2023~2024 学年第一学期末学业质量监测试卷

高一数学

注意事项

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求

1.本试卷共 4 页，满分 150 分，考试时间为 120 分钟.考试结束后，请将答题卷交回.

2.答题前，请您务必将自己的姓名、准考证号、座位号用 0.5 毫米黑色字迹签字笔填写在答题卷上.

3.请监考员认真核对在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、考试证号与你本人的是否相符.

4.作答选择题必须用 2B 铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其它答案.作答非选择题必须用书写黑色字迹的 0.5 毫米的签字笔写在答题卷上的指定位置，在其它位置作答一律无效.

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|\ x=2k-1,k\in \mathbf{Z}\},B=\{-1,0,1\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{-1,1\}$　　B. $\{1\}$　　C. $\{0,1\}$　　D. $\{-1,0,1\}$

【答案】A

【解析】

【分析】由奇数集合以及交集的概念即可得解.

【详解】由题意集合 A 是奇数集合，所以 $A\cap B=\{-1,1\}$.

故选：A.

2. 命题：“$\exists x\in \mathrm{R},x^2+2x\le 0$”的否定是（　　）

A. $\forall x\in \mathbf{R},x^2+2x\le 0$　　B. $\exists x\in \mathbf{R},x^2+2x\ge 0$

C. $\forall x\in \mathbf{R},x^2+2x>0$　　D. $\exists x\in \mathbf{R},x^2+2x>0$

【答案】C

【解析】

【分析】根据含有一个量词的命题的否定，即可得答案.

【详解】命题：“$\exists x\in \mathbf{R},x^2+2x\le 0$”为存在量词命题，

它的否定是 $\forall x\in\mathbf{R},x^2+2x>0$，

故选：C

3. 若 α 的终边与 $-\frac{\pi}{6}$ 的终边垂直，且 $0<\alpha<\pi$，则 $\cos\alpha=$（　　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】B

【解析】

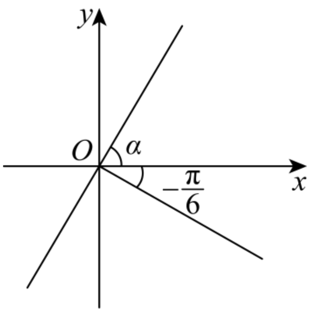
【分析】根据三角函数的定义可得答案.

【详解】因为 α 的终边与 $-\frac{\pi}{6}$ 的终边垂直，且 $0<\alpha<\pi$，

所以 $\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$，

则 $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

故选：B.



4. 已知某种放射性元素在一升液体中的放射量 c（单位：$\mathrm{Bq/L}$）与时间 t（单位：年）近似满足关系式 $c=k\cdot a^{-\frac{t}{12}}(a>0$ 且 $a\neq1)$.已知当 $t=12$ 时，$c=100$；当 $t=36$ 时，$c=25$，则据此估计，这种放射性元素在一升液体中的放射量 c 为 10 时，t 大约为（　　）（参考数据：$\log_2 5\approx2.32$）

A. 50　　B. 52　　C. 54　　D. 56

【答案】B

【解析】

【分析】根据已知列方程组先求出 k,a 的值，然后利用对数运算可得.

【详解】由题知，$\begin{cases}k\cdot a^{-\frac{12}{12}}=100\\ k\cdot a^{-\frac{36}{12}}=25\end{cases}$，解得 $k=200,a=2$，

所以 $c=200\times 2^{-\frac{t}{12}}$，

由 $200\times 2^{-\frac{t}{12}}=10$，得 $t=12\log_2 20=12\left(2+\log_2 5\right)\approx 52$.

故选：B

5. 函数 $y=\left|x-2\right|+\left|2x-2\right|$ 的最小值为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 2

【答案】B

【解析】

【分析】去掉绝对值得到分段函数，结合函数单调性得到最小值.

【详解】$y=\left|x-2\right|+\left|2x-2\right|=\begin{cases}4-3x, x<1\\ x, 1\le x\le 2\\ 3x-4, x>2\end{cases}$，

由于 $y=4-3x$ 在 $\left(-\infty,1\right)$ 上单调递减，$y=x$ 在 $\left[1,2\right]$ 上单调递增，

$y=3x-4$ 在 $\left(2,+\infty\right)$ 上单调递增，

又 $4-3\times 1=1, 3\times 2-4=2$，即分段处端点值相等，

故 $y=\left|x-2\right|+\left|2x-2\right|$ 在 $x=1$ 处取得最小值，最小值为 $4-3\times 1=1$.

