2023~2024 学年（上）高一期末质量监测

数学

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上指定位置上，在其他位置作答一律无效.

3.本卷满分为 150 分，考试时间为 120 分钟.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若扇形的圆心角为2rad，半径为 1，则该扇形的面积为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　　　B. 1　　　　C. 2　　　　D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】利用扇形面积公式进行求解.

【详解】扇形面积为$\frac{1}{2}\times 2\times 1^2=1$.

故选：B

2. 已知全集$U=R$，集合$A=\{x\,|\,-2\le x\le 3\}$，$B=\{x\,|\,x<-1\text{或}x>4\}$，则$A\cap \complement_U B=$（　　）

A. $\{x\,|\,-2\le x<4\}$　　　　B. $\{x\,|\,x\le 3\text{或}x\ge 4\}$

C. $\{x\,|\,-2\leqslant x<-1\}$　　　　D. $\{x\,|\,-1\le x\le 3\}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据交集和补集的定义即可得出答案.

【详解】解：因为$A=\{x\,|\,-2\le x\le 3\}$，$B=\{x\,|\,x<-1\text{或}x>4\}$，

所以$\complement_U B=\{x\,|\,-1\le x\le 4\}$，

所以$A\cap \complement_U B=\{x\,|\,-1\le x\le 3\}$.

故选：D.

3. 函数 $f\left(x\right)=4x+\frac{9}{x+1}$， $x\in\left(-1,+\infty\right)$ 的最小值为（　　）

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

【答案】B

【解析】

【分析】将函数解析式变形为 $f\left(x\right)=4\left(x+1\right)+\frac{9}{x+1}-4$，利用基本不等式可求得该函数的最小值.

【详解】因为 $x\in\left(-1,+\infty\right)$，则 $x+1>0$，则 $f\left(x\right)=4x+\frac{9}{x+1}=4\left(x+1\right)+\frac{9}{x+1}-4$

$\geq 2\sqrt{4\left(x+1\right)\cdot\frac{9}{x+1}}-4=12-4=8$，

当且仅当 $\begin{cases}4\left(x+1\right)=\frac{9}{x+1}\\ x>-1\end{cases}$ 时，即当 $x=\frac{1}{2}$ 时，等号成立，

故函数 $f\left(x\right)=4x+\frac{9}{x+1}$， $x\in\left(-1,+\infty\right)$ 的最小值为 8.

故选：B.

4. 若角 θ 的终边经过点 $P\left(1,3\right)$，则 $\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=$（　　）

A. $-\frac{6}{5}$　　B. $-\frac{2}{5}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{6}{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】由三角函数定义可得 $\sin\theta$、 $\cos\theta$，即可得解.

【详解】由角 θ 的终边经过点 $P\left(1,3\right)$，故 $\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

故 $\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{10}}{10}+\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}=\frac{2}{5}$.

故选：C.

5. 函数 $f\left(x\right)=2\log_3 x+2x-5$ 的零点所在区间是（　　）

A. $(0,1)$　　B. $\left(1,\frac{3}{2}\right)$　　C. $\left(\frac{3}{2},2\right)$　　D. $(2,3)$

【答案】C

【解析】

【分析】根据函数的单调性，结合零点存在性定理求解.

【详解】由于函数 $f(x)=2\log_3 x+2x-5$ 为定义域内的单调递增函数，

且 $f(2)=2\log_3 2-1>2\log_3\sqrt{3}-1=0$，$f\left(\frac{3}{2}\right)=2\log_3\frac{3}{2}-2<0$，

故由零点存在定理可得零点位于区间 $\left(\frac{3}{2},2\right)$，

故选：C

6. 设函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$ 的最小正周期为 T. 若 $2\pi<T<3\pi$，且对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)\geq 0$ 恒成立，则 $\omega=$（　　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{5}{6}$

【答案】B

【解析】

【分析】由 $2\pi<T<3\pi$ 可得 $\frac{2}{3}<\omega<1$，由对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)\geq 0$ 恒成立，可得 $f(x)_{\min}+f\left(\frac{\pi}{3}\right)\geq 0$，计算即可得.

【详解】由 $f(x)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)\geq 0$，且 $f(x)\in[-1,1]$，故 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$，

即有 $\omega\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，解得 $\omega=\frac{3}{4}+6k\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，

又 $2\pi<T<3\pi$，$\omega>0$，故 $2\pi<\frac{2\pi}{\omega}<3\pi$，即 $\frac{2}{3}<\omega<1$，

综上，$\omega=\frac{3}{4}$.

故选：B.

7. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$y=2f(x)-\sin x$ 是偶函数，$y=f(x)-\cos x$ 是奇函数，则 $[f(x)]^2+\left[f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right]^2=$（　　）

A. 5　　B. 2　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{5}{4}$

【答案】D

【解析】

【分析】由函数奇偶性的定义可得出关于 $f(x)$、$f(-x)$ 的等式组，解出函数 $f(x)$ 的解析式，再利用诱导公式以及同角三角函数的平方关系可求得所求代数式的值.

【详解】因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$y=2f(x)-\sin x$ 是偶函数，$y=f(x)-\cos x$ 是奇函数，

则 $2f(-x)-\sin(-x)=2f(x)-\sin x$，可得 $f(x)-f(-x)=\sin x$，①

$f(-x)-\cos(-x)=-f(x)+\cos x$，可得 $f(x)+f(-x)=2\cos x$，②

联立①②可得 $f(x)=\frac{1}{2}(\sin x+2\cos x)$，

所以，$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+2\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}(\cos x-2\sin x)$，

因此，$[f(x)]^2+\left[f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right]^2=\frac{1}{4}(\sin x+2\cos x)^2+\frac{1}{4}(\cos x-2\sin x)^2$

$=\frac{1}{4}(\sin^2 x+4\sin x\cos x+4\cos^2 x)+\frac{1}{4}(\cos^2 x-4\sin x\cos x+4\sin^2 x)=\frac{5}{4}$.

