

无锡市第一中学 2023-2024 学年度第二学期期中试卷

高一数学

2024.4

命题：冯一成

审核：沈柏英

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 在下列各组向量中，可以作为基底的是（ ）

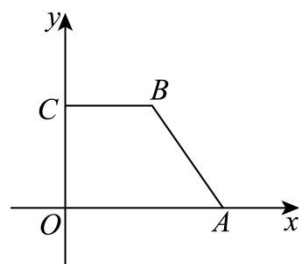
A. $\vec{e}_1 = (0, 0), \vec{e}_2 = (1, 2)$

B. $\vec{e}_1 = (-1, 2), \vec{e}_2 = (2, 1)$

C. $\vec{e}_1 = (3, 5), \vec{e}_2 = (6, 10)$

D. $\vec{e}_1 = (2, -3), \vec{e}_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$

2. 如图所示直角梯形 $OABC$ 上下两底分别为 2 和 4，高为 $2\sqrt{2}$ ，则利用斜二测画法所得其直观图的面积为（ ）



A. 2

B. 3

C. 4

D. 6

3. 关于向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ ，下列命题中，正确的是（ ）

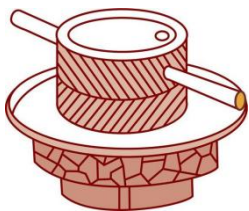
A. 若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，则 $\vec{a} = \vec{b}$

B. 若 $|\vec{a}| > |\vec{b}|$ ，则 $\vec{a} > \vec{b}$

C. 若 $\vec{a} = \vec{b}$ ，则 $\vec{a} \parallel \vec{b}$

D. 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，则 $\vec{a} = \vec{b}$

4. 如图，石磨是用于把米、麦、豆等粮食加工成粉、浆的一种机械，通常由两个圆石做成。磨是平面的两层，两层的接合处都有纹理，粮食从上方的孔进入两层中间，沿着纹理向外运移，在滚动过两层面时被磨碎，形成粉末。如果一个石磨近似看作两个完全相同的圆柱体拼合而成，每个圆柱体的底面圆的直径是高的 2 倍，若石磨的侧面积为 16π ，则圆柱底面圆的半径为（ ）



- A. 4 B. 2 C. $4\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

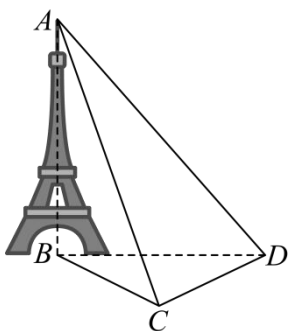
5. 正四面体 $A-BCD$ 中, E, F, G, H 分别是棱 AB, BC, CD, AD 的中点, 则不正确的选项为 ()

- A. $EF \parallel$ 平面 ACD
- B. $AC \perp BD$
- C. $AB \perp$ 平面 FHG
- D. E, F, G, H 四点共面

6. 已知 M 是边长为 1 的正 $\triangle ABC$ 的边 AC 上靠近 C 的四等分点, N 为 AB 的中点, 则 $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MN}$ 的值是 ()

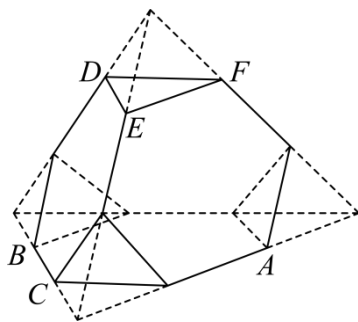
- A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

7. 如图, 为了测量某铁塔的高度, 测量人员选取了与该塔底 B 在同一平面内的两个观测点 C 与 D , 现测得 $\angle CDB = 37^\circ$, $\angle BCD = 68^\circ$, $CD = 37.9$ 米, 在点 C 处测得塔顶 A 的仰角为 64° , 则该铁塔的高度约为 () (参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.4$, $\sqrt{6} \approx 2.4$, $\tan 64^\circ \approx 2.0$, $\cos 37^\circ \approx 0.8$)



- A. 40 米 B. 14 米
C. 48 米 D. 52 米

8. 半正多面体亦称“阿基米德体”或“阿基米德多面体”，是由边数不全相同的正多边形为面的多面体.某半正多面体由 4 个正三角形和 4 个正六边形构成，其可由正四面体切割而成.在如图所示的半正多面体中，若其棱长为 2，点 M, N 分别在线段 DE, BC 上，则 $FM + MN + AN$ 的最小值为（ ）



- A. $3\sqrt{2}$ B. $\sqrt{19}$
C. $6\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{19}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，以下判断正确的是（ ）

- A. 若 $\cos A = \cos B$ ，则 $\triangle ABC$ 为等腰三角形
B. 若 $a = \sqrt{5}$ ， $b = \sqrt{15}$ ， $A = 30^\circ$ ，则符合条件的 $\triangle ABC$ 有且只有一个
C. 若 $a \cos A = b \cos B$ ，则 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形
D. 若 $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C < 0$ ，则 $\triangle ABC$ 是钝角三角形

10. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $\overline{A_1E} = \overline{ED_1}$ ， $\overline{C_1F} = 2\overline{FD_1}$ ，过 E, F 的平面将正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 截成两部分，则所得几何体可能是（ ）

- A. 三棱锥 B. 直三棱柱
C. 三棱台 D. 四棱柱

11. 平行四边形 $ABCD$ 中， $AB = \frac{3}{2}$ ， $AD = 1$ ， $\angle A = \frac{\pi}{3}$ ，动点 P 满足 $\overline{AP} = \lambda \overline{AB} + \mu \overline{AD}$ ， $\lambda, \mu \in [0, 1]$ ，