故选：B

6. 已知函数 $f\left(x\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的图象不间断，则“$\forall x\in\left(0,+\infty\right), f\left(x\right)>f\left(0\right)$”是“$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上是增函数”的（　　）

A. 充要条件　　B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【解析】

【分析】根据充分必要条件的定义可判断.

【详解】若 $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-1, x\le 2\\ \frac{1}{x}, x>2\end{cases}$，显然满足 $\forall x\in\left(0,+\infty\right)$，$f\left(x\right)>f\left(0\right)$，但 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上不是增函数；

若 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上是增函数，则 $\forall x\in\left(0,+\infty\right)$，$f\left(x\right)>f\left(0\right)$，

所以 $\forall x\in(0,+\infty)$，$f(x)>f(0)$ 是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数的必要不充分条件.

故选：C

7. 已知 $a=\sin1,b=\cos1,c=\tan1,d=1$，则（　　）

A. $a<b<c<d$　　　　B. $a<b<d<c$

C. $b<a<c<d$　　　　D. $b<a<d<c$

【答案】D

【解析】

【分析】利用正弦函数、余弦函数、正切函数的单调性比较即可.

【详解】因为 $y=\sin x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，$y=\cos x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，

$y=\tan x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增，

所以 $1=\sin\frac{\pi}{2}>\sin1>\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos1<\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan1>\tan\frac{\pi}{4}=1$，

所以 $b<a<d<c$.

故选：D

8. 已知函数 $y=f(x)+x^2$ 为偶函数，$y=f(x)-2^x$ 为奇函数，则 $f(\log_2 3)=$（　　）

A. $\frac{5}{3}$　　　　B. $\frac{9}{8}$　　　　C. $\frac{3}{2}$　　　　D. 3

【答案】A

【解析】

【分析】根据给定条件，利用奇偶函数的定义求出 $f(x)$ 的解析式，再代入求出函数值即得.

【详解】由函数 $y=f(x)+x^2$ 为偶函数，得 $f(-x)+(-x)^2=f(x)+x^2$，则 $f(-x)=f(x)$，

由函数 $y=f(x)-2^x$ 为奇函数，得 $f(-x)-2^{-x}=-[f(x)-2^x]$，

因此 $f(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2}$，所以 $f(\log_2 3)=\frac{2^{\log_2 3}+2^{-\log_2 3}}{2}=\frac{3+\frac{1}{3}}{2}=\frac{5}{3}$.

故选：A

【点睛】关键点睛：利用奇偶函数定义建议关于 $f(-x),f(x)$ 的方程组，借助方程思想求出函数解析式是解决本题的关键.

二、多选题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 函数 $y=\lg x-\frac{1}{2}x+1$ 的零点所在的区间为（　　）

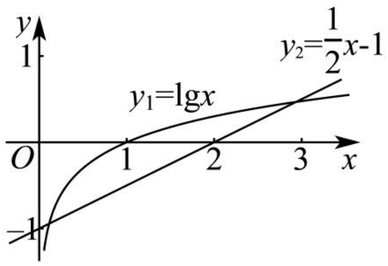
A. $(0,1)$　　B. $(1,2)$　　C. $(2,3)$　　D. $(3,4)$

【答案】AC

【解析】

【分析】把求函数零点问题转化为求函数 $y_1=\lg x(x>0)$ 与函数 $y_2=\frac{1}{2}x-1$ 交点问题即可.

【详解】



求函数 $y=\lg x-\frac{1}{2}x+1$ 零点，令 $0=\lg x-\frac{1}{2}x+1$，即 $\lg x=\frac{1}{2}x-1$，

分别画出函数 $y_1=\lg x(x>0)$ 与函数 $y_2=\frac{1}{2}x-1$ 的图像，

得到两图像有两个公共点，由图像可知，$f(x)$ 有两个零点，

分别在区间 $(0,1)$ 和区间 $(2,3)$ 上；区间 $(0,1)$ 上的零点显而易见.

