

2024~2025 学年度苏锡常镇高三教学情况调研（一）

数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，，写在本试卷上无效。
3. 本卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 i 为虚数单位，复数 z 满足 $z(1+i)=2$ ，则 $|z|=(\quad)$

- A. $\sqrt{2}$ B. 1 C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据复数代数形式的除法运算化简 z ，再计算其模。

【详解】因为 $z(1+i)=2$ ，所以 $z=\frac{2}{1+i}=\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1-i$ ，

所以 $|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ 。

故选：A

2. “ $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$ ”是“ $2^a > 2^b$ ”的 $(\quad)$

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】D

【解析】

【分析】依题意由 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$ 可得 $0 < a < b$ ，由 $2^a > 2^b$ 可得 $a > b$ ，再根据充分条件、必要条件的定义判断即可。

【详解】由 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$ 可得 $0 < a < b$ ，由 $2^a > 2^b$ 可得 $a > b$ ，

所以由 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$ 推不出 $2^a > 2^b$ ，即充分性不成立；

由 $2^a > 2^b$ 也推不出 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$ ，即必要性不成立；

所以“ $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$ ”是“ $2^a > 2^b$ ”的既不充分也不必要条件.

故选：D

3. 已知平面向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 是两个单位向量， $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量为 $\frac{1}{2}\vec{b}$ ，则 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) =$ ()

- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据投影向量定义，结合题意求出 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的值，再利用平面向量的运算律求数量积.

【详解】由题意， $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量为 $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \vec{b} = \frac{1}{2} \vec{b}$ ，则 $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{2}$ ，

因为 $\vec{a}, \vec{b}$ 是单位向量，即 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ ，所以 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$ ， $|\vec{a}|^2 = 1$ ，

则 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

故选：B.

4. 已知 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_4 = 4a_3 - 4a_2$ ，则 $\frac{S_4}{a_1 + a_2} =$ ()

- A. 5 B. 9 C. -9 D. -5

【答案】A

【解析】

【分析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，根据所给条件及等比数列通项公式求出 q ，再由求和公式计算可得.

【详解】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，显然 $a_n \neq 0$ ，

由 $a_4 = 4a_3 - 4a_2$ ，即 $a_2 q^2 = 4a_2 q - 4a_2$ ，

则 $q^2 = 4q - 4$ ，解得 $q = 2$ ，

所以 $\frac{S_4}{a_1 + a_2} = \frac{a_1(1-2^4)}{1-2} = 5$.

故选：A

5. 已知 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{3}{5}$, $\tan \alpha = 2 \tan \beta$, 则 $\sin(\alpha - \beta) =$ ()

- A. $-\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】先切化弦，得到 $\sin \alpha \cos \beta = 2 \cos \alpha \sin \beta$ ，再结合两角和与差的正弦公式可求值.

【详解】由 $\tan \alpha = 2 \tan \beta \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \Rightarrow \sin \alpha \cos \beta = 2 \cos \alpha \sin \beta$.

由 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5}$.

$$\text{由} \begin{cases} \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \\ \sin \alpha \cos \beta = 2 \cos \alpha \sin \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{2}{5} \\ \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{5} \end{cases}.$$

所以 $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$.

故选：B

6. 已知一圆柱内接于半径为 1 的球，当该圆柱的体积最大时，其高为 ()

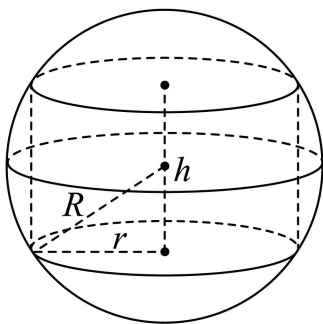
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】结合立体图形，由勾股定理得到 $R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = 1$ ，利用均值不等式求最值，等号成立时圆柱体积最大，求出此时的高 h 即可.

【详解】设球半径为 R ，圆柱的底面半径为 r ，圆柱的高为 h ，



如图，则有 $R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = 1$ ，即 $\frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2} + \frac{h^2}{4} = 1 \geq 3\sqrt[3]{\frac{r^4 h^2}{16}}$ ，

整理得 $r^2 h \leq \frac{4}{3\sqrt{3}}$ ，当且仅当 $\frac{r^2}{2} = \frac{h^2}{4}$ ，即 $r^2 = \frac{2}{3}, h^2 = \frac{4}{3}$ 时，等号成立，

此时圆柱体积 $V = \pi r^2 h$ 取得最大值 $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ ，

所以圆柱的体积最大时， $h^2 = \frac{4}{3}$ 即 $h = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ 。

故选：C。

7. 在空间中，过点 A 作平面 τ 的垂线，记垂足 $B = f^\tau(A)$ 。设两个不同平面 α, β ，对任意一点 P，

$M = f^\alpha(f^\beta(P))$ ， $N = f^\beta(f^\alpha(P))$ ，恒有 $|\overrightarrow{PM}| = |\overrightarrow{PN}|$ 成立，则 ()

