

2024-2025 学年八年级数学下学期第一次月考卷

(考试时间：100分钟 试卷满分：100分)

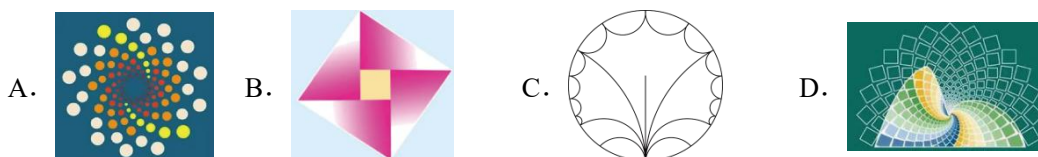
注意事项：

1. 本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分。答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答第I卷时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。
3. 回答第II卷时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
4. 测试范围：苏科版八年级下册第7章-第9章。
5. 难度系数：0.85。

第I卷

一、选择题：本题共 6 小题，每小题 2 分，共 12 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 国际数学家大会（*International Congress of Mathematicians, ICM*），是由国际数学联盟（*IMU*）主办的国际数学界规模最大也是最重要的会议，每四年举行一次。会议是数学家们为了数学交流，展示、研讨数学的发展，它是全球性数学科学学术会议，被誉为数学界的奥林匹克盛会。首届国际数学家大会 1897 年在瑞士苏黎世举行，2002 年第 24 届国际数学家大会在我国北京举行。以下是四届大会的会徽，其中是中心对称图形的是（ ）



【答案】B

【详解】解：A、不是中心对称图形，不符合题意；

B、是中心对称图形，符合题意；

C、不是中心对称图形，不符合题意；

D、不是中心对称图形，不符合题意；

故选：B。

2. 下列调查中，最适合采用抽样调查方式的是（ ）

A. 江北机场对“元旦”期间外出旅游的乘客的安全检查

- B. 对“神舟 19 号”载人飞船飞赴空间站前的零部件的检查
- C. 对某中学七年级 1 班学生身高的调查
- D. 对全国中学生睡眠时间的调查

【答案】D

【详解】解：A. 江北机场对“元旦”期间外出旅游的乘客的安全检查，适合采用全面调查，故此选项不符合题意；

B. 对“神舟 19 号”载人飞船飞赴空间站前的零部件的检查，适合采用全面调查，故此选项不符合题意；

C. 对某中学七年级 1 班学生身高的调查，适合采用全面调查，故此选项不符合题意；

D. 对全国中学生睡眠时间的调查，适合采用抽样调查，故此选项符合题意；

故选：D.

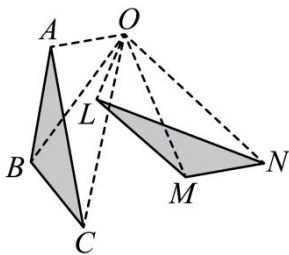
3. “367 人中至少有 2 人同月同日生”，这一事件是（ ）

- A. 随机事件.
- B. 必然事件
- C. 不可能事件
- D. 确定性事件

【答案】B

【详解】解：“367 人中至少有 2 人同月同日生”这一事件是必然事件，
故答案选 B.

4. 如图，若将 $\triangle ABC$ 绕点 O 逆时针旋转 60° 后与 $\triangle LMN$ 重合，则下列角一定等于 60° 的是（ ）



- A. $\angle CON$
- B. $\angle AON$
- C. $\angle AOC$
- D. $\angle AOM$

【答案】A

【详解】解： $\because$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 O 逆时针旋转 60° 后与 $\triangle LMN$ 重合， C 与 N 是对应点，
 $\therefore$ 下列角一定等于 60° 的是 $\angle CON$.

故选 A.

5. 用反证法证明“直角三角形两个较小的内角之和等于 90° ”时，第一步应假设直角三角形（ ）

- A. 两个较小的内角之和小于 90°
- B. 两个较小的内角之和大于 90°
- C. 两个较小的内角之和等于 90°
- D. 两个较小的内角之和不等于 90°