令 $f(x)=\lg x-\frac{1}{2}x+1$，$f(2)=\lg 2-\frac{1}{2}\cdot 2+1=\lg 2>0$，所以 $f(2)>0$，

$f(3)=\lg 3-\frac{1}{2}\times 3+1=\lg 3-\frac{1}{2}$，$\lg 3-\frac{1}{2}=\lg\sqrt{9}-\frac{1}{2}<\lg\sqrt{10}-\frac{1}{2}=0$，

所以 $f(3)<0$，所以 $f(2)\cdot f(3)<0$，根据零点存在性定理，$f(x)$ 在 $(2,3)$ 存在零点.

故选：AC

10. 已知 $x>0$，则（　　）

A. $x(2-x)$ 的最大值为 1　　B. $3-x-\frac{1}{x}$ 的最大值为 1

C. $\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$ 的最小值为 2　　D. $x+\frac{4}{x+1}$ 的最小值为 3

【答案】ABD

【解析】

【分析】合理对所给选项变形，构造基本不等式处理即可.

【详解】对于 A，令 $f(x)=x(2-x)=-x^2+2x$，由二次函数性质得当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得最大值，此时 $f(x)=f(1)=1$，故 A 正确，

对于 B，原式可化为 $3-x-\frac{1}{x}=3-(x+\frac{1}{x})$，而 $x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{1}=2$，当且仅当 $x=1$ 时取等，故 $3-x-\frac{1}{x}$ 的最大值 1，即 B 正确，

对于 C，令 $g(x)=\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}=\sqrt{x^2+4}+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\geq 2\sqrt{1}=2$，当且仅当 $\sqrt{x^2+4}=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ 时取等，但此时 x 不为实数，故无法取等号，即 $\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$ 的无法取到最小值 2，故 C 错误，

对于 D，易知 $x+\frac{4}{x+1}=x+1+\frac{4}{x+1}-1\geq 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{4}{x+1}}-1=3$，当且仅当 $x=1$ 时取等号，故 D 正确.

故选：ABD

11. 将函数 $y=\cos 2x$ 的图象沿 x 轴向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，再向上平移 $\frac{1}{2}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，则（　　）

A. 函数 $y=g(x)$ 的最小正周期为 π

B. $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增

C. $g(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{3\pi}{4}$ 对称

D. $g(x)$ 的图象关于点 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 中心对称

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据三角函数图象的平移变换可得 $g(x)$ 的解析式，结合正弦函数的周期公式，即可判断 A；结合正弦函数的单调性可判断 B；代入验证即可判断 C；根据正弦函数的对称中心以及图象的平移可判断 D.

【详解】由题意可得 $g(x)=\cos 2(x-\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}=\cos(2x-\frac{\pi}{2})+\frac{1}{2}=\sin 2x+\frac{1}{2}$，

则函数 $y=g(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，A 正确；

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$2x\in(0,\pi)$，由于 $y=\sin x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增，在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递减，

即 $y=\sin x$ 在 $(0,\pi)$ 上不单调，故 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上不单调，B 错误；

当 $x=\frac{3\pi}{4}$ 时，$g\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\frac{3\pi}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$，即函数 $g(x)$ 取到最小值，

故 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{3\pi}{4}$ 对称，C 正确；

将 $x=0$ 代入 $y=\sin 2x$ 中 $\sin 0=0$，即 $y=\sin 2x$ 的图象关于点 $(0,0)$ 对称，

将 $y=\sin 2x$ 的图象向上平移 $\frac{1}{2}$ 个单位，即得到 $g(x)$ 的图象，

故 $g(x)$ 的图象关于点 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 中心对称，D 正确，

故选：ACD

12. 设定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足：①当 $x<0$ 时，$f(x)<1$；② $f(x)+f(y)=f(x+y)+1$，则（　　）

A. $f(0)=1$

B. $f(x)$ 为减函数

C. $f(x)+f(-x)=2$

D. $f\left(2^x\right)+f\left(2^{-x}\right)\geq 2f(1)$

【答案】ACD

【解析】

【分析】对于 A，令 $x=y=0$ 即可验算；对于 B，令 $x<0$，则 $x+y<y, f(x)<1$，结合已知以及单调性的定义即可判断；对于 C，令 $x=-y$ 即可判断；对于 D，若要判断 $f\left(2^x\right)+f\left(2^{-x}\right)\geq 2f(1)$ 是否成立，只需判断 $f\left(2^x+2^{-x}\right)\geq f(2)$ 是否成立，结合基本不等式以及单调性即可判断.