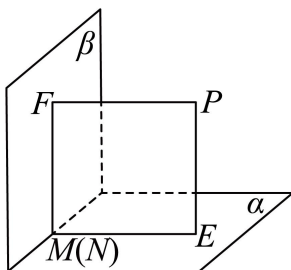
- A. $\alpha // \beta$ B. α, β 的夹角为 45° C. α, β 的夹角为 60° D. $\alpha \perp \beta$

【答案】D

【解析】

【分析】搞清楚题中给出符号的意思，画出草图，可判断平面 α, β 的位置关系。

【详解】如图：



设 $f^\beta(P) = F$ ，则 $f^\alpha(F) = M$ ，

设 $f^\alpha(P) = E$ ，则 $f^\beta(E) = N$ ，

因为 $|\overline{PM}| = |\overline{PN}|$ 恒成立，所以 M, N 两点重合，

所以四边形 $PENF$ 为矩形.

且 $\angle EMF$ 为平面 α, β 所成二面角的平面角.

所以 $\alpha \perp \beta$.

故选：D

8. 我市某校共有 1500 名学生在学校用午餐，每次午餐只能选择在楼上或楼下的一个食堂用餐，经统计，当天在楼上食堂用餐的学生中，有 10% 的学生第二天会到楼下食堂用餐；而当天在楼下食堂用餐的学生中，有 15% 的学生第二天会到楼上食堂用餐，则一学期后，在楼上食堂用餐的学生数大约为（ ）

- A. 700 B. 800 C. 900 D. 1000

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意，列出方程，代入计算，即可得到结果.

【详解】设一学期后，在楼上食堂用餐的学生数大约为 x ，

则楼上食堂用餐的学生数大约为 $1500 - x$ ，

原本在楼上食堂且留下的学生：占比 $1 - 10\% = 90\%$ ，即 $0.9x$ ，

从楼下食堂转来的学生：楼下食堂人数的 15%，即 $0.15(1500 - x)$ ，

所以 $x = 0.9x + 0.15(1500 - x)$ ，解得 $x = 900$.

所以一学期后，在楼上食堂用餐的学生数大约为 900.

故选：C

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分，在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 某中学举行数学史知识竞赛，其中 6 个小组的比赛成绩分别为：70，85，89，75，96，89，则这组数据的（ ）

- A. 极差为 26 B. 中位数大于平均数 C. 方差为 472 D. 下四分位数为 75

【答案】ABD

【解析】

【分析】根据题意，由中位数，平均数以及方差的计算公式代入计算，即可得到结果.

【详解】将成绩从小到大排序为：70, 75, 85, 89, 89, 96，

极差为 $96 - 70 = 26$ ，故 A 正确；

中位数为 $\frac{85+89}{2} = 87$ ，

平均数为 $\frac{1}{6}(70+75+85+89+89+96) = 84$ ，故 B 正确；

方差为 $\frac{1}{6}[(70-84)^2 + (75-84)^2 + (85-84)^2 + (89-84)^2 + (89-84)^2 + (96-84)^2]$
 $= \frac{1}{6} \times 472 = \frac{472}{6}$ ，故 C 错误；

下四分位数位置 $6 \times 0.25 = 1.5$ ，即下四分位数是第二个数，即 75，故 D 正确；

故选：ABD

10. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$ ，其导函数为 $f'(x)$ ，则 ()

A. 直线 $y = -2x$ 是曲线 $y = f(x)$ 的切线

B. $f(x)$ 有三个零点

C. $f'(2-x) = f'(x)$

D. 若 $f(x)$ 在区间 $(a, a+4)$ 上有最大值，则 a 的取值范围为 $(-4, 0)$

【答案】BC

【解析】

【分析】对 $f(x)$ 求导，根据二次函数的性质计算判断 C，根据导函数求出函数的单调性及极值点 B；利用导函数求出导数值为 -2 即可确定过该点的切线方程，即判断 A；根据图象及函数有最大值列式计算即可判断 D.

【详解】因为 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$ ，则 $f'(x) = x^2 - 2x$ ，

$f'(2-x) = (2-x)^2 - 2(2-x) = (2-x)(-x) = x^2 - 2x$ ，所以 $f'(2-x) = f'(x)$ ，C 正确；

因为 $f'(x) = x^2 - 2x$ ，令 $f'(x) = 0$ ，得 $x^2 - 2x = 0$ ，解得 $x = 0$ 或 $x = 2$ ，

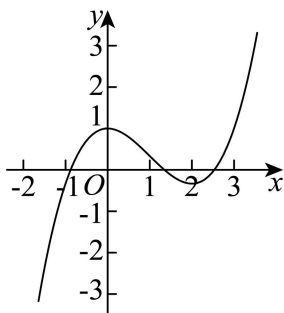
当 $x < 0$ 或 $x > 2$ 时， $f'(x) > 0$ ，当 $0 < x < 2$ 时， $f'(x) < 0$ ，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(2, +\infty)$ 上单调递增，在 $(0, 2)$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极大值，在 $x = 2$ 处取得极小值，