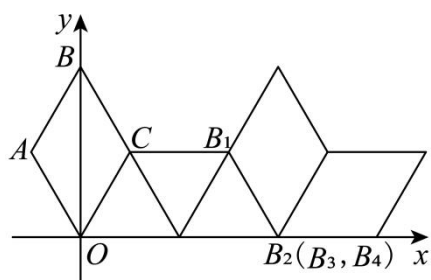
【答案】D

【详解】解：原命题是“直角三角形两个较小的内角之和等于 90° ”，

$\therefore$ 反证法的第一步应假设“直角三角形两个较小的内角之和不等于 90° ”，

故选：D．

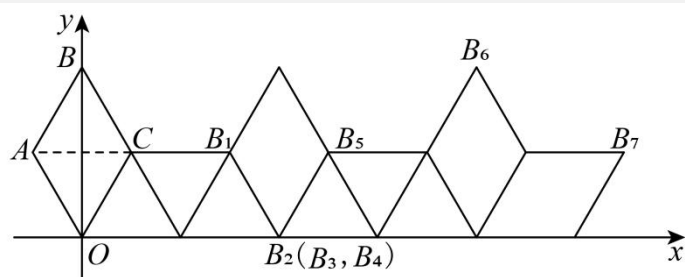
6. 如图，在坐标系中放置一菱形 $OABC$ ，已知 $\angle ABC = 60^\circ$ ，点 B 在 y 轴上， $OA = 1$ ．将菱形 $OABC$ 沿 x 轴的正方向无滑动翻转，每次翻转 60° ，连续翻转 2023 次，点 B 的落点依次为 $B_1, B_2, B_3, \dots$ ，则 B_{2023} 的坐标为（ ）



- A. $(1349, 0)$ B. $(1350, 0)$ C. $\left(1349.5, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ D. $\left(1350.5, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

【答案】C

【详解】解：连接 AC ，如图所示．



$\therefore$ 四边形 $OABC$ 是菱形，

$\therefore OA = AB = BC = OC$ ，

$\therefore \angle ABC = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore AC = AB$ ，

$\therefore AC = OA$ ，

$\therefore OA = 1$ ，

$\therefore AC = 1$ ，

画出第5次、第6次、第7次翻转后的图形，如图所示；

由图可知：每翻转6次，图形向右平移4；

$$\therefore 2023 = 337 \times 6 + 1,$$

$\therefore$ 点 B_1 向右平移1348 (即 337×4) 到点 B_{2023} ，

$$\therefore B_1 \text{ 的坐标为 } \left(1.5, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\therefore B_{2023} \text{ 的坐标为 } \left(1.5 + 1348, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\therefore B_{2023} \text{ 的坐标为 } \left(1349.5, \frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

故选：C.

第II卷

二、填空题：本题共10小题，每小题2分，共20分。

7. 为保证战斗机的质量，对其零部件进行检查，适宜采取_____（填“普查”或“抽样调查”）的方式.

【答案】普查

【详解】解：为保证战斗机的质量，对其零部件进行检查，适宜采取普查的方式.

故答案为：普查.

8. 在平面直角坐标系中，已知点 $A(3, a)$ ， $B(b, 2)$ 关于原点对称，则 $a + b$ 的值为_____.

【答案】-5

【详解】解： $\because$ 点 $A(3, a)$ ， $B(b, 2)$ 关于原点对称，

$$\therefore a = -2, \quad b = -3,$$

$$\therefore a + b = -2 + (-3) = -5,$$

故答案为：-5.

9. 从1, 2, 3, 4, 5这五个数中任取一个数，这个数是偶数的事件是_____事件.（填“确定”或“随机”）

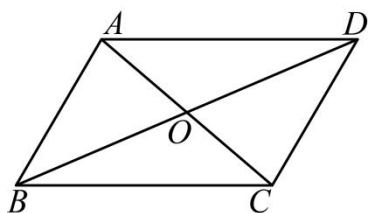
【答案】随机

【详解】解： $\because$ 这五个数中由3个奇数，2个偶数，

$\therefore$ 从这五个数中任取一个数，这个数是偶数的事件是随机事件，

故答案为：随机.

10. 如图，四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ，要使四边形 $ABCD$ 为平行四边形，则需添加一个条件，这个条件可以是_____.



【答案】 $AB = CD$ (答案不唯一)

【详解】解：∵ 在四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $AB = CD$ ，

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形 (一组对边平行且相等的四边形是平行四边形)，

∴ 可添加的条件是： $AB = CD$ ；

在四边形 $ABCD$ 中，

∵ $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$ ，

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形；

∴ 可添加条件 $AD \parallel BC$ ；

故答案是： $AB = CD$ (答案不唯一) .

11. 一组数据中最小值是 154.5，最大值是 183，若选择组距为 4，则组数应该是_____.