【详解】对于 A，在 $f(x)+f(y)=f(x+y)+1$ 中，令 $x=y=0$ 得，$2f(0)=f(0)+1$，解得 $f(0)=1$，故 A 正确；

对于 B，令 $x<0$，则 $x+y<y, f(x)<1$，此时有 $f(x+y)-f(y)=f(x)-1<0$，即 $f(x+y)<f(y)$，即 $f(x)$ 为增函数，故 B 错误；

对于 C，令 $x=-y$ 得，$f(x)+f(-x)=f(0)+1=2$，故 C 正确；

对于 D，由基本不等式得 $2^x+2^{-x}\geq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$，等号成立当且仅当 $x=0$，

由 B 选项分析可知 $f(x)$ 为增函数，

所以 $f\left(2^x+2^{-x}\right)\geq f(2)$，所以 $f\left(2^x+2^{-x}\right)+1\geq f(2)+1$，即 $f\left(2^x\right)+f\left(2^{-x}\right)\geq 2f(1)$，故 D 正确.

故选：ACD.

【点睛】关键点睛：对于 AC 选项的判断比较常规，直接赋值即可，B 选项的关键是结合已知以及单调性的定义，D 选项的关键是分析得到 $f\left(2^x+2^{-x}\right)\geq f\left(2\right)$，从而即可顺利得解.

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，

13. 已知扇形的圆心角为 $\frac{\pi}{3}$，且弧长为 π，则该扇形的面积为__________.

【答案】$\frac{3\pi}{2}$

【解析】

【分析】先求得半径，再根据扇形面积公式即可得解.

【详解】由题意设圆心角、弧长、半径分别为 α,l,r，则 $\frac{\pi}{3}r=\pi$，解得 $r=3$，

所以该扇形的面积为 $S=\frac{1}{2}rl=\frac{3}{2}\pi$.

故答案为：$\frac{3\pi}{2}$.

14. 试写出一个实数 $a=$__________，使得函数 $f\left(x\right)=ax^2+4x-1$ 在 $\left(-1,1\right)$ 上恰有一个零点.

【答案】1（答案不唯一）

【解析】

【分析】不妨取 $a=1$，根据零点存在定理以及函数的单调性，即可说明所取值符合题意.

【详解】不妨取 $a=1$，则 $f\left(x\right)=x^2+4x-1$，

则 $f\left(1\right)=4, f(-1)=-4$，即得 $f\left(1\right)f(-1)<0$，

又 $f\left(x\right)=x^2+4x-1$ 图象的对称轴为 $x=-2$，则 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-1,1\right)$ 上单调递增，

故 $f\left(x\right)=x^2+4x-1$ 在 $\left(-1,1\right)$ 上恰有一个零点，

故答案为：1

15. 设函数 $y=3\sin x$ 与 $y=\tan x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上的图象交于点 P，过点 P 作 x 轴的垂线 l，垂足为 H，直线 l 与函数 $y=\cos x$ 的图象交与点 Q，则线段 QH 的长为____________.

【答案】$\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】设 $P\left(x_0,y_0\right)$，由题意可知令 $3\sin x_0=\tan x_0$，得到 $\cos x_0=\frac{1}{3}$，从而求出点 Q 坐标为 $\left(x_0,\frac{1}{3}\right)$，即可求解.

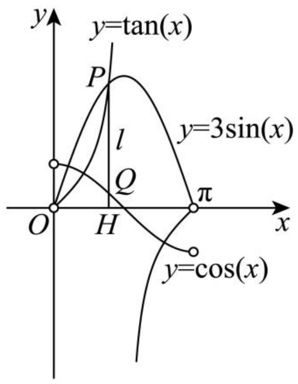
【详解】由函数 $y=3\sin x$ 与 $y=\tan x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上的图象交于点 P，设 $P\left(x_0,y_0\right)$，

则 $3\sin x_0=\tan x_0$，得 $\cos x_0=\frac{1}{3}$，此时求出的 x_0 即为点 P 的横坐标，所以直线 l 方程为 $x=x_0$，

又直线 l 与函数 $y=\cos x$ 的图象交与点 Q，所以 Q 点横坐标为 x_0，

将 $x=x_0$ 代入 $y=\cos x$，可得 $y=\cos x_0=\frac{1}{3}$，所以点 Q 坐标为 $\left(x_0,\frac{1}{3}\right)$，

所以线段 QH 的长为 $\frac{1}{3}$.