且 $f(0) = 1, f(2) = \frac{8}{3} - 4 + 1 = -\frac{1}{3}$ ， $x \rightarrow -\infty, f(x) \rightarrow -\infty, x \rightarrow +\infty, f(x) \rightarrow +\infty$ ，

$f(x)$ 图象如图所示:



故 $f(x)$ 有两个极值点, 三个零点, 故 B 正确;

设切点的坐标为 $\left(x_0, \frac{1}{3}x_0^3 - x_0^2 + 1\right)$, 则切线斜率为 $x_0^2 - 2x_0 = -2$,

则 $x_0^2 - 2x_0 + 2 = (x_0 - 1)^2 + 1 \neq 0$, 所以不存在斜率为 -2 的切线,

直线 $y = -2x$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的切线, 故 A 错误;

因为 $f(0) = 1 = f(3)$, 所以若 $f(x)$ 在区间 $(a, a+4)$ 上有最大值,

则 $\begin{cases} a < 0 \\ 0 < a+4 \leq 3 \end{cases}$, 所以 $-4 < a \leq -1$, 故 D 错误.

故选: BC.

11. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 点 P 满足 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD} + z\overrightarrow{AA_1}$, 其中 $x, y, z \in [0, 1]$,

则 ()

A. 当 $x = y, y \neq 0, z \neq 0$ 时, $B_1B \parallel$ 平面 ACP

B. 当 $x = y = z, z \neq 0$ 时, 异面直线 AP 与 BC 所成的角为 45°

C. 当 $x + y = 1, z = 0$ 时, $D_1P \perp A_1C_1$

D. 当 $x + y + z = 1$ 时, 线段 AP 的长度最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】ACD

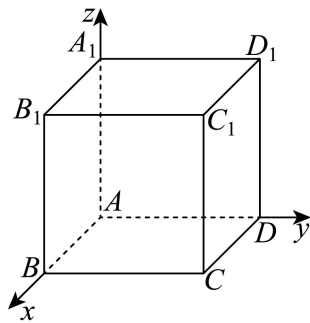
【解析】

【分析】以正方体一个顶点及三条棱建立空间直角坐标系, 得到点的坐标. A 选项由空间向量证明线面平行; B 选项由空间向量的夹角公式求得线线角; C 选项由空间向量的数量积为 0 证明线线垂直; D 选项由基本不等式求得 $\overrightarrow{AP}$ 的模长的最小值.

【详解】在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，以 A 为坐标原点， AB, AD, AA_1 分别为 x, y, z 如图建立空间直角坐标系。

$$A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,1,0), D(0,1,0),$$

$$A_1(0,0,1), B_1(1,0,1), C_1(1,1,1), D_1(0,1,1),$$



$$\therefore \overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD} + z\overrightarrow{AA_1}, \therefore P(x, y, z),$$

$$A \text{ 选项: } \overrightarrow{AP} = (x, x, z), \overrightarrow{CP} = (x-1, x-1, z), \overrightarrow{BD} = (-1, 1, 0),$$

$$\therefore \begin{cases} \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BD} = -x + x = 0 \\ \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{BD} = -x + 1 + x - 1 = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \overrightarrow{BD} \text{ 是平面 } ACP \text{ 的法向量,}$$

又 $\therefore \overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$, $\therefore BB_1 \parallel$ 平面 ACP , A 选项正确;

B 选项: 设 $x = y = z = a \neq 0$, 则 $\overrightarrow{AP} = (a, a, a)$, $\overrightarrow{BC} = (0, 1, 0)$, 设异面直线 AP 与 BC 所成的角为 α ,

$$\text{则 } \cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 显然 } \alpha \neq 45^\circ, \text{ B 选项错误;}$$

C 选项: 设 $x = a$, 则 $P(a, 1-a, 0)$, 即 $\overrightarrow{D_1P} = (a, -a, -1)$, $\overrightarrow{A_1C_1} = (1, 1, 0)$, 则 $\overrightarrow{D_1P} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = a - a = 0$,

$\therefore D_1P \perp A_1C_1$, C 选项正确;

D 选项: $|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\therefore x + y + z = 1$, 则 $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 1$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 + x^2 + y^2 + x^2 + z^2 + y^2 + z^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2) \text{ 即}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{1}{3}, \text{ 当且仅当 } x = y = z \text{ 时取等号,}$$

$$\therefore |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ D 选项正确.}$$

故选: ACD.