故选：D.

8. 已知函数 $f(x)=\lg|x|-\cos x$，记 $a=f(\log_{0.5}1.5)$，$b=f(1.5^{0.5})$，$c=f(\sin(1-\pi))$，则（　　）

A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $c<b<a$　　D. $c<a<b$

【答案】B

【解析】

【分析】分析函数 $f(x)$ 的奇偶性以及该函数在 $(0,\pi)$ 的单调性，比较 $|\log_{0.5}1.5|$、$1.5^{0.5}$、$|\sin(1-\pi)|$ 的大小关系，结合函数 $f(x)$ $(0,\pi)$ 的单调性可得出 a、b、c 的大小关系.

【详解】函数 $f(x)=\lg|x|-\cos x$ 的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，定义域关于原点对称，

又因为 $f(-x)=\lg|-x|-\cos(-x)=\lg|x|-\cos x=f(x)$，故函数 $f(x)$ 为偶函数，

因为函数 $y=\lg|x|$ 在 $(0,\pi)$ 上为增函数，函数 $y=-\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 上为增函数，

故函数 $f\left(x\right)$ 在 $(0,\pi)$ 上为增函数，

因为 $1=1.5^{0}<1.5^{0.5}<1.5<\pi$，$1>\left|\sin\left(1-\pi\right)\right|=\left|-\sin 1\right|=\sin 1>\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

因为 $3^{5}=243<2^{8}=256$，所以，$\left(\dfrac{3}{2}\right)^{5}<2^{3}$，则 $\log_{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{5}<3$，则 $\log_{2}1.5<\dfrac{3}{5}$，

所以，$\left|\log_{0.5}1.5\right|=\left|\log_{2^{-1}}1.5\right|=\log_{2}1.5<\dfrac{3}{5}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\left|\sin\left(1-\pi\right)\right|$，

所以，$0<\left|\log_{0.5}1.5\right|<\left|\sin\left(1-\pi\right)\right|<1.5^{0.5}<\pi$，

$a=f\left(\left|\log_{0.5}1.5\right|\right)$，$b=f\left(1.5^{0.5}\right)$，$c=f\left(\left|\sin\left(1-\pi\right)\right|\right)$，故 $a<c<b$.

故选：B.

【点睛】思路点睛：解答比较函数值大小问题，常见的思路有两个：

（1）判断各个数值所在的区间；

（2）利用函数的单调性直接解答.

数值比较多的比较大小问题也也可以利用两种方法的综合应用.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 下列各式中，计算结果为1的是（　　）

A. $\sin 75^{\circ}\cos 15^{\circ}+\cos 75^{\circ}\sin 15^{\circ}$　　B. $\cos^{2}22.5^{\circ}-\sin^{2}22.5^{\circ}$

C. $\dfrac{\sqrt{3}-\tan 15^{\circ}}{1+\sqrt{3}\tan 15^{\circ}}$　　D. $\dfrac{\tan 22.5^{\circ}}{1-\tan^{2}22.5^{\circ}}$

【答案】AC

【解析】

【分析】利用两角和的正弦公式可判断 A 选项；利用二倍角的余弦公式可判断 B 选项；利用两角差的正切公式可判断 C 选项；利用二倍角的正切公式可判断 D 选项.

【详解】对于 A 选项，$\sin 75^{\circ}\cos 15^{\circ}+\cos 75^{\circ}\sin 15^{\circ}=\sin\left(75^{\circ}+15^{\circ}\right)=\sin 90^{\circ}=1$；

对于 B 选项，$\cos^{2}22.5^{\circ}-\sin^{2}22.5^{\circ}=\cos\left(2\times 22.5^{\circ}\right)=\cos 45^{\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

对于 C 选项，$\dfrac{\sqrt{3}-\tan 15^{\circ}}{1+\sqrt{3}\tan 15^{\circ}}=\dfrac{\tan 60^{\circ}-\tan 15^{\circ}}{1+\tan 60^{\circ}\tan 15^{\circ}}=\tan\left(60^{\circ}-15^{\circ}\right)=\tan 45^{\circ}=1$；

对于 D 选项，$\dfrac{\tan 22.5^{\circ}}{1-\tan^{2}22.5^{\circ}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\tan 22.5^{\circ}}{1-\tan^{2}22.5^{\circ}}=\dfrac{1}{2}\tan\left(2\times 22.5^{\circ}\right)=\dfrac{1}{2}\tan 45^{\circ}=\dfrac{1}{2}$.

故选：AC.

10. 若 $a>b>0$，$c>d>0$，则（　　）

A. $a-c>b-d$　　B. $a\left(a+c\right)>b\left(b+d\right)$　　C. $\dfrac{d}{a+d}<\dfrac{c}{b+c}$　　D. $\dfrac{b+d}{b+c}<\dfrac{a+d}{a+c}$

【答案】BCD

【解析】

【分析】结合不等式的性质逐项判断即可得.