故答案为：$\frac{1}{3}$

16. 已知正数 a,b 满足 $ae^a=b\ln b$，则 $\frac{\ln b}{a}+\frac{e^a}{b}=$ __________.

【答案】2

【解析】

【分析】同构变形得到 $ae^a=\ln b\cdot e^{\ln b}$，并得到 $\ln b>0$，令 $f\left(x\right)=xe^x$，定义法得到其单调性，得到 $a=\ln b$，再代入求值即可.

【详解】因为正数 a,b 满足 $ae^a=b\ln b$，其中 $ae^a>0$ 恒成立，故 $\ln b>0$，

变形得到 $ae^a=b\ln b=\ln b\cdot e^{\ln b}$，

令 $f\left(x\right)=xe^x$，$x>0$，

任取 $x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right)$，且 $x_1<x_2$，

则 $\frac{f\left(x_1\right)}{f\left(x_2\right)}=\frac{x_1e^{x_1}}{x_2e^{x_2}}=\frac{x_1}{x_2}e^{x_1-x_2}<1\times e^0=1$，即 $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$，

故 $f\left(x\right)=xe^x$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，

故 $a=\ln b$，

故 $\frac{\ln b}{a}+\frac{e^a}{b}=\frac{\ln b}{\ln b}+\frac{e^{\ln b}}{b}=1+1=2$.

故答案为：2

【点睛】方法点睛：等式或不等式中，同时出现 $\ln x$ 与 e^x，常常使用同构变形，将等式或不等式两边变为同一结构，再构造函数来解决问题.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

（1）化简：$\cos x\sqrt{1+\tan^2 x}$；

（2）若 $\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$，求 $\frac{1}{\tan x}-\tan x$ 的值.

【答案】（1）-1

（2）$\frac{7}{12}$

【解析】

【分析】（1）利用所给范围，结合同角关系式进行化简；

（2）利用 $\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$ 关系式和范围，求出 $\sin x-\cos x$、$\sin x\cos x$ 的值，化简式子代入即可.

【小问 1 详解】

原式 $=\cos x\sqrt{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\cos x\cdot\sqrt{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\cos x\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}$

因为 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\cos x<0$，所以原式 $=\cos x\cdot\left(-\frac{1}{\cos x}\right)=-1$.

【小问 2 详解】

因为 $\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$，所以 $(\sin x+\cos x)^2=\frac{1}{25}$，即 $1+2\sin x\cos x=\frac{1}{25}$，

所以 $\sin x\cos x=-\frac{12}{25}$.

所以 $(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x=\frac{49}{25}$.

因为 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\sin x>0,\cos x<0$.所以 $\sin x-\cos x>0$.

所以 $\sin x-\cos x=\frac{7}{5}$.

所以 $\dfrac{1}{\tan x}-\tan x=\dfrac{\cos x}{\sin x}-\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\sin x\cos x}=\dfrac{-\dfrac{7}{5}\times\dfrac{1}{5}}{-\dfrac{12}{25}}=\dfrac{7}{12}$.

18. 设 $k\in\mathbf{R}$，集合 $A=\{k|$关于 x 的方程 $x^2+kx+k+3=0$ 无实根$\}$, $B=\{k|2k^2-ak-2a\ge 0\}$.

（1）若 $a=2$，求 $A\cup B$；

（2）若“$k\in A$”是“$k\in B$”的充分条件，求实数 a 的取值范围.

【答案】（1）$A\cup B=\mathbf{R}$

（2）$a\le 0$

【解析】

【分析】（1）根据根的判别式得到不等式，求出 A，进而得到 B，求出并集；

（2）根据充分条件得到 $A\subseteq B$，参变分离得到 $k\in(-2,6), a\le\dfrac{2k^2}{k+2}$，利用基本不等式求出 $\dfrac{2k^2}{k+2}\ge 0$，从而得到 $a\le 0$.

【小问 1 详解】

因为 $x^2+kx+k+3=0$ 无实根，所以 $\Delta=k^2-4(k+3)=(k-6)(k+2)<0$.

解得 $-2<k<6$，故 $A=\{k|-2<k<6\}$.

当 $a=2$ 时，$2k^2-2k-4\ge 0$，即 $(k-2)(k+1)\ge 0$，解得 $k\le -1$ 或 $k\ge 2$.

