

2023~2024 学年第一学期末学业质量监测试卷

高一数学

注意事项

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求

1. 本试卷共 4 页, 满分 150 分, 考试时间为 120 分钟. 考试结束后, 请将答题卷交回.
2. 答题前, 请您务必将自己的姓名、准考证号、座位号用 0.5 毫米黑色字迹签字笔填写在答题卷上.
3. 请监考员认真核对在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、考试证号与你本人的是否相符.
4. 作答选择题必须用 2B 铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 请用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案. 作答非选择题必须用书写黑色字迹的 0.5 毫米的签字笔写在答题卷上的指定位置, 在其它位置作答一律无效.

一、选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | x = 2k - 1, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{-1, 1\}$ B. $\{1\}$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{-1, 0, 1\}$

2. 命题: “ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x \leq 0$ ”的否定是 ()

- A. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x \leq 0$ B. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x \geq 0$
C. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x > 0$ D. $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x > 0$

3. 若 α 的终边与 $-\frac{\pi}{6}$ 的终边垂直, 且 $0 < \alpha < \pi$, 则 $\cos \alpha =$ ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 已知某种放射性元素在一升液体中的放射量 c (单位: Bq/L) 与时间 t (单位: 年) 近似满足关系式

$c = k \cdot a^{-\frac{t}{12}} (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$. 已知当 $t = 12$ 时, $c = 100$; 当 $t = 36$ 时, $c = 25$, 则据此估计, 这种放射性元素在一升液体中的放射量 c 为 10 时, t 大约为 () (参考数据: $\log_2 5 \approx 2.32$)

- A. 50 B. 52 C. 54 D. 56

5. 函数 $y = |x - 2| + |2x - 2|$ 的最小值为 ()

- A. 0 B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

6. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的图象不间断, 则“ $\forall x \in (0, +\infty), f(x) > f(0)$ ”是“ $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数”的 ()

- A. 充要条件 B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 已知 $a = \sin 1, b = \cos 1, c = \tan 1, d = 1$, 则 ()

- A. $a < b < c < d$ B. $a < b < d < c$
C. $b < a < c < d$ D. $b < a < d < c$

8. 已知函数 $y = f(x) + x^2$ 为偶函数, $y = f(x) - 2^x$ 为奇函数, 则 $f(\log_2 3) =$ ()

- A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{9}{8}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 3

二、多选题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 函数 $y = \lg x - \frac{1}{2}x + 1$ 的零点所在的区间为 ()

- A. (0,1) B. (1,2) C. (2,3) D. (3,4)

10. 已知 $x > 0$, 则 ()

- A. $x(2-x)$ 的最大值为 1 B. $3-x-\frac{1}{x}$ 的最大值为 1
C. $\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$ 的最小值为 2 D. $x+\frac{4}{x+1}$ 的最小值为 3

11. 将函数 $y = \cos 2x$ 的图象沿 x 轴向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 再向上平移 $\frac{1}{2}$ 个单位长度, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 则 ()

- A. 函数 $y = g(x)$ 的最小正周期为 π
B. $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增
C. $g(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{3\pi}{4}$ 对称
D. $g(x)$ 的图象关于点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 中心对称

12. 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足: ①当 $x < 0$ 时, $f(x) < 1$; ② $f(x) + f(y) = f(x+y) + 1$, 则 ()

- A. $f(0)=1$ B. $f(x)$ 为减函数
C. $f(x)+f(-x)=2$ D. $f(2^x)+f(2^{-x})\geq 2f(1)$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，

13. 已知扇形的圆心角为 $\frac{\pi}{3}$ ，且弧长为 π ，则该扇形的面积为_____.
14. 试写出一个实数 $a =$ _____，使得函数 $f(x) = ax^2 + 4x - 1$ 在 $(-1, 1)$ 上恰有一个零点.
15. 设函数 $y = 3\sin x$ 与 $y = \tan x$ 在区间 $(0, \pi)$ 上的图象交于点 P ，过点 P 作 x 轴的垂线 l ，垂足为 H ，直线 l 与函数 $y = \cos x$ 的图象交与点 Q ，则线段 QH 的长为_____.
16. 已知正数 a, b 满足 $ae^a = b\ln b$ ，则 $\frac{\ln b}{a} + \frac{e^a}{b} =$ _____.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

- (1) 化简： $\cos x \sqrt{1 + \tan^2 x}$ ；
- (2) 若 $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$ ，求 $\frac{1}{\tan x} - \tan x$ 的值.

18. 设 $k \in \mathbf{R}$ ，集合 $A = \{k \mid \text{关于 } x \text{ 的方程 } x^2 + kx + k + 3 = 0 \text{ 无实根}\}$, $B = \{k \mid 2k^2 - ak - 2a \geq 0\}$.

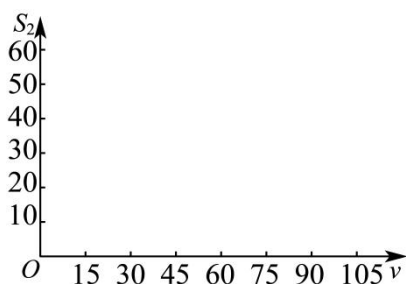
- (1) 若 $a = 2$ ，求 $A \cup B$ ；
- (2) 若“ $k \in A$ ”是“ $k \in B$ ”的充分条件，求实数 a 的取值范围.

19. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的最小正周期为 π , $P(-\frac{\pi}{6}, -2)$ 是 $f(x)$ 的图象上的一个最低点.

- (1) 求 A, ω, φ ；
- (2) 若 $f(\alpha) = \frac{6}{5}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ ，求 $\cos(2\alpha + \frac{5\pi}{6}) + \cos(\frac{2\pi}{3} - 2\alpha)$ 的值.

20. 汽车驾驶员发现前方有障碍物时会紧急刹车，这一过程中，由于人的反应需要时间，在汽车的惯性作用下会有一个停车距离.记驾驶员的停车距离为 S (单位：m)，驾驶员反应时间内汽车所行距离为 S_1 (单位 m)，刹车距离为 S_2 (单位 m)，则 $S = S_1 + S_2$ ，其中 S_1 与刹车时的车速 v (单位，km/h) 满足 $S_1 = \frac{1}{15}v$, S_2 与刹车时的车速 v 的部分关系见下表：

v	15	30	60	105
S_2	1.25	5	20	61.25



(1) 在坐标平面内画出 (v, S_2) 的散点图, 从① $S_2 = a \cdot 2^v$; ② $S_2 = av^2$; ③ $S_2 = a \log_2(v+1)$ 中选择最恰当的一个函数模型拟合 S_2 与 v 之间的关系, 并求出其解析式;

(2) 在限速 100km/h 的高速公路上, 驾驶员遇障碍物紧急刹车, 已知驾驶员的停车距离为 51m , 请根据 (1) 中所求的解析式, 判断驾驶员是否超速行驶.

21. 已知函数 $f(x) = (x+a) \ln \left(\frac{x+1}{x} \right)$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $f(x) = f(-1-x)$ 恒成立, 求 a ;

(2) 若 $a = 0$, $f(x) = \ln t$, $f(x) + \frac{1}{x} f(x) = \ln s$, 试比较 s^t 与 t^s 的大小, 并证明.

22. 已知函数 $f(x) = |e^x - a| + |e^{-x} + a|$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $a = 0$, 证明: $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

(2) 求 $f(x)$ 的最小值.