【详解】对 A：取 $a=5$，$b=4$，$c=3$，$d=1$，则 $a-c=2$，$b-d=3$，故 A 错误；

对 B：由 $a>b>0$，$c>d>0$，则 $a+c>b+d$，则有 $a\left(a+c\right)>b\left(b+d\right)$，故 B 正确；

对 C：由 $a>b>0$，$c>d>0$，则 $ac>bd$，且 $\dfrac{d}{a+d}<\dfrac{c}{b+c}$ 等价于 $\dfrac{1}{\frac{a}{d}+1}<\dfrac{1}{\frac{b}{c}+1}$，

等价于 $\dfrac{a}{d}>\dfrac{b}{c}$，等价于 $ac>bd$，即 C 正确；

对 D：由 $a>b>0$，$c>d>0$，则 $\dfrac{b+d}{b+c}=\dfrac{b+c+d-c}{b+c}=1+\dfrac{d-c}{b+c}$，

$\dfrac{a+d}{a+c}=\dfrac{a+c+d-c}{a+c}=1+\dfrac{d-c}{a+c}$，即 $\dfrac{b+d}{b+c}<\dfrac{a+d}{a+c}$ 等价于 $\dfrac{d-c}{b+c}<\dfrac{d-c}{a+c}$，

由 $d-c<0$，即等价于 $\dfrac{1}{b+c}>\dfrac{1}{a+c}$，等价于 $a+c>b+c$，即 $a>b$，故 D 正确.

故选：BCD.

11. 下列函数中，既是偶函数又在区间$(0,+\infty)$上单调递增的是（　　）

A. $y=x^{-\frac{2}{3}}$　　B. $y=2^{|x|+1}$　　C. $y=x^{2}-x^{-2}$　　D. $y=2^{x}-2^{-x}$

【答案】BC

【解析】

【分析】A 选项，不满足单调性；BC 选项，判断出函数为偶函数，且在$(0,+\infty)$上单调递增；D 选项，不满足奇偶性.

【详解】A 选项，$-\dfrac{2}{3}<0$，故 $y=x^{-\frac{2}{3}}$ 在$(0,+\infty)$上单调递减，A 错误；

B 选项，$f\left(x\right)=2^{|x|+1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f\left(-x\right)=2^{|-x|+1}=2^{|x|+1}=f\left(x\right)$，

故 $f\left(x\right)=2^{|x|+1}$ 为偶函数，

当 $x>0$ 时，$y=2^{|x|+1}=2^{x+1}$，在$(0,+\infty)$上单调递增，B 正确；

C 选项，$g\left(x\right)=x^2-x^{-2}$ 定义域为 $\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$，

$g\left(-x\right)=\left(-x\right)^2-\left(-x\right)^{-2}=x^2-x^{-2}=g\left(x\right)$，故 $g\left(x\right)=x^2-x^{-2}$ 为偶函数，

又 $y=x^2$ 在$(0,+\infty)$上单调递增，$y=x^{-2}$ 在$(0,+\infty)$上单调递减，

故 $g\left(x\right)=x^2-x^{-2}$ 在$(0,+\infty)$上单调递增，C 正确；

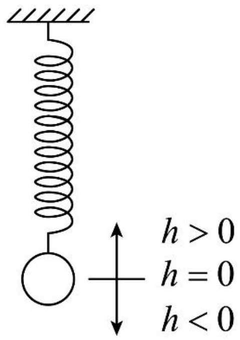
D 选项，$h\left(x\right)=2^x-2^{-x}$ 定义域为 $\mathbf{R}$，$h\left(-x\right)=2^{-x}-2^x=-\left(2^x-2^{-x}\right)=-h\left(x\right)$，

故 $h\left(x\right)=2^x-2^{-x}$ 为奇函数，D 错误.

故选：BC

12. 如图，弹簧挂着的小球做上下振动，小球的最高点与最低点间的距离为 10（单位：cm），它在 t（单位：s）时相对于平衡位置（静止时的位置）的高度 $h$cm 由关系式 $h=A\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{4}\right)$ 确定，其中 $A>0$，$t\geq 0$.

则下列说法正确的是（　　）



A. 小球在往复振动一次的过程中，从最高点运动至最低点用时 2s

B. 小球在往复振动一次的过程中，经过的路程为 20cm

C. 小球从初始位置开始振动，重新回到初始位置时所用的最短时间为 $\frac{1}{2}$s

D. 小球从初始位置开始振动，若经过最高点和最低点的次数均为 10 次，则所用时间的范围是 $\left[20\frac{1}{4},21\frac{1}{4}\right)$

【答案】BC

【解析】

【分析】求出 A 的值，求出函数的最小正周期，可判断 A 选项；根据 A 的值可计算出小球在往复振动一次

的过程中，经过的路程，可判断 B 选项；解方程 $h=5\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，求出 t 的可能取值，可判断 C 选项；求出 t 的取值范围，可判断 D 选项.