故 $B=\{k|k\le -1$ 或 $k\ge 2\}$.

所以 $A\cup B=\mathbf{R}$.

【小问 2 详解】

由（1）知，$A=\{k|-2<k<6\}$，

因为 $k\in A$ 是 $k\in B$ 的充分条件，所以 $A\subseteq B$.

所以对任意的 $k\in(-2,6), 2k^2-ak-2a\ge 0$ 恒成立.

即对任意的 $k\in(-2,6), a\le\dfrac{2k^2}{k+2}$.

因为 $\dfrac{2k^2}{k+2}=\dfrac{2[(k+2)-2]^2}{k+2}=2\left[(k+2)+\dfrac{4}{k+2}\right]-8\ge 2\times 2\sqrt{(k+2)\cdot\dfrac{4}{k+2}}-8=0$，

当且仅当 $k+2=\dfrac{4}{k+2}$ 即 $k=0$ 时，取“=”，

所以 $a \le 0$.

19. 已知函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的最小正周期为 $\pi,P(-\frac{\pi}{6},-2)$ 是 $f\left(x\right)$ 的图象上的一个最低点.

（1）求 A,ω,φ；

（2）若 $f\left(\alpha\right)=\frac{6}{5},0<\alpha<\frac{\pi}{3}$，求 $\cos(2\alpha+\frac{5\pi}{6})+\cos(\frac{2\pi}{3}-2\alpha)$ 的值.

【答案】（1）$A=2$，$\omega=2$，$\varphi=-\frac{\pi}{6}$；

（2）$-\frac{1}{5}$.

【解析】

【分析】（1）利用给定条件，结合正弦函数图象性质求解即得.

（2）由（1）求出 $\sin(2\alpha-\frac{\pi}{6})$，再利用同角公式及诱导公式计算即得.

【小问 1 详解】

依题意，$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得 $\omega=2$，

由点 $P(-\frac{\pi}{6},-2)$ 是曲线 $y=f\left(x\right)$ 上的一个最低点，得 $A=2$，此时有 $\sin(-\frac{\pi}{3}+\varphi)=-1$，

则 $-\frac{\pi}{3}+\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即 $\varphi=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，解得 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$，

所以 $A=2$，$\omega=2$，$\varphi=-\frac{\pi}{6}$.

【小问 2 详解】

由（1）知，$f\left(x\right)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，

由 $f\left(\alpha\right)=\frac{6}{5},0<\alpha<\frac{\pi}{3}$，得 $\sin(2\alpha-\frac{\pi}{6})=\frac{3}{5},-\frac{\pi}{6}<2\alpha-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$，

显然 $\cos(2\alpha-\frac{\pi}{6})>0$，于是 $\cos(2\alpha-\frac{\pi}{6})=\sqrt{1-\sin^2(2\alpha-\frac{\pi}{6})}=\frac{4}{5}$，

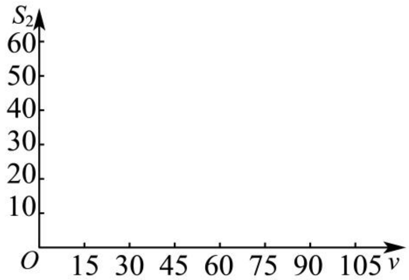
所以 $\cos(2\alpha+\frac{5\pi}{6})+\cos(\frac{2\pi}{3}-2\alpha)=\cos[\pi+(2\alpha-\frac{\pi}{6})]+\cos[\frac{\pi}{2}-(2\alpha-\frac{\pi}{6})]$

$=-\cos(2\alpha-\frac{\pi}{6})+\sin(2\alpha-\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{5}$.

20. 汽车驾驶员发现前方有障碍物时会紧急刹车，这一过程中，由于人的反应需要时间，在汽车的惯性作用下会有一个停车距离.记驾驶员的停车距离为 S（单位：m），驾驶员反应时间内汽车所行距离为 S_1（单位 m），刹车距离为 S_2（单位 m），则 $S=S_1+S_2$，其中 S_1 与刹车时的车速 v(单位，km/h) 满足 $S_1=\frac{1}{15}v,S_2$ 与刹

车时的车速v的部分关系见下表：

v	15	30	60	105
S_2	1.25	5	20	61.25



（1）在坐标平面内画出(v,S_2)的散点图，从①$S_2=a\cdot 2^v$；②$S_2=av^2$;③$S_2=a\log_2(v+1)$中选择最恰当的一个函数模型拟合S_2与v之间的关系，并求出其解析式；

（2）在限速$100\mathrm{km/h}$的高速公路上，驾驶员遇障碍物紧急刹车，已知驾驶员的停车距离为$51\mathrm{m}$，请根据（1）中所求的解析式，判断驾驶员是否超速行驶.