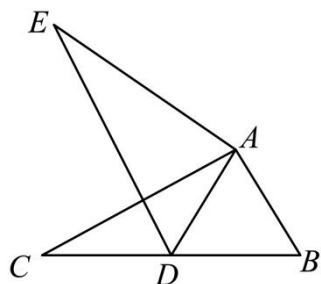
【答案】 8

【详解】解： $(183 - 154.5) \div 4 = 7.125$ ，

∴ 组数应该为 8；

故答案为： 8 .

12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 5$ ， $BC = 12$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 按顺时针旋转一定角度得到 $\triangle ADE$ ，当点 B 的对应点 D 恰好落在 BC 边上时，则 CD 的长为_____.



【答案】 7

【详解】解：∵ 旋转，

∴ $AD = AB$ ，

$\because \angle B = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ADB$ 为等边三角形,

$\therefore BD = AB = 5$,

$\because$ 点 B 的对应点 D 恰好落在 BC 边上,

$\therefore CD = BC - BD = 7$;

故答案为: 7.

13. 某射击运动员在同一条件下射击成绩记录如下:

射击次数	20	40	100	200	400	1000
“射中 9 环以上”的次数	15	33	78	158	321	801
“射中 9 环以上”的频率	0.75	0.825	0.78	0.79	0.803	0.801

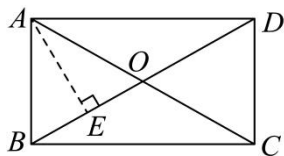
由表, 估计这名运动员射击一次时“射中 9 环以上”的概率为_____ (保留小数点后一位).

【答案】0.8

【详解】解: 根据表格数据可知, 频率稳定在 0.8. 估计这名运动员射击一次时“射中 9 环以上”的概率为 0.8.

故答案为: 0.8.

14. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 交于点 O , 过点 A 作 $AE \perp BD$ 于点 E , 且 $BE:ED=1:3$, 若 $AB=6\text{cm}$, 则 BD 的长为_____ cm .



【答案】12

【详解】解: $\because$ 在矩形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 交于点 O ,

$\therefore OA = OB = OD = \frac{1}{2}BD$,

$\because BE:ED=1:3$,

$\therefore BE = \frac{1}{4}BD$, 即 $BE = \frac{1}{2}OB$,

$\because AE \perp BD$,

$\therefore AE$ 垂直平分 OB ,

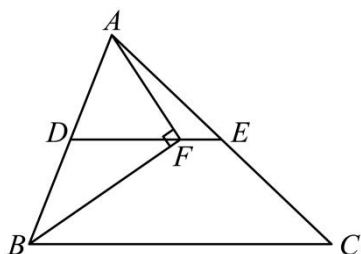
$\therefore AB = OA$,

$\therefore OB = AB = 6\text{cm}$,

$$\therefore BD = 2OB = 12\text{cm},$$

故答案为：12.

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=6$ ， $BC=8$ ，点 D ， E 分别是 AB ， AC 的中点，点 F 在 DE 上，且 $\angle AFB=90^\circ$ ，则 $EF=$ _____.



【答案】1

【详解】解：∵点 D ， F 分别是 AB ， AC 的中点，

∴ DE 为 $\triangle ABC$ 的中位线，

$$\therefore DE = \frac{1}{2}BC;$$

又∵ $BC=8$ ，

$$\therefore DE = 4;$$

又∵ $\angle AFB=90^\circ$ ，

∴在 $Rt \triangle ABF$ 中，点 D 是 AB 的中点，

$$\therefore DF = \frac{1}{2}AB;$$

又∵ $AB=6$ ，

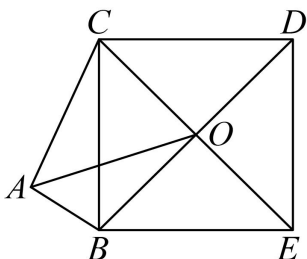
$$\therefore DF = 3;$$

又∵ $EF = DE - DF$ ，

$$\therefore EF = 4 - 3 = 1;$$

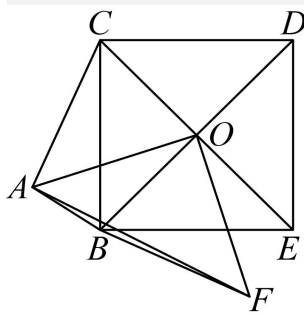
故答案为：1.

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=3$ ， $AC=6$ ，以 BC 为边，在 $\triangle ABC$ 右侧作正方形 $BCDE$ ，对角线 BD 与 CE 相交于点 O ，连接 AO ，则 AO 的最大值为_____.