【详解】由题意可知，$A=\frac{h_{\max}-h_{\min}}{2}=\frac{10}{2}=5$，则 $h=5\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{4}\right)$，

对于 A 选项，函数 $h=A\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{\pi}=2$，

所以，小球在往复振动一次的过程中，从最高点运动至最低点用时 1s，A 错；

对于 B 选项，小球在往复振动一次的过程中，经过的路程为 20cm，B 对；

对于 C 选项，因为当 $t=0$ 时，$h=5\sin\frac{\pi}{4}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，

由 $h=5\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 可得 $\pi t+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{4}\left(k\in\mathbf{Z}\right)$ 或 $\pi t+\frac{\pi}{4}=2n\pi+\frac{3\pi}{4}\left(n\in\mathbf{Z}\right)$，

解得 $t=2k\left(k\in\mathbf{Z}\right)$ 或 $t=2n+\frac{1}{2}\left(n\in\mathbf{Z}\right)$，

易知，$t\geq 0$，则 t 的可能取值有：0、$\frac{1}{2}$、2、$\frac{5}{2}$、4、$\frac{9}{2}$、$\cdots$，

小球从初始位置开始振动，重新回到初始位置时所用的最短时间为 $\frac{1}{2}\text{s}$，C 对；

对于 D 选项，由 $\pi t+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ 可得 $t=\frac{1}{4}$，则当 $t=\frac{1}{4}\text{s}$ 时，小球第一次到达最高点，

以后每隔一个周期都出现一次最高点，

因为小球在 $t\text{s}$ 内经过最高点和最低点的次数恰好是 10 次，

所以，$\frac{1}{4}+9T+\frac{1}{2}T\leq t<\frac{1}{4}+10T$，因为 $T=2$，则 $19\frac{1}{4}\leq t<20\frac{1}{4}$，

所以，小球从初始位置开始振动，若经过最高点和最低点的次数均为 10 次，则所用时间的范围是 $\left[19\frac{1}{4},20\frac{1}{4}\right)$，D 错.

故选：BC.

【点睛】方法点睛：根据三角函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)+b$ 或 $f\left(x\right)=A\cos\left(\omega x+\varphi\right)+b$ 的部分图象求函数解析式的方法：

（1）求A、b：$A=\dfrac{f(x)_{\max}-f(x)_{\min}}{2}$，$b=\dfrac{f(x)_{\max}+f(x)_{\min}}{2}$；

（2）求出函数的最小正周期T，进而得出$\omega=\dfrac{2\pi}{T}$；

（3）取特殊点代入函数可求得φ的值.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 在$\triangle ABC$中，若$\tan A$、$\tan B$是x的方程$x^2-px+1-p=0$的两个实根，则角$C=$________________.

【答案】$\dfrac{3\pi}{4}$

【解析】

【分析】利用韦达定理结合两角和的正切公式求出$\tan(A+B)$的值，求出$A+B$的值，即可求得角C的值.

【详解】对于方程$x^2-px+1-p=0$，则$\Delta=p^2-4(1-p)=p^2+4p-4>0$，解得$p<-2-2\sqrt{2}$或$p>-2+2\sqrt{2}$，

因为$\tan A$、$\tan B$是x的方程$x^2-px+1-p=0$的两个实根，

由韦达定理可得$\tan A+\tan B=p$，$\tan A\tan B=1-p$，

所以，$\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\dfrac{p}{1-(1-p)}=1$，

因为$0<A+B<\pi$，则$A+B=\dfrac{\pi}{4}$，故$C=\dfrac{3\pi}{4}$.

故答案为：$\dfrac{3\pi}{4}$.

14. 已知函数$f(x)=\begin{cases}3^x, x\geq 1\\ ax+1, x<1\end{cases}$在$\mathbf{R}$上单调递增，则$a$的取值范围是________________.

【答案】$(0,2]$

【解析】

【分析】根据分段函数的单调性可得出关于实数a的不等式组，解之即可.

【详解】因为函数$f(x)=\begin{cases}3^x, x\geq 1\\ ax+1, x<1\end{cases}$在$\mathbf{R}$上单调递增，

易知函数$f(x)=3^x$在$[1,+\infty)$上单调递增，

函数 $f\left(x\right)=ax+1$ 在 $\left(-\infty,1\right)$ 上单调递增，则 $a>0$，且有 $a+1\le 3$，解得 $a\le 2$，

所以，$0<a\le 2$，即实数 a 的取值范围是 $\left(0,2\right]$.

故答案为：$\left(0,2\right]$.

15. 已知 $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{2}$，$\cos\left(\alpha-\beta\right)=\frac{1}{4}$，则 $\cos\alpha+\cos\beta$ 的一个取值为____________.

【答案】$\frac{3}{2}$（或 $-\frac{3}{2}$）

【解析】

【分析】计算出 $\left(\sin\alpha+\sin\beta\right)^2+\left(\cos\alpha+\cos\beta\right)^2$ 的值，即可求得出 $\cos\alpha+\cos\beta$ 的值.

【详解】因为 $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{2}$，$\cos\left(\alpha-\beta\right)=\frac{1}{4}$，

且 $\left(\sin\alpha+\sin\beta\right)^2+\left(\cos\alpha+\cos\beta\right)^2=\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta+\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta$

$=2+2\left(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\right)=2+2\cos\left(\alpha-\beta\right)=2+2\times\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$，

所以，$\left(\cos\alpha+\cos\beta\right)^2=\frac{5}{2}-\left(\sin\alpha+\sin\beta\right)^2=\frac{5}{2}-\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$，故 $\cos\alpha+\cos\beta=\pm\frac{3}{2}$.

故答案为：$\frac{3}{2}$（或 $-\frac{3}{2}$）.

16. 若闭区间 $\left[a,b\right]$ 满足：①函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上单调；②函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上的值域为 $\left[a^n,b^n\right]$，$n\in\mathbf{N}^*$，则称区间 $\left[a,b\right]$ 为函数 $f\left(x\right)$ 的 n 次方膨胀区间．函数 $f\left(x\right)=x^{\frac{1}{3}}$ 的 2 次方膨胀区间为__________；若函数 $f\left(x\right)=kx^2+1-k\left(k>0\right)$ 存在 4 次方膨胀区间，则 k 的取值范围是____________.