【点睛】方法点睛, 本题是立体几何中的动点产生的线线和线面的关系, 所以本题建立空间直角坐标系,

利用空间向量的坐标关系求得对称结果即可.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 请写出一个同时满足以下三个条件的函数 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

① $f(-x) + f(x) = 0$, ② $f(x + \pi) = f(x)$, ③ $f(x)$ 不是常数函数.

【答案】 $\tan x$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】 分析各个条件，写出符合要求的三角函数即可

【详解】 分析函数的性质，

条件① $f(-x) + f(x) = 0$ ，函数 $f(x)$ 为奇函数，

条件② $f(x + \pi) = f(x)$ ，函数 $f(x)$ 周期为 π ，

可考虑三角函数，函数解析式可以为 $f(x) = \tan x$ (答案不唯一).

故答案为: $\tan x$ (答案不唯一).

13. 已知抛物线 $C_1: x^2 = 4y$, $C_2: x^2 = -8y$ 的焦点分别为 F_1, F_2 ，一条平行于 y 轴的直线分别与 C_1, C_2 交于 A, B 两点. 若 $|AF_1| = |BF_2|$ ，则四边形 AF_1F_2B 的周长为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 12

【解析】

【分析】 根据题意，由抛物线的焦半径公式结合抛物线方程代入计算，即可得到 A, B 的纵坐标，即可得到结果.

【详解】 设 $A(x_1, y_1)$ ，则 $B(x_1, y_2)$ ，将 A, B 坐标分别代入 C_1, C_2 ，

可得 $\begin{cases} x_1^2 = 4y_1 \\ x_1^2 = -8y_2 \end{cases}$ ，即 $4y_1 = -8y_2$ ，所以 $y_1 = -2y_2$ ，

由焦半径公式可得 $|AF_1| = y_1 + 1$ ， $|BF_2| = 2 - y_2$ ，

由 $|AF_1| = |BF_2|$ 可得 $y_1 + 1 = 2 - y_2$ ，即 $y_1 + y_2 = 1$ ，所以 $\begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -1 \end{cases}$ ，

所以 $|AF_1| = |BF_2| = 3$ ，

又 $F_1(0, 1), F_2(0, -2)$ ，则 $|F_1F_2| = 3$ ，

$$|AB| = |y_1 - y_2| = 3,$$

所以四边形 AF_1F_2B 的周长为 $|AF_1| + |BF_2| + |F_1F_2| + |AB| = 3 \times 4 = 12$.

故答案为：12

14. 在一个不透明的袋子中装有 4 个形状大小相同，颜色互不相同的小球. 某人先后两次任意摸取小球（每次至少摸取 1 个小球），第一次摸取后记下摸到的小球颜色，再将摸到的小球放回袋中；第二次摸取后，也记下摸到的小球颜色. 则“两次记下的 4 种颜色，且恰有一种颜色两次都被记下”的概率为 _____.

【答案】 $\frac{32}{225}$

【解析】

【分析】应用分步乘法原理及分类加法原理结合组合数的运算，最后结合古典概型计算求解.

【详解】某人先后两次任意摸取小球，每次至少摸取 1 个小球，则每次摸球的情况有

$$C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 4 + 6 + 4 + 1 = 15 \text{ 种};$$

所以先后两次任意摸取小球共有 $15 \times 15 = 225$ 种情况；

两次记下的 4 种颜色，且恰有一种颜色两次都被记下的情况有：

第一次摸取 1 个球，第二次摸取 4 个球，情况共有 $C_4^1 \times C_4^4 = 4$ 种；

第一次摸取 2 个球，第二次摸取 3 个球，情况共有 $C_4^2 \times C_4^3 = 12$ 种；

第一次摸取 3 个球，第二次摸取 2 个球，情况共有 $C_4^3 \times C_4^2 = 12$ 种；

第一次摸取 4 个球，第二次摸取 1 个球，情况共有 $C_4^4 \times C_4^1 = 4$ 种；

所以两次记下的 4 种颜色，且恰有一种颜色两次都被记下的概率为 $\frac{4 + 12 + 12 + 4}{225} = \frac{32}{225}$.

故答案为： $\frac{32}{225}$.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且 $2b \cos C = 2a + \sqrt{2}c$.

(1) 求 B ；

(2) 若 $b = \sqrt{13}$ ， $c = 2\sqrt{2}$ ， D 为 AC 的中点，求 BD .