【答案】 $\frac{9\sqrt{2}}{2}$

【详解】解：如图：以 AO 为边作等腰直角 AOF ，且 $\angle AOF = 90^\circ$ ，



$\because$ 四边形 $BCDE$ 是正方形，

$\therefore BO = CO, \angle BOC = 90^\circ$ ，

$\because AOF$ 是等腰直角三角形，

$\therefore AO = FO, AF = \sqrt{2}AO$ ，

$\because \angle BOC = \angle AOF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AOC = \angle BOF$ ，且 $BO = CO, AO = FO$ ，

$\therefore \triangle AOC \cong \triangle BOF (SAS)$ ，

$\therefore AC = BF = 6$ ，

若点 A ，点 B ，点 F 三点不共线时， $AF < AB + BF$ ；

若点 A ，点 B ，点 F 三点共线时， $AF = AB + BF$ ，

$\therefore AF \leq AB + BF = 3 + 6 = 9$ ，

$\therefore AF$ 的最大值为 9，

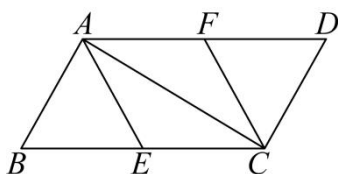
$\because AF = \sqrt{2}AO$ ，

$\therefore AO$ 的最大值为 $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ 。

故答案为： $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ 。

三、解答题：本题共 10 小题，共 68 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (5 分) 已知点 E ， F 分别是平行四边形 $ABCD$ 的边 BC ， AD 的中点。求证： $AE = CF$ 。



【详解】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore AF \parallel CE$, $AD = BC$.

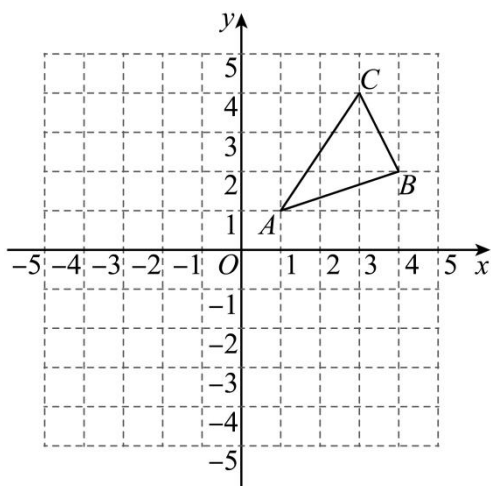
又点 E , F 分别是平行四边形 $ABCD$ 的边 BC , AD 的中点,

$\therefore AF = CE$.

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 为平行四边形.

$\therefore AE = CF$ 5 分

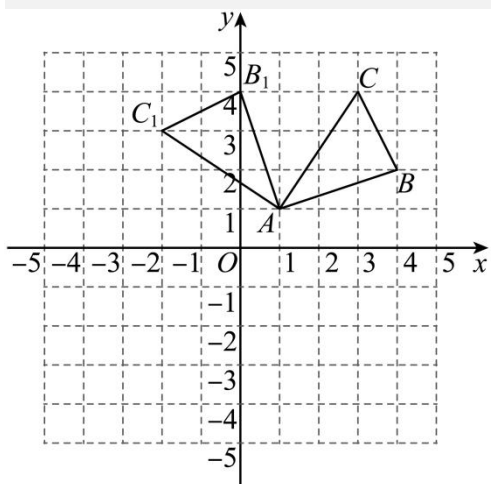
18. (5 分) 如图, $\triangle ABC$ 的顶点坐标分别为 $A(1,1)$, $B(4,2)$, $C(3,4)$.



(1) 请画出 $\triangle ABC$ 以点 A 为旋转中心, 逆时针旋转 90° 后得到 $\triangle AB_1C_1$;

(2) 在 (1) 的条件下, 请求出 $\triangle AB_1C_1$ 的面积.

【详解】(1) 解: 如图, 以点 A 为旋转中心, 逆时针旋转 90° 后得到 $\triangle AB_1C_1$;



$\therefore \triangle AB_1C_1$ 即为所求;3 分

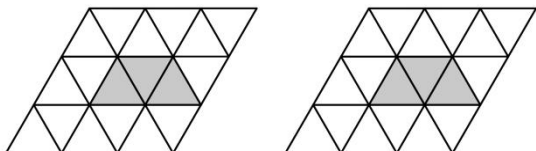
(2) 解: $\triangle AB_1C_1$ 的面积为 $3 \times 3 - \frac{1}{2} \times 1 \times 3 - \frac{1}{2} \times 1 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 3$