【答案】（1）散点图见解析，最恰当的一个函数模型为②$S_2=av^2$， $S_2=\dfrac{1}{180}v^2$

（2）该车未超速行驶

【解析】

【分析】（1）由表中数据可得最恰当的一个函数模型为②$S_2=av^2$，将$(30,5)$代入$S_2=av^2$可求出$a=\dfrac{1}{180}$，可得出答案；

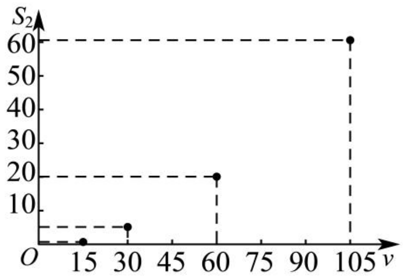
（2）由（1）知，$S=S_1+S_2=\dfrac{1}{15}v+\dfrac{1}{180}v^2$为$v$的增函数.法1：当$v=100$时，求出S与51比较可得出答案；法2：当$S=51$时，求出$v$与$100$比较可得出答案；

【小问1详解】

散点图如下图，最恰当的一个函数模型为②$S_2=av^2$.

将点$(30,5)$代入$S_2=av^2$，得$5=a\cdot 30^2$，解得$a=\dfrac{1}{180}$，所以$S_2=\dfrac{1}{180}v^2$.

经检验，表中其余三点的坐标均满足$S_2=\dfrac{1}{180}v^2$，所以最恰当的函数模型为②.



【小问 2 详解】

由（1）知，$S=S_1+S_2=\frac{1}{15}v+\frac{1}{180}v^2$ 为 v 的增函数.

法 1：当 $v=100$ 时，$S=\frac{1}{15}\times100+\frac{1}{180}\times100^2=\frac{560}{9}$.

因为 $\frac{560}{9}>51$.所以该车不超速.

法 2：当 $S=51$ 时，$\frac{1}{15}v+\frac{1}{180}v^2=51$，即 $v^2+12v-102\times90=0$，

所以 $(v+102)(v-90)=0$，又 $v\geq0$.所以 $v=90$.

因为 $90<100$.所以该车未超速行驶.

21. 已知函数 $f(x)=(x+a)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（1）若 $f(x)=f(-1-x)$ 恒成立，求 a；

（2）若 $a=0,f(x)=\ln t,f(x)+\frac{1}{x}f(x)=\ln s$，试比较 s^t 与 t^s 的大小，并证明.

【答案】（1）$a=\frac{1}{2}$

（2）$s^t=t^s$

【解析】

【分析】（1）根据题意，函数带入式子 $f(x)=f(-1-x)$，计算即可；

（2）利用 $a=0$，求出对应的 $f(x)$，用 x 表示出 s 、t 的值，再根据对数的降幂功能，得到 s^t 与 t^s，从而得到其大小关系.

【小问 1 详解】

因为 $f(x)=f(-1-x)$ 恒成立，

得 $(x+a)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=(-1-x+a)\ln\left(\frac{-1-x+1}{-1-x}\right)$

$$(x+a)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=(-1-x+a)\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

$$(x+a)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=(x+1-a)\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

所以 $a=1-a$，

即 $a=\dfrac{1}{2}$.

【小问 2 详解】

因为 $a=0$，所以 $f(x)=x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$，

$x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=\ln t$，得 $t=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x}$

$x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)+\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x+1}=\ln s$

得 $s=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x+1}$

因为 $\ln s^{t}=t\ln s=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x+1}=\dfrac{(x+1)^{x+1}}{x^{x}}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$；

$\ln t^{s}=s\ln t=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x+1}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{x}=\dfrac{(x+1)^{x+1}}{x^{x}}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

所以 $s^{t}=t^{s}$.

22. 已知函数 $f(x)=\left|e^{x}-a\right|+\left|e^{-x}+a\right|$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（1）若 $a=0$，证明：$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

（2）求 $f(x)$ 的最小值.