【答案】 ①. $\left[0,1\right]$ ②. $k\ge 1$ 且 $k\ne 2$，

【解析】

【分析】根据 $f\left(x\right)=x^{\frac{1}{3}}$ 的单调性，结合 2 次方膨胀区间的定义即可列方程求解空 1，根据二次函数的单调性，分类讨论，结合 4 次方膨胀区间的定义，由二次方程根的分布即可求解空 2.

【详解】设函数 $f\left(x\right)=x^{\frac{1}{3}}$ 的 2 次方膨胀区间为 $\left[a,b\right]$，

由于函数 $f\left(x\right)=x^{\frac{1}{3}}$ 为 $\left[a,b\right]$ 上的单调递增函数，

所以 $f\left(a\right)=a^{\frac{1}{3}}=a^2$ 且 $f\left(b\right)=b^{\frac{1}{3}}=b^2$，由于 $a<b$，解得 $a=0,b=1$，

故 $f\left(x\right)=x^{\frac{1}{3}}$ 的 2 次方膨胀区间为 $\left[0,1\right]$，

由于 $f\left(x\right)=kx^2+1-k\left(k>0\right)$ 为开口向上的二次函数，且对称轴为 $x=0$，

设 $f\left(x\right)=kx^2+1-k\left(k>0\right)$ 存在 4 次方膨胀区为 $\left[m,n\right]$，

若 $n\le 0$，则 $f\left(x\right)=kx^2+1-k\left(k>0\right)$ 为 $\left[m,n\right]$ 上的单调递减函数，

所以 $f\left(m\right)=km^2+1-k=n^4$ 且 $f\left(n\right)=kn^2+1-k=m^4$，

相减可得 $k\left(m^2-n^2\right)=n^4-m^4\Rightarrow k=-\left(m^2+n^2\right)<0$，这与 $k>0$ 矛盾，故不符合题意舍去，

若 $m\ge 0$，则 $f\left(x\right)=kx^2+1-k\left(k>0\right)$ 为 $\left[m,n\right]$ 上的单调递增函数，

所以 $f\left(m\right)=km^2+1-k=m^4$ 且 $f\left(n\right)=kn^2+1-k=n^4$，

因此 m,n 是方程 $x^4-kx^2-1+k=0$ 的两个不相等非负实数根，

令 $x^2=t$，则 $t^2-kt-1+k=0$ 有两个不相等非负实数根，

记 $g\left(t\right)=t^2-kt-1+k$，

所以 $\begin{cases} g\left(0\right)\ge 0 \\ \dfrac{k}{2}>0 \\ \Delta=\left(-k\right)^2-4\left(-1+k\right)>0 \end{cases}$，解得 $k\ge 1$ 且 $k\ne 2$，

故答案为：$\left[0,1\right]$，$k\ge 1$ 且 $k\ne 2$，

【点睛】思路点睛：主要是利用函数满足的两个条件①和②，利用条件①，根据函数的单调性即可求解函数的值域，根据条件②列出满足的方程，结合二次方程根的分布，即可找到求解途径.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知全集 $U=R$，集 $A=\left\{y\middle|\ y=\sin x+m\right\}$，$B=\left\{x\middle|\ x^2-4x\le 0\right\}$.

（1）若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 m 的取值范围；

（2）若 $A\cup B\ne B$，求实数 m 的取值范围.

【答案】（1）$\{m\,|\,m>5$ 或 $m<-1\}$；

（2）$\{m\,|\,m>3$ 或 $m<1\}$；

【解析】

【分析】（1）结合交集的定义，即可求解；

（2）根据已知条件，结合并集的定义，即可求解.

【小问 1 详解】

$A=\{y|\ y=\sin x+m\}$，则 $-1+m\le y\le 1+m$，

$B=\{x\,|\,x^2-4x\le 0\}=\{x\,|\,0\le x\le 4\}$，

$A\cap B=\varnothing$，

则 $m+1<0$ 或 $-1+m>4$，解得 $m<-1$ 或 $m>5$，

故实数 m 的取值范围为 $\{m\,|\,m>5$ 或 $m<-1\}$；

【小问 2 详解】

当 $A\cup B=B$ 时，则 $A\subseteq B$，且集合 A 不为空，则 $\begin{cases}m-1\ge 0\\ m+1\le 4\end{cases}$，解得 $1\le m\le 3$，

所以若 $A\cup B\ne B$ 时，则实数 m 的取值范围为 $\{m\,|\,m>3$ 或 $m<1\}$；

18. 已知 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，$\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$，$\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{5}{13}$.

（1）求 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$；

（2）求 $\sin\beta$.

【答案】（1）$-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

（2）$\dfrac{63}{65}$

【解析】

【分析】（1）利用同角三角函数的基本关系可求出角 α 的正弦值和余弦值，再利用两角差的正弦公式可求得 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值；

（2）利用同角三角函数的基本关系求出 $\sin(\alpha-\beta)$ 的值，再利用两角差的正弦公式可求得 $\sin\beta$ 的值.

【小问 1 详解】

解：因为 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\sin\alpha>0$，$\cos\alpha>0$，

由 $\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{3}{4}\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\\ \sin\alpha>0\\ \cos\alpha>0\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{3}{5}\\ \cos\alpha=\dfrac{4}{5}\end{cases}$，

所以，$\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos\alpha\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{4}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

【小问 2 详解】

解：因为 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，则 $-\pi<\alpha-\beta<0$，所以，$\sin(\alpha-\beta)<0$，

所以，$\sin(\alpha-\beta)=-\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\beta)}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2}=-\dfrac{12}{13}$，

因此，$\sin\beta=\sin[\alpha-(\alpha-\beta)]=\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)$

$=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{5}{13}-\dfrac{4}{5}\times\left(-\dfrac{12}{13}\right)=\dfrac{63}{65}$.