$= 9 - 1.5 - 1 - 3$

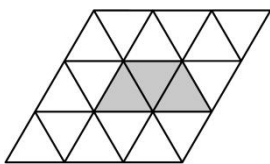
=3.55 分

19. (5 分) 图 1, 图 2 都是由边长为 1 的小等边三角形构成的网格, 每个网格图中有 3 个小等边三角形已涂上阴影. 请在余下的空白小等边三角形中, 分别按下列要求选取一个涂上阴影:

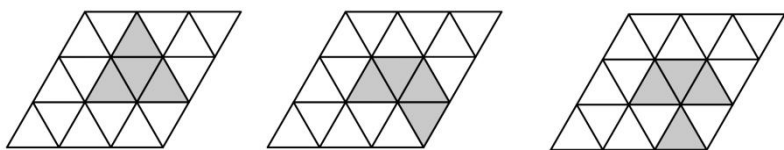
(1) 使得 4 个阴影小等边三角形组成一个轴对称图形. (至少画出两种)



(2) 使得 4 个阴影小等边三角形组成一个中心对称图形. (画出一一种)

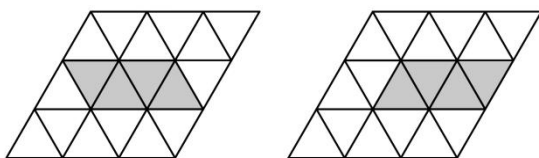


【详解】(1) 解: 如图所示 (画出两种即可):



.....3 分

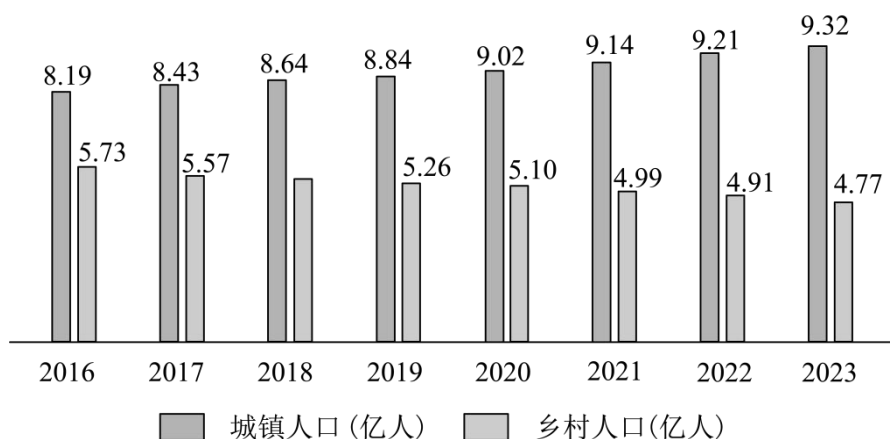
(2) 如图所示 (画出一一种即可):



.....5 分

20. (6 分) 人口数据是研究经济社会发展规划的重要依据, 阅读以下统计图, 并回答问题.

2016~2023 年中国城镇人口和乡村人口的统计图



(1)下列结论中，正确结论的序号是_____；

- ①2023 年的总人口比 2017 年的总人口少；
- ②2017 年我国乡村人口比上一年下降约 2.79%；
- ③2016~2023 年我国城镇人口逐年增长，且增长率相同.

(2)请结合上图提供的信息，从不同角度写出两个与我国人口相关的结论.

【详解】(1) 解：2023 年的总人口 14.09 亿人比 2017 年的总人口 14 亿人多，故①错误；

2017 年我国乡村人口比上一年下降约 $\frac{5.73-5.57}{5.73} \approx 2.79\%$ ，故②正确；

2016~2023 年我国城镇人口逐年增长，但增长率逐不同，故③错误；

综上，正确结论的序号是②，

故答案为：②；3 分

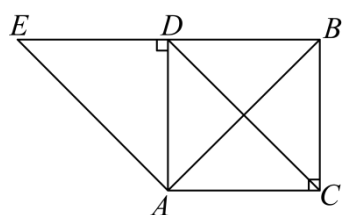
(2) 根据统计图可得，

①2016~2023 年我国城镇人口逐年增长，2016~2023 年我乡村人口逐年减少，说明我国逐渐向城镇化靠拢；4 分

②2016~2022 年我国总人口逐年增长，但 2023 年有所下降，说明我国出生率有所上升.

.....5 分

21. (7 分) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = CB = 2$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 按逆时针方向旋转 90° 得到 $\triangle ADE$.



(1)线段 DE 的长是_____， $\angle EAC$ 的度数是_____°；

(2)连接 CD ，求证：四边形 $ACDE$ 是平行四边形.