【答案】 (1) $B = \frac{3\pi}{4}$

(2) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

【解析】

【分析】(1) 根据余弦定理或正弦定理进行边角转化，可求角 B 。

(2) 法一：在 $\triangle ABC$ 中，利用余弦定理，先求边 a 与 $\cos C$ ，再在 $\triangle BCD$ 中利用余弦定理求 BD 。

法二：利用 $\angle BDC + \angle BDA = \pi$ ，在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle BCD$ 中利用余弦定理列式，可求 BD 的值。

法三：在 $\triangle ABC$ 中，利用余弦定理，先求边 a ，再利用 $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$ ，结合平面向量数量积的有关运算，可求 BD 的值。

【小问 1 详解】

法一：因为 $2b\cos C = 2a + \sqrt{2}c$ ，由余弦定理： $2b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 2a + \sqrt{2}c$ ，

得： $a^2 + c^2 - b^2 = -\sqrt{2}ac$ ，则 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，因为 $B \in (0, \pi)$ ，所以 $B = \frac{3\pi}{4}$ 。

法二：因为 $2b\cos C = 2a + \sqrt{2}c$ ，由正弦定理得：

$$2\sin B \cos C = 2\sin A + \sqrt{2}\sin C, \quad 2\sin B \cos C = 2\sin[\pi - (B + C)] + \sqrt{2}\sin C,$$

$$2\sin B \cos C = 2\sin B \cos C + 2\cos B \sin C + \sqrt{2}\sin C, \quad 2\cos B \sin C = -\sqrt{2}\sin C,$$

因为 $\sin C > 0$ ，所以 $\cos B = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，因为 $B \in (0, \pi)$ ，所以 $B = \frac{3\pi}{4}$ 。

【小问 2 详解】

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得： $(\sqrt{13})^2 = a^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \cdot a \times (2\sqrt{2}) \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ，

得： $a = 1$ ，

$$\text{法一：} \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1 + 13 - 8}{2 \times 1 \times \sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13},$$

在 $\triangle CBD$ 中，由余弦定理得： $BD^2 = 1 + \frac{13}{4} - 2 \times 1 \times \frac{\sqrt{13}}{2} \times \frac{3\sqrt{13}}{13} = \frac{5}{4}$ ，得： $BD = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 。

法二：因为 $\angle BDC + \angle BDA = \pi$ ，所以 $\cos \angle BDC + \cos \angle BDA = 0$ ，

$$\text{所以 } \frac{BD^2 + CD^2 - CB^2}{2BD \cdot CD} + \frac{BD^2 + AD^2 - AB^2}{2BD \cdot AD} = 0,$$

$$\text{所以 } \frac{BD^2 + \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 - 1^2}{2BD \cdot \frac{\sqrt{13}}{2}} + \frac{BD^2 + \left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 - (2\sqrt{2})^2}{2BD \cdot \frac{\sqrt{13}}{2}} = 0, \text{ 解得: } BD = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

法三: 因为 $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$, 所以 $\overrightarrow{BD}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC})$,

$$\overrightarrow{BD}^2 = \frac{1}{4}\left[8 + 1 + 2 \times 2\sqrt{2} \times 1 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right], \text{ 所以 } BD = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

16. 在① $S_n = n^2 - 2^n$; ② $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n}$; ③ $2\sqrt{S_n} - 1 = a_n$ 这三个条件中, 请选择一个合适的条件, 补充在下题横线上(只要写序号), 并解答该题.

已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 其前 n 项和为 S_n , 且对任意正整数 n , 有_____.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{a_{n+1}}{S_n \cdot S_{n+1}}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 证明: $\frac{3}{4} \leq T_n < 1$.

【答案】(1) 答案见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 条件①不符合题意. 如果选条件②, 则可根据 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ 及条件②, 得到 $\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n} = 1$, 从而可判断 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列, 求得 $\sqrt{S_n}$ 的通项公式, 进而得到 S_n 的通项公式, 最后得到 a_n 的通项公式.

如果选条件③, 可直接得到 S_n 与 a_n 的关系, 进而可得到 a_n 的通项公式.

(2) 由已知条件, 可求得 b_n 的通项公式, 从而得到 T_n 的表达式, 即可证明 $\frac{3}{4} \leq T_n < 1$.

【小问 1 详解】

对于条件①, 当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 1^2 - 2 = -1 < 0$, 不符合题意. (如果选条件①, 不得分)

如选②: $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n}, S_{n+1} - S_n = \sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n}$,

$$(\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n})(\sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n}) = \sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n}, \quad \sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n} = 1,$$

则 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是公差为 1 的等差数列,

则 $\sqrt{S_n} = \sqrt{S_1} + (n-1) \times 1 = n$, 则 $S_n = n^2$.

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2n - 1$,

当 $n = 1$ 时, $a_1 = 1$ 满足上式.

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n - 1$.

如选③: 因为 $2\sqrt{S_n} = a_n + 1$, 则 $S_n = \frac{(a_n + 1)^2}{2}$,

当 $n = 1$ 时, $2\sqrt{a_1} - 1 = a_1$, 解得: $a_1 = 1$.

当 $n \geq 2$ 时, $S_n - S_{n-1} = a_n = \frac{(a_n + 1)^2}{2} - \frac{(a_{n-1} + 1)^2}{2}$,

即 $(a_n - a_{n-1} - 2)(a_n + a_{n-1}) = 0$, 因为 $a_n > 0$, 所以 $a_n - a_{n-1} = 2$,

则 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公差为 2 的等差数列,

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n - 1$.