19. 已知函数 $f(x)=\lg(1-2x)+\lg(1+2x)$.

（1）求 $f(x)$ 的定义域；

（2）判断并证明 $f(x)$ 的奇偶性；

（3）讨论 $f(x)$ 的单调性.

【答案】（1）$\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

（2）偶函数，证明见解析

（3）在 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ 上单调递增，在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递减；

【解析】

【分析】（1）利用对数的真数大于零可求得函数 $f(x)$ 的定义域；

（2）判断出函数 $f(x)$ 为偶函数，然后利用函数奇偶性的定义证明即可；

（3）利用复合函数的单调性可得出函数 $f(x)$ 的单调性.

【小问 1 详解】

对于函数 $f\left(x\right)=\lg\left(1-2x\right)+\lg\left(1+2x\right)$，有 $\begin{cases}1-2x>0\\1+2x>0\end{cases}$，解得 $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$，

所以，函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

【小问 2 详解】

函数 $f\left(x\right)=\lg\left(1-2x\right)+\lg\left(1+2x\right)$ 为偶函数，证明如下：

函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，定义域关于原点对称，

且 $f\left(-x\right)=\lg\left(1+2x\right)+\lg\left(1-2x\right)=f\left(x\right)$，故函数 $f\left(x\right)$ 为偶函数.

【小问 3 详解】

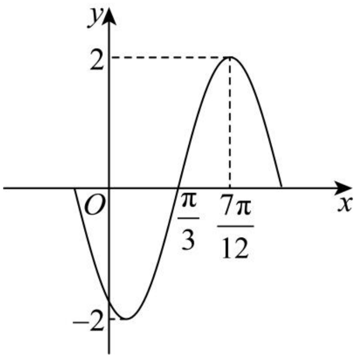
因为 $f\left(x\right)=\lg\left(1-2x\right)+\lg\left(1+2x\right)=\lg\left(1-4x^2\right)$，

令 $u=1-4x^2$，因为内层函数 $u=1-4x^2$ 在 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ 上单调递增，在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递减，

外层函数 $y=\lg u$ 为 $\left(0,+\infty\right)$ 上的增函数，

由复合函数的单调性可知，函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ 上单调递增，在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递减.

20. 已知函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(A>0,\omega>0,-\pi<\varphi<\pi\right)$ 的部分图象如图所示.



（1）求 $f\left(x\right)$ 的解析式及单调减区间；

（2）将函数$y=f(x)$的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，再将所得图象上各点的横坐标变为原来的 2 倍（纵坐标不变），得到函数$y=g(x)$的图象. 若对任意 x_1、$x_2\in\left[\dfrac{\pi}{6},\pi\right]$，$\left|g\left(x_1\right)-g\left(x_2\right)\right|\le a$，求实数 a 的最小值.

【答案】（1）$f\left(x\right)=2\sin\left(2x-\dfrac{2\pi}{3}\right)$，减区间为$\left[k\pi+\dfrac{7\pi}{12},k\pi+\dfrac{13\pi}{12}\right]\left(k\in\mathbf{Z}\right)$

（2）3

【解析】

【分析】（1）利用图象可得出 A 的值，求出函数 $f\left(x\right)$ 的最小正周期，可求出 ω 的值，再由 $f\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=2$ 结合 φ 的取值范围可得出 φ 的值，即可得出函数 $f\left(x\right)$ 的解析式，然后利用正弦型函数的单调性可求出函数 $f\left(x\right)$ 的减区间；

（2）利用三角函数图象变换求出函数 $g\left(x\right)$ 的解析式，利用正弦型函数的基本性质求出函数 $g\left(x\right)$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{6},\pi\right]$ 上的最小值和最大值，可得出 $a\geq g\left(x\right)_{\max}-g\left(x\right)_{\min}$，即可得解.

【小问 1 详解】

解：由图可得 $A=f\left(x\right)_{\max}=2$，

函数 $f\left(x\right)$ 的最小正周期为 $T=4\times\left(\dfrac{7\pi}{12}-\dfrac{\pi}{3}\right)=\pi$，则 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$，

所以，$f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\varphi\right)$，

因为 $f\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=2\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}+\varphi\right)=2$，可得 $\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}+\varphi\right)=1$，

因为 $-\pi<\varphi<\pi$，则 $\dfrac{\pi}{6}<\varphi+\dfrac{7\pi}{6}<\dfrac{13}{6}\pi$，所以，$\varphi+\dfrac{7\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，所以，$\varphi=-\dfrac{2\pi}{3}$，

因此，$f\left(x\right)=2\sin\left(2x-\dfrac{2\pi}{3}\right)$，

由 $2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\leq 2x-\dfrac{2\pi}{3}\leq 2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\left(k\in\mathbf{Z}\right)$ 解得 $k\pi+\dfrac{7\pi}{12}\leq x\leq k\pi+\dfrac{13\pi}{12}\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，

所以，函数 $f\left(x\right)$ 的单调递减区间为 $\left[k\pi+\dfrac{7\pi}{12},k\pi+\dfrac{13\pi}{12}\right]\left(k\in\mathbf{Z}\right)$.