【详解】(1) 解：∵在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = CB = 2$ ，

∴ $\angle BAC = \angle ABC = 45^\circ$ ，

由旋转可得 $DE = BC = 2$ ， $\angle EAB = 90^\circ$ ，

∴ $\angle EAC = \angle EAB + \angle BAC = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$ ；

故答案分别为：2；135；.....4 分

(2) 证明：由旋转可得 $DE = CB$ ， $\angle DAC = 90^\circ$ ，

∴ $DE = CA$ ， $\angle DAC = \angle EDA = 90^\circ$ ，

∴ $DE \parallel AC$ ，

∴四边形 $ACDE$ 是平行四边形.7 分

22. (7 分) 某种油菜籽在相同条件下的发芽试验的结果如下表：

每批粒数 n	100	150	200	500	800	1000
发芽的粒数 m	65	111	a	345	560	700
发芽的频率 $\frac{m}{n}$	0.65	0.74	0.68	0.69	0.70	b

(1)完成上述表格： $a = \underline{\quad}$ ， $b = \underline{\quad}$ ；

(2)这种油菜籽发芽的概率估计值为 $\underline{\quad}$ ；

(3)如果这种油菜籽发芽后的成秧率为90%，则在相同条件下用 10 000 粒该种油菜籽可得到油菜秧苗多少棵？

【详解】(1) $a = 200 \times 0.68 = 136$ ， $b = \frac{700}{1000} = 0.70$ ；

故答案为：136；0.70.....3 分

(2) 因为在相同条件下，当试验次数很大时，事件发生的频率可作为概率的近似值，而实验数据量最大为 1000 粒，对应频率为 0.70，所以这种油菜籽发芽的概率估计值是 0.70；

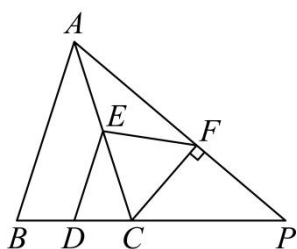
故答案为：0.70.....5 分

(3) $10000 \times 0.70 \times 90\% = 6300$ (棵)，

答：在相同条件下用 10 000 粒该种油菜籽可得到油菜秧苗 6300 棵.

.....7 分

23. (7 分) 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， P 是 BC 延长线上一点， $CF \perp AP$ 于 F ， D ， E 分别为 BC 和 AC 的中点，连 ED ， EF ，若 $\angle APB = 40^\circ$ ，求 $\angle DEF$ 的度数.



【详解】解：∵ $CF \perp AP$ ， $\angle APB = 40^\circ$ ，

$$\therefore \angle FCP = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle BCF = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ, \text{ 即 } \angle ECD + \angle ECF = 130^\circ,$$

$$\therefore AB = AC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB,$$

∵ D, E 分别为 BC 和 AC 的中点，

∴ DE 是 ABC 的中位线，

$$\therefore DE \parallel AB,$$

$$\therefore \angle EDC = \angle ABC,$$

$$\therefore \angle EDC = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle DEC = 180^\circ - 2\angle ACB,$$

∵ $CF \perp AP$ ， E 为 AC 的中点，

$$\therefore EF = EC,$$

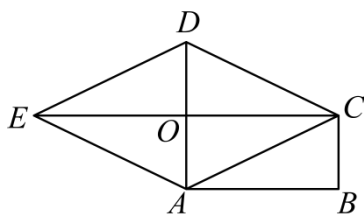
$$\therefore \angle ECF = \angle EFC,$$

$$\therefore \angle CEF = 180^\circ - 2\angle ECF,$$

$$\therefore \angle DEF = \angle DEC + \angle CEF = 180^\circ - 2\angle ACB + 180^\circ - 2\angle ECF = 360^\circ - 2 \times 130^\circ = 100^\circ.$$

.....7 分

24. (8 分) 如图，在矩形 $ABCO$ 中，延长 AO 到点 D ，使 $DO = AO$ ，延长 CO 到点 E ，使 $EO = CO$ ，连接 AC, AE, DC, DE 。



