ；

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $\left(-\frac{7}{6}, 0\right)$ 或 $(-3, 0)$ 或 $(-2, 0)$ 或 $(8, 0)$ 。8 分

26. (本题 8 分) 如图1，正方形 $ABCD$ 和正方形 $AEFG$ ， A ， E ， B 三点共线， $AD = 4$ ， $AG = 2\sqrt{2}$ 。将正

方形 $AEFG$ 绕点 A 顺时针旋转 $\alpha (0^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ)$, 连接 BE , DG .

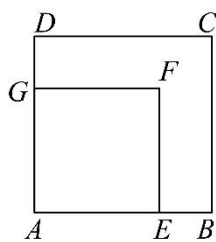


图1

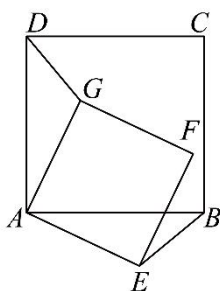


图2

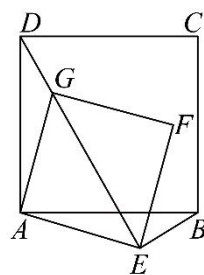


图3

(1) 如图 2, 求证: $BE = DG$;

(2) 如图 3, 在旋转的过程中, 当 D, G, E 三点共线时, 试求 DG 的长;

(3) 在旋转的过程中, 是否存在某时刻, 使得 $\angle DGA = 120^\circ$, 若存在, 请直接写出 DG 的长; 若不存在, 请说明理由.

【详解】(1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 和 $AEFG$ 是正方形,

$\therefore AB = AD, \angle DAB = 90^\circ, AE = AG, \angle EAG = 90^\circ,$

$\therefore \angle BAE = \angle DAG,$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADG$ 中,

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle BAE = \angle DAG, \\ AE = AG \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADG (\text{SAS}),$

$\therefore BE = DG; \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

(2) 解: 如图 3, 连接 AF , 交 GE 于点 O ,

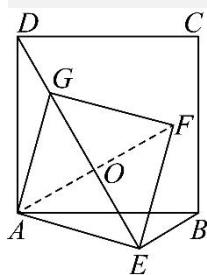


图3

$\because$ 四边形 $AEFG$ 是正方形, $AG = 2\sqrt{2},$

$\therefore AE = EF = 2\sqrt{2}, \angle AEF = 90^\circ, AO = GO = \frac{1}{2} AF, \angle AOG = 90^\circ,$

$\therefore AF = \sqrt{AE^2 + EF^2} = 4,$

$$\therefore AO = FO = 2,$$

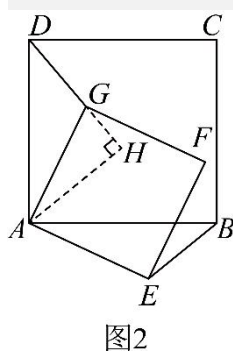
$$\because D、E、G \text{ 三点共线}, AD = 4,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ADO \text{ 中}, OD = \sqrt{AD^2 - OA^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore DG = OD - OG = 2\sqrt{3} - 2; \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(3) 解: 存在某时刻, 使得 $\angle DGA = 120^\circ$, $DG = \sqrt{10} - \sqrt{2}$, 理由如下:

如图 2, 过点 A 作 $AH \perp DG$, 交 DG 的延长线于点 H,



$$\because \angle DGA + \angle HGA = 180^\circ, \angle DGA = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle HGA = 60^\circ,$$

$$\because AH \perp DG,$$

$$\therefore \angle HGA + \angle GAH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GAH = 90^\circ - \angle HGA = 30^\circ,$$

$$\therefore GH = \frac{1}{2} AG = \sqrt{2},$$

$$\therefore AH = \sqrt{AG^2 - GH^2} = \sqrt{6},$$

$$\text{在 Rt } ADH \text{ 中}, AD = 4,$$

$$\therefore DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{10},$$

$$\therefore DG = DH - GH = \sqrt{10} - \sqrt{2}. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

27. (本题 6 分) 嘉琪根据学习“数与式”的经验, 想通过“由特殊到一般”的方法探究下面二次根式的运算规律. 下面是嘉琪的探究过程, 请补充完整:

(1) 具体运算, 发现规律:

$$\text{特例 1: } \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{3+1}{3}} = \sqrt{4 \times \frac{1}{3}} = 2\sqrt{\frac{1}{3}},$$

$$\text{特例 2: } \sqrt{2 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{8+1}{4}} = \sqrt{9 \times \frac{1}{4}} = 3\sqrt{\frac{1}{4}},$$

特例 3: $\sqrt{3+\frac{1}{5}}=4\sqrt{\frac{1}{5}}$,

特例 4: _____ (填写一个符合上述运算特征的式子) .

(2)观察、归纳, 得出猜想:

如果 n 为正整数, 用含 n 的式子表示上述的运算规律为: _____.