【小问 2 详解】

因为 $b_n = \frac{a_{n+1}}{S_n \cdot S_{n+1}} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$,

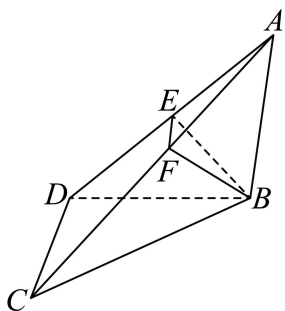
$T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$.

因为 $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$, 且在 $x > 0$ 时单调减小,

所以 $T_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 1$, 且 T_n 在 $n > 0$ 时单调增加, 并在 $n = 1$ 时取最小值 $\frac{3}{4}$,

所以 $\frac{3}{4} \leq T_n < 1$.

17. 如图, 在四面体 $ABCD$ 中, $AB = BD = 2$, $\angle ADC = \angle BDC = 90^\circ$, 点 E 为棱 AD 的中点, 点 F 为棱 AC 上的动点.



(1) 求证：平面 $ACD \perp$ 平面 BEF ；

(2) 已知二面角 $A-DC-B$ 的大小为 30° ，当直线 BF 与平面 ACD 所成角的正弦值的最大值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ 时，

求此时四面体 $ABEF$ 的体积.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

【解析】

【分析】(1) 根据给定条件，利用线面垂直的判定、性质，面面垂直的判定推理得证.

(2) 由 (1) 可得 $\angle ADB = 30^\circ$ ，再结合已知确定点 F 位置，进而求出四面体 $ABEF$ 的相关元素并求出体积.

【小问 1 详解】

由 $\angle ADC = 90^\circ, \angle BDC = 90^\circ$ ，得 $DC \perp AD, DC \perp BD$ ，

又 $AD \cap BD = D, AD, BD \subset$ 平面 ABD ，则 $DC \perp$ 平面 ABD ，

而 $BE \subset$ 平面 ABD ，于是 $DC \perp BE$ ，由 E 为 AB 中点， $AB = BD$ ，得 $BE \perp AD$ ，

又 $AD \cap CD = D, AD, CD \subset$ 平面 ACD ，因此 $BE \perp$ 面 ACD ，又 $BE \subset$ 平面 BEF ，

所以平面 $ADC \perp$ 平面 BEF .

【小问 2 详解】

由 (1) 知，二面角 $A-CD-B$ 的平面角为 $\angle ADB$ ，则 $\angle ADB = 30^\circ$ ，

由 $BE \perp$ 平面 ACD ，得 $\angle BFE$ 为 BF 与平面 ACD 所成的角，

在 $\text{Rt}\triangle BED$ 中， $BD = 2$ ，则 $DE = \sqrt{3}, BE = 1$ ， $\sin \angle BFE = \frac{BE}{BF} = \frac{1}{BF}$ ，

而 $(\sin \angle BFE)_{\max} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ ，则 $BF_{\min} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ ，此时 $BF \perp AC$ ，

由 $BE \perp$ 平面 ACD , $AC \subset$ 平面 ACD , 得 $BE \perp AC$, 而 $BE \cap BF = B, BE, BF \subset$ 平面 BEF ,

则 $AC \perp$ 平面 BEF , 又 $EF \subset$ 平面 BEF , 于是 $EF \perp AC$,

在 $Rt\triangle AEF$ 中, $EF = \sqrt{BF^2 - BE^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $AF = \sqrt{AB^2 - BF^2} = \frac{3}{2}$, 则 $S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} AF \cdot EF = \frac{3\sqrt{3}}{8}$,

所以四面体 $ABEF$ 的体积 $V_{B-AEF} = \frac{1}{3} S_{\triangle AEF} \cdot BE = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{8} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

18. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右顶点 A 到其渐近线的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 点 $B(2, 1)$ 在 C 的渐近线上, 过 B 的直线 l 与 C 交于 P, Q 两点, 直线 AP, AQ 分别与 y 轴交于 M, N 两点.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若 $\triangle APQ$ 的面积为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$, 求 l 的方程;

(3) 证明: 线段 MN 的中点为定点.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

(2) $x + y - 3 = 0$

(3) 证明见解析

【解析】

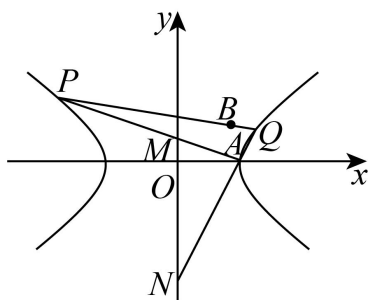
【分析】(1) 由顶点到渐近线距离建立方程解得 a, b 的值, 从而得到曲线方程;

(2) 设直线方程, 联立方程组得到一元二次方程, 设交点坐标, 由韦达定理得到根与系数的关系, 由三角形面积建立方程得到 k 的值, 从而得到直线方程;

(3) 设 M, N 坐标, 然后得到直线 AM 方程, 联立方程组得到一元二次方程, 由韦达定理得到 P 点坐标, 同理求得 Q 点坐标. 从而得到 $\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{QB}$, 由向量共线建立等式, 从而得到 M, N 点纵坐标的关系, 即可得证.