(1) 求证：四边形 $ACDE$ 是菱形；

(2) 若 $AE = 5$ ， $AO = 3$ ，求四边形 $ACDE$ 的面积。

【详解】(1) 证明: $\because DO = AO, EO = CO,$

$\therefore$ 四边形 $ACDE$ 是平行四边形,

$\therefore$ 四边形 $ABCO$ 是矩形,

$\therefore \angle AOC = 90^\circ,$

$\therefore AD \perp CE,$

$\therefore$ 四边形 $ACDE$ 是菱形;4 分

(2) 解: $\because AD \perp CE,$

$\therefore \angle AOE = 90^\circ,$

$\because AE = 5, AO = 3,$

$\therefore OE = \sqrt{AE^2 - AO^2} = 4,$

$\therefore CE = 8, AD = 6,$

$\therefore$ 四边形 $ACDE$ 的面积 $= \frac{1}{2} AD \cdot CE = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$8 分

25. (8 分) 在学习了矩形的相关知识后, 小外同学进行了更深入的研究, 他们发现, 过矩形的一条对角线一点与另外两个端点连线, 再与这条对角线上任一端点组成的 2 个三角形面积有特殊关系.

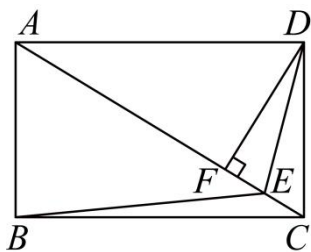
提出猜想, 小外同学猜想这 2 个三角形面积相等.

方案构思, 小外与同学进行充分讨论, 发现两个三角形底边相同, 如果能够证明高也是相等即可得面积相等, 根据他们的想法与思路, 完成以下作图和填空:

数学建模: 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, E 为对角线 AC 上一点, 连接 DE 、 BE , 过 D 作 $DF \perp AC$ 于点 F .

合作探究: (1) 请你用尺规过点 B 作 AC 的垂线交 AC 于点 G (不写作法, 保留作图痕迹).

严密推理: (2) 已知: 矩形 $ABCD$, $DF \perp AC$ 于点 F , $BG \perp AC$ 于点 G . 求证: $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ADE}$.



证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AB = CD,$ ①.....

$\therefore \angle BAG = \angle DCF.$

$\because$ ②....., $DF \perp AC,$

$$\therefore \angle BGA = 90^\circ, \angle DFC = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle BGA = \angle DFC.$$

$$\therefore BGA \cong DFC.$$

$$\therefore \text{③}.$$

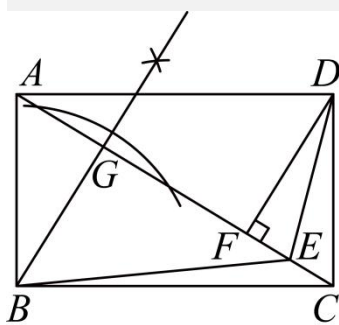
$$\text{而 } S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} BG \cdot AE, \text{④}.$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ADE}.$$

所以过矩形的一条对角线上任意一点与另外两个端点连线，再与这条对角线上任一端点组成的 2 个三角形面积相等；进一步思考，如果四边形 $ABCD$ 是平行四边形呢？请你模仿题中表述，写出你猜想的结论：

$$\text{⑤}.$$

【详解】解：（1）如图所示， BG 即为所求；



3分

（2） $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore AB = CD, AB \parallel CD.$$

$$\therefore \angle BAG = \angle DCF.$$

$$\because BG \perp AC, DF \perp AC,$$

$$\therefore \angle BGA = 90^\circ, \angle DFC = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle BGA = \angle DFC.$$

$$\therefore BGA \cong DFC.$$

$$\therefore BG = DF.$$

$$\text{而 } S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} BG \cdot AE, S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} DF \cdot AE.$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ADE}.$$

所以过矩形的一条对角线上任意一点与另外两个端点连线，再与这条对角线上任一端点组成的 2 个三角形面积相等；进一步思考，如果四边形 $ABCD$ 是平行四边形呢？请你模仿题中表述，写出你猜想的结论：过平行四边形的一条对角线上任意一点与另外两个端点连线，再与这条对角线上任一端点组成的 2 个三角形

面积相等.

故答案为: $AB \parallel CD$, $BG \perp AC$, $BG = DF$, $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2}DF \cdot AE$, 过平行四边形的一条对角线上任意一点与另外两个端点连线, 再与这条对角线上任一端点组成的 2 个三角形面积相等.8 分

26. (10 分) 综合与实践

在数学活动课上, 数学老师带领同学们以“正方形的折叠”为主题展开综合与实践活动.