下列选项中正确的有（ ）

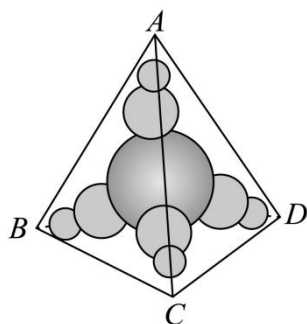
- A. $\lambda = 1$ 时， $|\overline{CP}|$ 的取值范围是 $[0, 1]$
B. $\mu = 1$ 时，存在 P 使得 $\overline{AP} \cdot \overline{BD} = 0$
C. $\overline{AP} \cdot \overline{AB} = \frac{21}{8}$ 时，动点 P 形成的轨迹的长为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$
D. $\lambda = \frac{1}{3}$ 且 $|\overline{AP}|$ 最大时， $\overline{AP}$ 在 $\overline{AB}$ 上的投影向量为 $\frac{2}{3} \overline{AB}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12. 已知向量 $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$ ， $\vec{b} = (x, \sqrt{3})$ ，若 $\vec{a} \perp (\vec{a} - 2\vec{b})$ ，则 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为_____．

13. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , D 为边 AC 的中点, $c=1$, $BD=\sqrt{2}$, $\angle ABD=\frac{\pi}{4}$, 则边 a 的长为_____.

14. 如今中国在基建方面世界领先, 可谓是逢山开路, 遇水架桥. 公路里程、高铁里程双双都是世界第一. 建设过程中研制出用于基建的大型龙门吊、平衡盾构机等国之重器更是世界领先. 如图是某重器上一零件结构模型, 中间最大球为正四面体 $ABCD$ 的内切球, 中等球与最大球和正四面体三个面均相切, 最小球与中等球和正四面体三个面均相切, 已知正四面体 $ABCD$ 体积为 $8\sqrt{3}$, 则模型中最大球的体积为_____, 模型中九个球的表面积之和为_____.



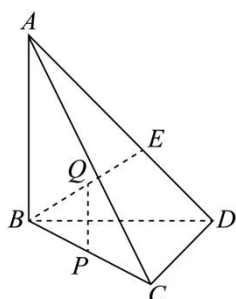
四、解答题: 本题共 5 小题, 其中第 15 题 13 分, 第 16, 17 题 15 分, 第 18, 19 题 17 分, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{DB}$, P 为线段 AD 的中点, 记 $\overrightarrow{CB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CP}=\vec{m}\vec{a}+\vec{n}\vec{b}$, $m, n \in R$.

(1) 求 $m+n$ 的值;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, $a=2$, $\angle ACB=\frac{\pi}{3}$, 求线段 CP 的长度.

16. 我国古代数学名著《九章算术》中, 称四面都为直角三角形的三棱锥为“鳖臑”. 如图, 在三棱锥 $A-BCD$ 中, $AB \perp$ 平面 BCD , $BC \perp CD$.



(1) 证明: 三棱锥 $A-BCD$ 为鳖臑;

(2) 若 E 为 AD 上一点, 点 P, Q 分别为 BC, BE 的中点. 平面 DPQ 与平面 ACD 的交线为 l .

①证明：直线 $PQ \parallel$ 平面 ACD ；

②判断 PQ 与 l 的位置关系，并证明你的结论.

17. 在① $\cos A = \frac{2c-a}{2b}$ ，② $b \cos C = (2a-c) \cos B$ 中任选一个作为已知条件，补充在下列问题中，并作答.

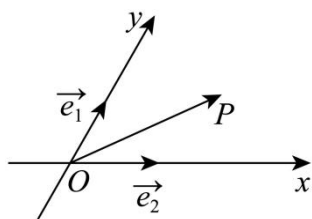
问题：在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，已知_____.

(1) 求 B ；

(2) 若 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 1，且 $\cos A \cos C = -\frac{1}{8}$ ，求 $a+c$.

注：若选择不同条件分别作答，则按第一个解答计分.

18. 我们把由平面内夹角成 60° 的两条数轴 Ox ， Oy 构成的坐标系，称为“广义坐标系”.如图所示， $\vec{e}_1$ ， $\vec{e}_2$ 分别为 Ox ， Oy 正方向上的单位向量.若向量 $\vec{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ ，则称有序实数对 $\{x, y\}$ 为向量 $\vec{OP}$ 的“广义坐标”，可记作 $\vec{OP} = \{x, y\}$.

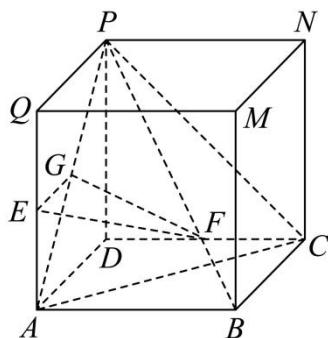


(1) 已知 $\vec{a} = \{1, 2\}$ ， $\vec{b} = \{2, -1\}$ ，求 $\vec{a} + \vec{b}$ ， $2\vec{a} - \vec{b}$ 的“广义坐标”；

(2) 已知 $\vec{a} = \{x_1, y_1\}$ ， $\vec{b} = \{x_2, y_2\}$ ，求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ；

(3) 已知 $\vec{a} = \{x_1, y_1\}$ ， $\vec{b} = \{x_2, y_2\}$ ，求证： $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 的充要条件是 $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$.

19. 在直四棱柱 $ABCD-QMNP$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形， $PB \perp AC$ ， E, F, G 分别为线段 AQ, DC, PA 的中点.



(1) 证明： $PA = PC$ ；

(2) 证明：平面 $EFG \parallel$ 平面 PBC ；

(3) 若 $PD=1, \angle DAB=60^\circ$ ，当 PA 与平面 PBC 所成角的正弦值最大时，求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.