【小问 1 详解】

因为 C 的一条渐近线方程为 $bx - ay = 0, A(a, 0)$,



A 到渐近线的距离为 $d = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$,

过 $B(2,1)$ 得 $2b-a=0$,

解得: $a=2, b=1$,

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ ①.

【小问 2 详解】

显然直线 l 的斜率存在, 设 l 的方程为 $y=k(x-2)+1$ ②,

①②联立得: $\left(\frac{1}{4}-k^2\right)x^2 - (2k-4k^2)x - 4k^2+4k-2=0$.

则有 $\frac{1}{4}-k^2 \neq 0$ ③, $\Delta = (2k-4k^2)^2 - 4\left(\frac{1}{4}-k^2\right)(-4k^2+4k-2) = 2-4k > 0$ ④,

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

则 $x_1+x_2 = \frac{2k-4k^2}{\frac{1}{4}-k^2}$ ⑤, $x_1x_2 = \frac{-4k^2+4k-2}{\frac{1}{4}-k^2}$ ⑥,

把⑤⑥代入: $|x_2-x_1| = \sqrt{(x_2+x_1)^2 - 4x_1x_2} = \frac{4\sqrt{2-4k}}{|1-4k^2|}$,

所以 $S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} \times |AB| \times |x_2-x_1| = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{4\sqrt{2-4k}}{|1-4k^2|} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$,

得: $(k+1)(4k^2-2k+1)=0$, 解得: $k=-1$.

满足③④式, 则直线 l 的方程为 $x+y-3=0$.

【小问 3 详解】

设 $M(0, m), N(0, n)$, 不妨设 $m > n$. 则直线 $AM: y = -\frac{m}{2}(x-2)$ ⑦,

联立①⑦得: $(1-m^2)x^2 + 4m^2x - 4m^2 - 4 = 0$,

$$\text{则 } \Delta = (4m^2)^2 + 4(1-m^2)(4m^2+4) = 16, \quad x_A x_P = \frac{4(m^2+1)}{m^2-1}$$

$$\text{则 } x_P = \frac{2(m^2+1)}{m^2-1}, y_P = \frac{-2m}{m^2-1};$$

$$\text{同理: } x_Q = \frac{2(n^2+1)}{n^2-1}, y_Q = \frac{-2n}{n^2-1}.$$

$$\text{而 } \overrightarrow{PB} = \left(2 - \frac{2(m^2+1)}{m^2-1}, 1 - \frac{-2m}{m^2-1} \right), \quad \overrightarrow{QB} = \left(2 - \frac{2(n^2+1)}{n^2-1}, 1 - \frac{-2n}{n^2-1} \right),$$

又 P, B, Q 三点共线, 则有 $\overrightarrow{PB} // \overrightarrow{QB}$,

$$\text{则 } \left(2 - \frac{2(m^2+1)}{m^2-1} \right) \left(1 - \frac{-2n}{n^2-1} \right) = \left(2 - \frac{2(n^2+1)}{n^2-1} \right) \left(1 - \frac{-2m}{m^2-1} \right),$$

得: $m + n + 2 = 0$,

所以 MN 的中点为定点 $(0, -1)$.

【点睛】技巧点睛, 三角形在直角坐标的面积可以用铅锤高乘水平宽来表示, 例如本题中

$$S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} \times |AB| \times |x_2 - x_1| \quad (|x_2 - x_1| \text{ 表示点 } P, Q \text{ 的水平宽}).$$

19. 我们把 $d = b - a (a < b)$ 称为区间 $[a, b]$ 的长度. 若函数 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数, 且存在

$[a, b] \subseteq I$, 使得 $\{f(x) | x \in [a, b]\} = [a, b]$, 则称 $[a, b]$ 为 $f(x)$ 的自映射区间. 已知函数

$$f(x) = x - \sin x (x \in I), \quad g(x) = m \ln x (m > 0).$$

(1) 若 $I = [-10, 10]$, 任取 $f(x)$ 的一个自映射区间, 求其区间的长度 $d > \pi$ 的概率;

(2) 若 $g(x)$ 存在自映射区间 $[a, b]$,

①求 m 的取值范围;

②求证: $ab > e^2$, 且 $[a, b]$ 的长度 $d > 2\sqrt{m^2 - em}$.

【答案】(1) $\frac{5}{7}$

(2) ① $(e, +\infty)$; ②证明见解析.