【小问 2 详解】

解：将函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，

可得到函数 $y=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{2\pi}{3}\right]=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，

再将所得图象上各点的横坐标变为原来的2倍（纵坐标不变），得到函数 $y=g(x)$ 的图象，

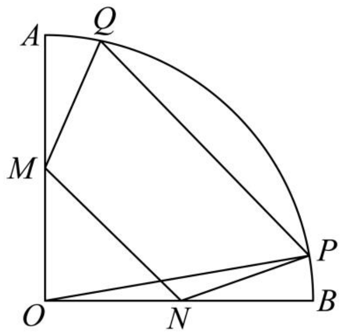
则 $g(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，

当 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\pi\right]$ 时，$-\frac{\pi}{6}\le x-\frac{\pi}{3}\le\frac{2\pi}{3}$，则 $-\frac{1}{2}\le\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\le 1$，则 $-1\le g(x)\le 2$，

对任意的 x_1、$x_2\in\left[\frac{\pi}{6},\pi\right]$，$\left|g(x_1)-g(x_2)\right|\le a$，

则 $a\ge g(x)_{\max}-g(x)_{\min}=2-(-1)=3$，故实数 a 的最小值为3.

21. 如图，在半径为4、圆心角为 90° 的扇形 OAB 中；M,N 分别为 OA,OB 的中点，点 P,Q 在圆弧 AB 上且 $MN//PQ$.



（1）若 $\angle BOP=15^\circ$，求梯形 $MNPQ$ 的高；

（2）求四边形 $MNPQ$ 面积的最大值.

【答案】（1）$2\sqrt{3}-\sqrt{2}$

（2）7

【解析】

【分析】（1）作出梯形 $MNPQ$ 的高后结合题意计算即可得；

（2）四边形 $MNQP$ 面积为 $S=S_{\triangle ONP}+S_{\triangle OMQ}+S_{\triangle OPQ}-S_{\triangle OMN}$，设 $\angle AOQ=\angle BOP=\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，结合 $OM=ON=2$，即可求出面积关于 θ 的表达式，即可得最大值.

【小问1详解】

连接OQ，过点O作$OT\perp PQ$于点T，交MN于点S，

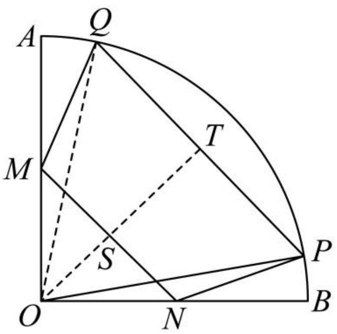
由$\angle BOP=15^{\circ}$，$MN//PQ$，扇形半径为4，M,N分别为OA,OB的中点，

故$\angle AOQ=15^{\circ}$，$OP=OQ=4$，$OS\perp MN$，$OM=ON=2$，

则$\angle POQ=60^{\circ}$，故$\triangle POQ$为等边三角形，

则$OT=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 4=2\sqrt{3}$，$OS=\dfrac{MN}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，

故梯形$MNPQ$的高为$ST=OT-OS=2\sqrt{3}-\sqrt{2}$；



【小问2详解】

设$\angle AOQ=\angle BOP=\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，则$\angle POQ=\dfrac{\pi}{2}-2\theta$，

且此时$OM=ON=2$，四边形$MNQP$面积为：

$S=S_{\triangle ONP}+S_{\triangle OMQ}+S_{\triangle OPQ}-S_{\triangle OMN}$

$=\dfrac{1}{2}\times 2\times 4\sin\theta+\dfrac{1}{2}\times 2\times 4\sin\theta+\dfrac{1}{2}\times 4\times 4\sin(\dfrac{\pi}{2}-2\theta)-\dfrac{1}{2}\times 2\times 2$

$=-16\sin^2\theta+8\sin\theta+6=-16\left(\sin\theta-\dfrac{1}{4}\right)^2+7$，

$\therefore\sin\theta=\dfrac{1}{4}$时，S取最大值7.

22. 已知函数$f\left(x\right)=a^x$（$a>0$且$a\neq 1$），点$P\left(-2,\dfrac{1}{4}\right)$在其图象上.

（1）若函数$g\left(x\right)=mf\left(2x\right)+\left(2m-1\right)f\left(x\right)$有最小值，求实数$m$的取值范围；

（2）设函数$h\left(x\right)=\begin{cases}f\left(2x\right)-\lambda f\left(x\right)-4,x\geq -2\\ \cos\dfrac{\pi x}{6},-3<x<-2\\ 2,x\leq -3\end{cases}$，若存在非零实数$x_0$，使得$h\left(-x_0\right)=h\left(x_0\right)$，求实数$\lambda$的

取值范围.

【答案】（1）$\left(0,\frac{1}{2}\right)$

（2）$\left(2,+\infty\right)$

【解析】

【分析】（1）由已知条件求出 a 的值，可得出 $f\left(x\right)=2^{x}$，令 $s=2^{x}>0$，可知函数 $y=ms^{2}+\left(2m-1\right)s$ 在 $(0,+\infty)$上有最小值，分 $m=0$、$m\neq0$ 两种情况讨论，在第一种情况下，直接验证即可；在第二种情况下，根据二次函数的基本性质可得出关于实数 m 的不等式组，综合可得出实数 m 的取值范围；

（2）分 $0<\left|x_0\right|\leq2$、$2<\left|x_0\right|<3$、$\left|x_0\right|\geq3$ 三种情况讨论，由 $h\left(-x_0\right)=h\left(x_0\right)$ 结合参变量分离法可得出 λ 在三种情况下的取值范围，综合可得结果.