(3)证明你的猜想;

(4)应用运算规律:

①化简: $\sqrt{2023+\frac{1}{2025}}\times\sqrt{4050}$ = _____;

②若 $\sqrt{a+\frac{1}{b}}=9\sqrt{\frac{1}{b}}$ (a, b 均为正整数), 则 $a+b$ 的值为 _____.

【详解】 (1) 解: 根据材料提示可得, 特例 4 为: $\sqrt{4+\frac{1}{6}}=5\sqrt{\frac{1}{6}}$,
故答案为: $\sqrt{4+\frac{1}{6}}=5\sqrt{\frac{1}{6}}$;1 分

(2) 解: 由上述计算可得, 如果 n 为正整数, 上述的运算规律为: $\sqrt{n+\frac{1}{n+2}}=(n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$,
故答案为: $\sqrt{n+\frac{1}{n+2}}=(n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$;2 分

(3) 解: $\sqrt{n+\frac{1}{n+2}}=(n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$,
等式左边 $=\sqrt{n+\frac{1}{n+2}}=\sqrt{\frac{n^2+2n+1}{n+2}}=\sqrt{\frac{(n+1)^2}{n+2}}=(n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$ = 等式右边;4 分

(4) ①解: $\sqrt{2023+\frac{1}{2025}}\times\sqrt{4050}$
 $=2024\times\sqrt{\frac{1}{2025}}\times\sqrt{2\times2025}$
 $=2024\sqrt{2}$5 分

② $\because\sqrt{a+\frac{1}{b}}=9\sqrt{\frac{1}{b}}$,
 $\therefore n+1=9$,
 $\therefore n=a=8, b=(n+2)=10$,
 $\therefore a+b=18$6 分

28. (本题 8 分) 综合与实践

【问题情境】:

在数学综合与实践活动课上, 老师让同学们以“特殊平行四边形的旋转”为主题开展探究活动.

如图 1，正方形 $ABCD$ 和正方形 $AEFG$ ，连接 DG ， BE 。

【操作发现】：

当正方形 $AEFG$ 绕点 A 旋转，如图 2，线段 DG 与 BE 之间的数量关系是_____；直线 DG 与 BE 的夹角度数为_____；

【深入探究】如图 3，若四边形 $ABCD$ 与四边形 $AEFG$ 都为菱形，且 $AB = 2AE$ ， $\angle DAB = \angle GAE = 60^\circ$ ，猜想 DG 与 BE 的数量关系与直线 DG 与 BE 的夹角度数，并说明理由；

【迁移探究】：如图 3，在（2）的条件下，若 $\angle BAE = 30^\circ$ ， $AB = 2\sqrt{5}$ ，直接写出线段 CE 的长。

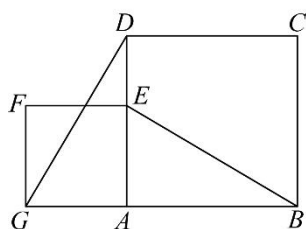


图 1

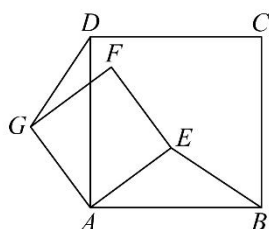


图 2

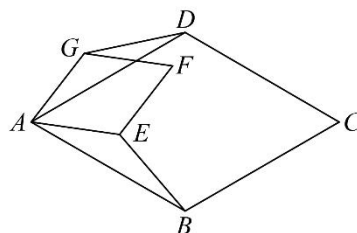


图 3

【详解】解：[操作发现]

$\because$ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $AEFG$ 是正方形，

$\therefore AG = AE$ ， $AD = AB$ ， $\angle GAE = \angle DAB = 90^\circ$ ，

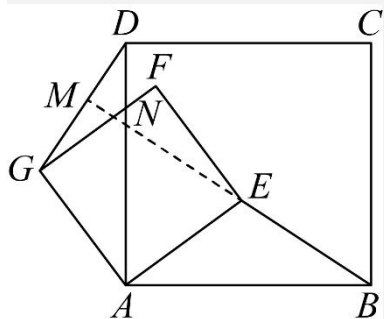
$\therefore \angle GAE - \angle DAE = \angle DAB - \angle DAE$ ，

$\therefore \angle GAD = \angle EAB$ ，

$\therefore \triangle GAD \cong \triangle EAB$ (SAS)，

$\therefore DG = BE$ ， $\angle ADG = \angle ABE$ ，

如图，延长 BE 交 GD 于点 M ，交 AD 于点 N ，



$\therefore \angle DNM = \angle ANB$ ， $\angle ABN + \angle ANB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle DNM + \angle ADG = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle DMN = 90^\circ$ ，

∴直线 DG 与 BE 的夹角度数为 90° ，

故答案为： $DG = BE$ ， 90° ；2 分

[深入探究]