【解析】

【分析】(1) 根据题意，由自映射区间定义结合古典概型的概率公式代入计算，即可得到结果；

(2) ①由自映射区间定义，结合函数的单调性，将问题转化为函数至少存在两个零点问题，然后结合导数，代入计算，即可得到结果；②构造函数，利用导数研究函数的单调性，即可证明不等式.

【小问 1 详解】

因为 $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ 恒成立，则 $f(x)$ 在 I 上单调递增，

若 $f(x)$ 存在自映射区间 $[a, b]$ ，则 $f(a) = a, f(b) = b$ ，

即方程 $f(x) = x$ ，即 $\sin x = 0 (x \in [-10, 10])$ 至少有两个不同实数解.

则 x 的解集为 $\{-3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi\}$ ，所以区间 $[a, b]$ 的选择共有 C_7^2 种.

若 $d = \pi$ ，共有 6 种选择，

所以区间的长度 $d > \pi$ 的概率为 $1 - \frac{6}{C_7^2} = \frac{5}{7}$.

【小问 2 详解】

①因为 $m > 0$ ， $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

若 $g(x)$ 存在自映射区间 $[a, b]$ ，则 $g(a) = a, g(b) = b$ ，

即 $h(x) = m \ln x - x$ 至少有两个零点，

因为 $h'(x) = \frac{m-x}{x}$ ， $x \in (0, m)$ 时， $h'(x) > 0$ ， $h(x)$ 单调递增；

$x \in (m, +\infty)$ 时， $h'(x) < 0$ ， $h(x)$ 单调递减；

若要存在两个零点，则 $h_{\max}(x) = h(m) = m \ln m - m > 0$ ，即 $m > e$.

此时 $h(1) = -1 < 0$ ， $\exists a \in (1, m)$ ，使得 $h(a) = 0$.

因为当 $x \in (e, +\infty)$ 时， $(2 \ln x - x)' = \frac{2-x}{x} < 0$ ，即函数 $y = 2 \ln x - x$ 单调递减，

所以 $2 \ln x - x < 2 - e < 0$ ，又 $m > e$ ，

所以 $h(m^2) = 2m \ln m - m^2 = m(2 \ln m - m) < 0$ ，则 $\exists b \in (m, m^2)$ ，使得 $h(b) = 0$.

所以 m 的取值范围为 $(e, +\infty)$.

②因为 $m \ln a - a = 0, m \ln b - b = 0$ ，所以 $\frac{b-a}{\ln b - \ln a} = \frac{b+a}{\ln b + \ln a} = m$ ，

下证： $\frac{a+b}{2} > \frac{b-a}{\ln b - \ln a}$ 。记 $l(x) = \ln x - 2 \frac{x-1}{x+1} (x > 1)$ ，

$$\text{则 } l'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} > 0,$$

则 $l(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增，则 $l(x) > l(1) = 0$ ，即 $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$ ，

$$\text{即 } \ln \frac{b}{a} > 2 \frac{\frac{b}{a} - 1}{\frac{b}{a} + 1}, \text{ 所以 } \frac{a+b}{2} > \frac{b-a}{\ln b - \ln a} = \frac{b+a}{\ln b + \ln a}.$$

所以 $\ln a + \ln b = \ln(ab) > 2$ ，所以 $ab > e^2$ 。

$$\text{记 } s(x) = \ln x + \frac{e}{x} - 2, \text{ 则 } s'(x) = \frac{1}{x} - \frac{e}{x^2} = \frac{x-e}{x^2},$$

$x \in (0, e)$ 时， $s'(x) < 0, s(x)$ 单调递减； $x \in (e, +\infty)$ 时， $s'(x) > 0, s(x)$ 单调递增；

$$\text{所以 } s(x) > s(e) = 0, \text{ 即 } \ln x > 2 - \frac{e}{x},$$

$$\text{则 } \frac{1}{m} a = \ln a > 2 - \frac{e}{a}, \text{ 即 } \frac{1}{m} a^2 - 2a + e > 0, \text{ 同理 } \frac{1}{m} b^2 - 2b + e > 0$$

因为函数 $t(x) = \frac{1}{m} x^2 - 2x + e$ 的 $\Delta = 4 - 4 \frac{e}{m} > 0$ ，且对称轴为 $x = m$ ，

则方程 $t(x) = 0$ 存在两根 $x_1, x_2 (x_1 < m < x_2)$ ，且 $x_2 - x_1 = 2\sqrt{m^2 - em}$ ，

又 $a < m < b$ ，且 $t(a) > 0, t(b) > 0$ ，所以 $a < x_1 < m < x_2 < b$ ，

$$\text{则 } b - a > x_2 - x_1 = 2\sqrt{m^2 - em},$$

所以区间 $[a, b]$ 的长度 $d > 2\sqrt{m^2 - em}$ 。

【点睛】 关键点睛：本题主要考查了新定义问题与导数的综合应用，难度较大，解答本题的关键在于理解所给的定义，然后结合导数的知识解答。