【小问 1 详解】

解：由题意可知，$f\left(-2\right)=a^{-2}=\frac{1}{4}$，且 $a>0$ 且 $a\neq1$，则 $a=2$，则 $f\left(x\right)=2^{x}$，

所以，$g\left(x\right)=2^{2x}+\left(2m-1\right)2^{x}$，

令 $s=2^{x}>0$，则 $g\left(x\right)=ms^{2}+\left(2m-1\right)s$，

当 $m=0$ 时，函数 $y=-s$ 在$(0,+\infty)$上无最小值，不合乎题意，

当 $m\neq0$ 时，要使得函数 $y=ms^{2}+\left(2m-1\right)s$ 在$(0,+\infty)$上有最小值，则 $\begin{cases}m>0\\ -\frac{2m-1}{2m}>0\end{cases}$，解得 $0<m<\frac{1}{2}$，

因此，实数 m 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

【小问 2 详解】

解：已知函数 $h\left(x\right)=\begin{cases}f\left(2x\right)-\lambda f\left(x\right)-4,x\geq-2\\ \cos\frac{\pi x}{6},-3<x<-2\\ 2,x\leq-3\end{cases}$，若存在非零实数 x_0，使得 $h\left(-x_0\right)=h\left(x_0\right)$，

①当 $0<\left|x_0\right|\leq2$ 时，由 $h\left(-x_0\right)=h\left(x_0\right)$ 可得 $2^{2x_0}-\lambda\cdot2^{x_0}-4=2^{-2x_0}-\lambda\cdot2^{-x_0}-4$，

可得 $\lambda=\frac{2^{2x_0}-2^{-2x_0}}{2^{x_0}-2^{-x_0}}=2^{x_0}+2^{-x_0}$，

不妨设 $0<x_0\le 2$，$t=2^{x_0}\in(1,4]$，则 $\lambda=t+\frac{1}{t}$，

由对勾函数的单调性可知，函数 $y=t+\frac{1}{t}$ 在 $(1,4]$ 上单调递增，则 $\lambda=t+\frac{1}{t}\in\left(2,\frac{17}{4}\right]$；

②当 $2<|x_0|<3$ 时，不妨设 $x_0\in(2,3)$，

由 $h(-x_0)=h(x_0)$，可得 $\cos\left(-\frac{\pi x_0}{6}\right)=2^{2x_0}-\lambda\cdot 2^{x_0}-4$，可得 $\lambda=2^{x_0}-\dfrac{\cos\frac{\pi x_0}{6}+4}{2^{x_0}}$，

令 $m(x)=\dfrac{\cos\frac{\pi x}{6}+4}{2^x}$，其中 $x\in(2,3)$，任取 x_1、$x_2\in(2,3)$ 且 $2<x_1<x_2<3$，

则 $\frac{\pi}{3}<\frac{\pi x_1}{6}<\frac{\pi x_2}{6}<\frac{\pi}{2}$，且余弦函数 $y=\cos u$ 在 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，

所以，$\cos\frac{\pi x_1}{6}>\cos\frac{\pi x_2}{6}>0$，则 $\cos\frac{\pi x_1}{6}+4>\cos\frac{\pi x_2}{6}+4>0$，

因为 $2^{x_2}>2^{x_1}>0$，则 $\frac{1}{2^{x_1}}>\frac{1}{2^{x_2}}>0$，

由不等式的基本性质可得 $\dfrac{\cos\frac{\pi x_1}{6}+4}{2^{x_1}}>\dfrac{\cos\frac{\pi x_2}{6}+4}{2^{x_2}}>0$，即 $m(x_1)>m(x_2)$，

所以，函数 $m(x)=\dfrac{\cos\frac{\pi x}{6}+4}{2^x}$ 在(2,3)上单调递减，

又因为函数 $y=2^x$ 在(2,3)上为增函数，

所以，函数 $p(x)=2^x-\dfrac{\cos\frac{\pi x}{6}+4}{2^x}$ 在(2,3)上为增函数，

且 $p(2)=4-\dfrac{\frac{1}{2}+4}{4}=\frac{23}{8}$，$p(3)=8-\frac{4}{8}=\frac{15}{2}$，

所以，当 $x\in(2,3)$ 时，$p(x)\in\left(\frac{23}{8},\frac{15}{2}\right)$，即 $\lambda\in\left(\frac{23}{8},\frac{15}{2}\right)$；

③当 $|x_0|\ge 3$ 时，不妨设 $x_0\ge 3$，由 $h(x_0)=h(-x_0)$，

可得 $2^{2x_0}-\lambda\cdot 2^{x_0}-4=2$，直则 $\lambda=2^{x_0}-\frac{6}{2^{x_0}}$，

因为函数 $y=2^x$、$y=-\frac{6}{2^x}$ 在 $[3,+\infty)$ 上单调递增，

则函数 $q(x)=2^x-\frac{6}{2^x}$ 在 $[3,+\infty)$ 上单调递增，则 $q(x)\ge q(3)=8-\frac{3}{4}=\frac{29}{4}$，即 $\lambda\ge\frac{29}{4}$.

综上所述，实数λ的取值范围是$\left(2,+\infty\right)$.

【点睛】思路点睛：已知函数的零点或方程的根的情况，求解参数的取值范围问题的本质都是研究函数的零点问题，求解此类问题的一般步骤：

（1）转化，即通过构造函数，把问题转化成所构造函数的零点问题；

（2）列式，即根据函数的零点存在定理或结合函数的图象列出关系式；

（3）得解，即由列出的式子求出参数的取值范围.