∵四边形 $ABCD$ 和四边形 $AEFG$ 是菱形，

∴ $AG = AE$ ， $AD = AB$ ， $\angle GAE = \angle DAB = 60^\circ$ ，

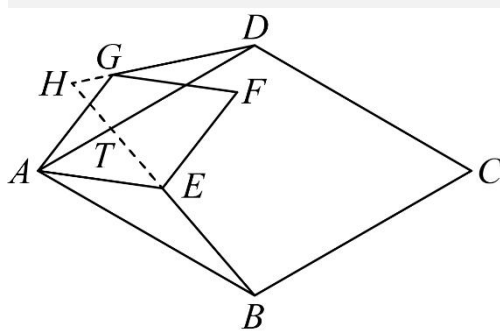
∴ $\angle GAE - \angle DAE = \angle DAB - \angle DAE$ ，

∴ $\angle GAD = \angle EAB$ ，

∴ $\triangle GAD \cong \triangle EAB$ (SAS)，

∴ $DG = BE$ ， $\angle ADG = \angle ABE$ ，

如图，延长 BE 交 DG 的延长线于点 H ，交 AD 于点 T ，



∵ $\angle DTH = \angle ATB$ ， $\angle H + \angle DTH + \angle ADG = 180^\circ$ ， $\angle DAB + \angle ATB + \angle ABE = 180^\circ$ ，

∴ $\angle H = \angle DAB = 60^\circ$ ，

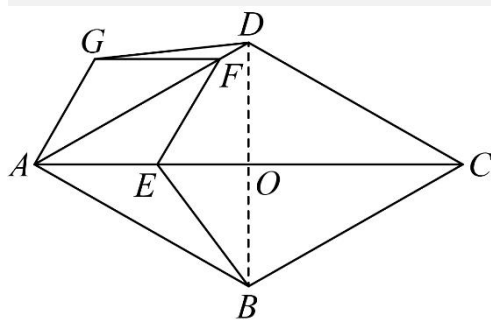
∴直线 DG 与 BE 的夹角度数为 60° ；4 分

[迁移探究]

① 如图，当 F 在 AD 上时，连接 BD ，交 AC 于点 O ，

∵ $\angle BAE = 30^\circ$ ， $\angle DAB = \angle GAE = 60^\circ$ ， 四边形 $AEFG$ 为菱形，

∴ $\angle DAE = 30^\circ$ ， $\angle AEF = 120^\circ$ ， $AE = EF$ ，



∵四边形 $ABCD$ 为菱形，

∴ $AC \perp BD$ ， $AB = AD$ ， $OA = OC$ ，

$$\therefore \angle AOB = \angle AOD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAB = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle ABO = 60^\circ,$$

$\therefore$ 点 A 、 E 、 O 三点共线,

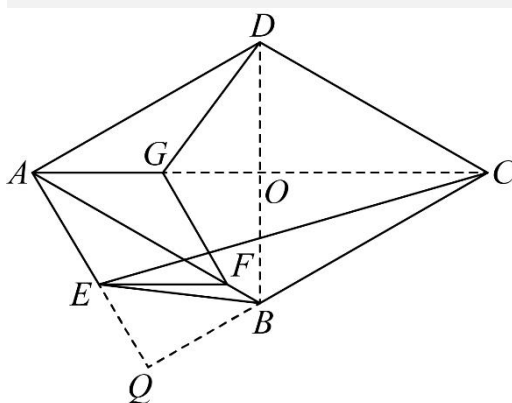
$$\therefore OB = \frac{1}{2} AB = \sqrt{5},$$

$$\text{由勾股定理得: } OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{5})^2} = \sqrt{15},$$

$$\therefore OE = OA - AE = \sqrt{15} - \sqrt{5},$$

$$\therefore CE = OC + OE = \sqrt{15} + \sqrt{15} - \sqrt{5} = 2\sqrt{15} - \sqrt{5}; \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

② 如图, 当 F 在 AB 上时, 延长 BD , 交 CB 延长线于点 Q ,



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为菱形,

$$\therefore \angle ACB = \frac{1}{2} \angle BCD = \frac{1}{2} \angle DAB = 30^\circ, \quad AB = AD, \quad OA = OC,$$

由 (1) 可得 A 、 G 、 O 三点共线, $OA = \sqrt{15}$,

$$\therefore \angle CAQ = 60^\circ, \quad AC = 2\sqrt{15},$$

$$\therefore \angle Q = 90^\circ,$$

$$\therefore BQ = \frac{1}{2} AB = \sqrt{5},$$

$$\therefore CQ = BC + BQ = 3\sqrt{5},$$

$$\text{由勾股定理得: } AQ = \sqrt{AB^2 - BQ^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{5})^2} = \sqrt{15},$$

$$\therefore EQ = \sqrt{15} - \sqrt{5},$$

$$\text{由勾股定理得: } CE = \sqrt{CQ^2 + EQ^2} = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 + (\sqrt{15} - \sqrt{5})^2} = \sqrt{65 - 10\sqrt{3}} = 2\sqrt{15} - \sqrt{5},$$

综上所述: 线段 CE 的长 $2\sqrt{15} - \sqrt{5}$. $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$