【答案】（1）见解析　　（2）见解析

【解析】

【分析】（1）利用单调性的定义证明即可；

（2）分类讨论，去绝对值，结合对勾函数的性质以及函数的单调性，即可由基本不等式求解.

【小问 1 详解】

证明：当 $a=0$ 时，$f(x)=e^{x}+e^{-x}$，

任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\mathrm{e}^{x_1}+\mathrm{e}^{-x_1}-\left(\mathrm{e}^{x_2}+\mathrm{e}^{-x_2}\right)=\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{x_2}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x_1}}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x_2}}$

$=\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{x_2}+\dfrac{\mathrm{e}^{x_2}-\mathrm{e}^{x_1}}{\mathrm{e}^{x_1+x_2}}=\left(\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{x_2}\right)\dfrac{\mathrm{e}^{x_1+x_2}-1}{\mathrm{e}^{x_1+x_2}}$，

因为 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，所以 $x_1+x_2>0$，得 $\mathrm{e}^{x_1+x_2}-1>0$，

而 $x_1<x_2$，得 $\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^{x_2}<0$，

故 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

得 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

【小问 2 详解】

令 $t=\mathrm{e}^x$，则 $t>0$，则 $f(x)=\left|\mathrm{e}^x-a\right|+\left|\mathrm{e}^{-x}+a\right|=|t-a|+\left|\dfrac{1}{t}+a\right|$，

当 $a=0$ 时，$f(x)=t+\dfrac{1}{t}\geq 2$，

当 $a>0$ 时，$f(x)=|t-a|+\left|\dfrac{1}{t}+a\right|=\begin{cases}t+\dfrac{1}{t},t>a\\ 2a-t+\dfrac{1}{t},0<t\leq a\end{cases}$，

由于 $y=2a-t+\dfrac{1}{t}$ 在 $(0,a]$ 单调递减，所以 $y=2a-t+\dfrac{1}{t}\geq 2a-a+\dfrac{1}{a}=a+\dfrac{1}{a}$，

而当 $t>a,y=t+\dfrac{1}{t}$ 为对勾函数，

当 $a\geq 1$ 时，$y=t+\dfrac{1}{t}$ 在 $t>a$ 单调递增，所以此时 $y=t+\dfrac{1}{t}>a+\dfrac{1}{a}$，

故此时 $f(x)$ 的最小值为 $a+\dfrac{1}{a}$，

当 $0<a<1$ 时，$y=t+\dfrac{1}{t}$ 在 $(a,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增，故此时 $y=t+\dfrac{1}{t}\geq 2$，

由于 $a+\dfrac{1}{a}>2$，故此时 $f(x)$ 的最小值为 2，

当 $a<0$ 时，$f(x)=|t-a|+\left|\dfrac{1}{t}+a\right|=\begin{cases}t+\dfrac{1}{t},0<t\leq-\dfrac{1}{a}\\ t-\dfrac{1}{t}-2a,t>-\dfrac{1}{a}\end{cases}$，

由于 $y=t-\dfrac{1}{t}-2a$ 在 $t>-\dfrac{1}{a}$ 单调递增，所以 $y=t-\dfrac{1}{t}-2a>-\dfrac{1}{a}+a-2a=-\dfrac{1}{a}-a$，

而当$0<t\le -\frac{1}{a}$, $y=t+\frac{1}{t}$为对勾函数，

当$a\le -1$时，$y=t+\frac{1}{t}$在$0<t\le -\frac{1}{a}$单调递减，所以此时$y=t+\frac{1}{t}\ge -a-\frac{1}{a}$，

故此时$f\left(x\right)$的最小值为$-a-\frac{1}{a}$，

当$0>a>-1$时，$y=t+\frac{1}{t}$在$\left(0,1\right)$单调递减，在$\left(1,-\frac{1}{a}\right)$单调递增，故此时$y=t+\frac{1}{t}\ge 2$，

由于$-a-\frac{1}{a}=\left(-a\right)+\left(\frac{1}{-a}\right)>2$，故此时$f\left(x\right)$的最小值为2，

综上可得：当$-1<a<1$时，$f\left(x\right)$的最小值为2，

$a\le -1$，$f\left(x\right)$的最小值为$-a-\frac{1}{a}$，

当$a\ge 1$时，$f\left(x\right)$的最小值为$a+\frac{1}{a}$，