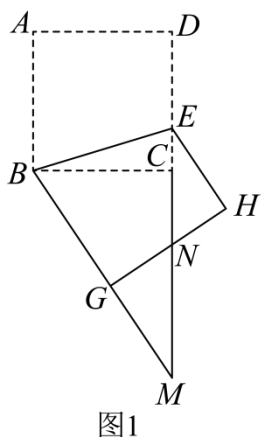


图1

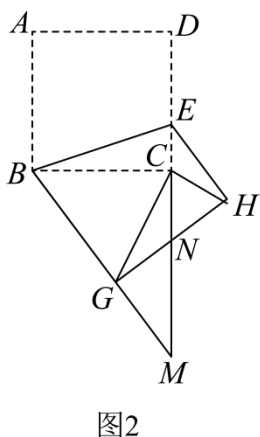


图2

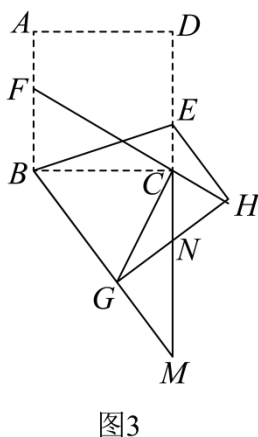


图3

【动手操作】

如图 1, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E 在 CD 边上, 连接 BE , 将正方形 $ABCD$ 沿 BE 折叠得到四边形 $BGHE$, 点 A 、 D 的对应点分别为点 G 、 H . 延长 EC , BG 相交于点 M , CM 与 GH 相交于点 N .

【问题发现】

(1) 求证: $BM = EM$.

【实践探究】

(2) 如图 2, 若点 N 为 GH 的中点, 连接 CG , CH , 求 $\angle HCG$ 的度数.

【拓展思考】

(3) 如图 3, 在 (2) 的条件下、延长 HC 交 AB 于点 F , 求 $\frac{CE}{BF}$ 的值.

【详解】(1) 证明: 由折叠的性质可得 $\angle ABE = \angle MBE$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AB \parallel CD$,

$\therefore \angle ABE = \angle BEM$,

$\therefore \angle MBE = \angle MEB$,

$\therefore BM = EM$;3 分

(2) 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle BCD = \angle A = 90^\circ,$$

由折叠的性质可得 $BC = BG, \angle BCM = \angle BGH = 90^\circ$,

$$\therefore \angle BCG = \angle BGC,$$

$$\therefore \angle MCG = \angle CGH,$$

$$\therefore GN = CN,$$

$\therefore$ 点 N 为 GH 的中点,

$$\therefore GN = HN,$$

$$\therefore HN = CN,$$

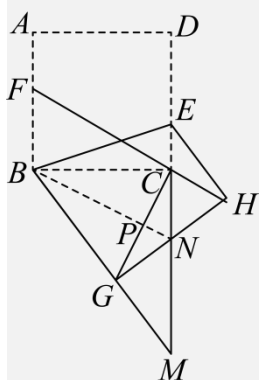
$$\therefore \angle NCH = \angle NHC,$$

$$\therefore \angle MCG + \angle CGH + \angle NCH + \angle NHC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle HCG = \angle MCG + \angle NCH = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ;$$

.....6 分

(3) 解: 连接 BN , 设 BN, CG 交于点 P ,



$$\therefore BC = BG, CN = GN, BN = BN,$$

$$\therefore \triangle BCN \cong \triangle BGN (\text{SSS}),$$

$$\therefore \angle CBN = \angle GBN,$$

$$\therefore BC = BG, CN = GN,$$

$$\therefore \triangle BCP \cong \triangle BGP (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle BPC = \angle BPG = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ,$$

由 (2) 知 $\angle HCG = 90^\circ$,

$$\therefore \angle FCP = 90^\circ,$$

$$\therefore BN \perp CF,$$

$\therefore AB \parallel CM$,

$\therefore BNCF$ 是平行四边形,

$\therefore BF = CN$,

由 (2) 知 $GH = 2HN = 2CN$,

$\therefore GH = 2BF$,

由折叠的性质得到 $AB = GH = 2BF$, $\angle GHE = 90^\circ$

设 $BF = CN = x, CE = y$, 则 $GH = 2x, NH = x$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore CD = AB = GH = 2x$,

$\therefore EH = DE = CD - CE = 2x - y, EN = CE + CN = x + y$,

在 Rt $\triangle ENH$ 中, $EN^2 = NH^2 + EH^2$, 即 $(x + y)^2 = x^2 + (2x - y)^2$,

$\therefore x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 4x^2 - 4xy + y^2$, 即 $6xy = 4x^2$,

$\therefore \frac{xy}{x^2} = \frac{y}{x} = \frac{2}{3}$,

$\therefore \frac{CE}{BF} = \frac{2}{3}$ 10 分