

无锡市第一中学 2023-2024 学年度第二学期期中试卷

高一数学

2024.4

命题：冯一成

审核：沈柏英

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 在下列各组向量中，可以作为基底的是 ()

A. $\vec{e}_1 = (0, 0), \vec{e}_2 = (1, 2)$

B. $\vec{e}_1 = (-1, 2), \vec{e}_2 = (2, 1)$

C. $\vec{e}_1 = (3, 5), \vec{e}_2 = (6, 10)$

D. $\vec{e}_1 = (2, -3), \vec{e}_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$

【答案】B

【解析】

【分析】根据基底需为不共线的非零向量，由此依次判断各个选项即可。

【详解】由于零向量与任意非零向量共线，故 A 错误；

由 $\vec{e}_1 = (-1, 2), \vec{e}_2 = (2, 1)$ ，而 $-1 \times 1 - 2 \times 2 \neq 0$ ，

所以向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 不共线，可以作为基底，故 B 正确；

由于 $\vec{e}_1 = (3, 5), \vec{e}_2 = (6, 10)$ ，则 $\vec{e}_2 = 2\vec{e}_1$ ，

所以向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 共线，不能作为基底，故 C 错误；

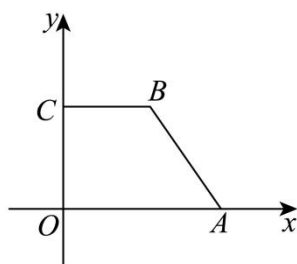
由于 $\vec{e}_1 = (2, -3), \vec{e}_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ ， $\vec{e}_1 = 4\vec{e}_2$ ，

所以向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 共线，不能作为基底，故 D 错误。

故选：B

2. 如图所示直角梯形 $OABC$ 上下两底分别为 2 和 4，高为 $2\sqrt{2}$ ，则利用斜二测画法所得其直观图的面积为

()



- A. 2
B. 3
C. 4
D. 6

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意，由梯形面积公式求出原图的面积，结合原图与直观图面积的关系，分析即可得出结果.

【详解】根据题意，原图直角梯形 $OABC$ 中，上下两底分别为 2 和 4，高为 $2\sqrt{2}$ ，

$$\text{其面积 } S = \frac{2+4}{2} \times 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2},$$

$$\text{则其直观图的面积 } S' = \frac{\sqrt{2}}{4} S = 3.$$

故选：B.

3. 关于向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ，下列命题中，正确的是（ ）

- A. 若 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，则 $\vec{a} = \vec{b}$
B. 若 $|\vec{a}| > |\vec{b}|$ ，则 $\vec{a} > \vec{b}$
C. 若 $\vec{a} = \vec{b}$ ，则 $\vec{a} \parallel \vec{b}$
D. 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，则 $\vec{a} = \vec{b}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据相等向量的定义即可判断 A；根据平面向量的定义即可判断 B；根据共线向量及相等向量的定义即可判断 CD，

【详解】解： $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 时，方向未知， $\vec{a} = \vec{b}$ 不成立，A 错误；

向量不能比较大小，B 错误；

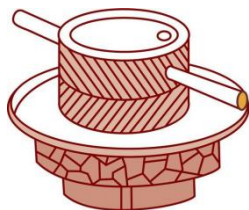
$\vec{a} = \vec{b}$ 表示向量大小相等，方向相同，所以 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，C 正确；

$\vec{a} \parallel \vec{b}$ 表示向量方向相同或相反，不能得到 $\vec{a} = \vec{b}$ ，D 错误.

故选：C.

4. 如图，石磨是用于把米、麦、豆等粮食加工成粉、浆的一种机械，通常由两个圆石做成．磨是平面的两

层，两层的接合处都有纹理，粮食从上方的孔进入两层中间，沿着纹理向外运移，在滚动过两层面时被磨碎，形成粉末。如果一个石磨近似看作两个完全相同的圆柱体拼合而成，每个圆柱体的底面圆的直径是高的2倍，若石磨的侧面积为 16π ，则圆柱底面圆的半径为（ ）



- A. 4 B. 2 C. $4\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】设圆柱底面圆的半径为 $r > 0$ ，则圆柱的高为 r ，结合圆柱的侧面积公式运算求解.

【详解】设圆柱底面圆的半径为 $r > 0$ ，则圆柱的高为 r ，

则石磨的侧面积为 $2 \times 2\pi r \times r = 16\pi$ ，解得 $r = 2$.

故选：B

5. 正四面体 $A-BCD$ 中， E, F, G, H 分别是棱 AB, BC, CD, AD 的中点，则不正确的选项为（ ）

- A. $EF \parallel$ 平面 ACD B. $AC \perp BD$
C. $AB \perp$ 平面 FGH D. E, F, G, H 四点共面

【答案】C

【解析】

【分析】选项A，根据条件得到 $EF \parallel AC$ ，利用线面平行的判定定理，即可判断出选项A的正误；选项B，根据条件得到 $BD \perp$ 面 AMC ，利用线面垂直的性质，即可判断出选项B的正误；对于选项C，根据条件得到 $EF \parallel AC$ ，而 AB 不垂直 AC ，即可判断选项C的正误；对于选项D，利用 $HG \parallel EF$ ，即可判断选项D的正误.

【详解】将正四面体 $A-BCD$ 放置到正方体中，

对于选项A，如图1，因为 E, F 上棱 AB, BC 的中点，所以 $EF \parallel AC$ ，

又 $AC \subset$ 面 ACD ， $EF \not\subset$ 面 ACD ，所以 $EF \parallel$ 平面 ACD ，所以选项A正确，

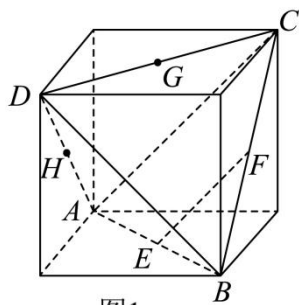


图1

对于选项 B，如图 2，取 BD 中点 M ，连接 AM, CM ，因为四面体 $A-BCD$ 是正四面体，

所以 $AM \perp BD, CM \perp BD$ ，又 $AM \cap CM = M$ ， $AM, CM \subset$ 面 AMC ，

所以 $BD \perp$ 面 AMC ，又 $AC \subset$ 面 AMC ，所以 $AC \perp BD$ ，故选项 B 正确，

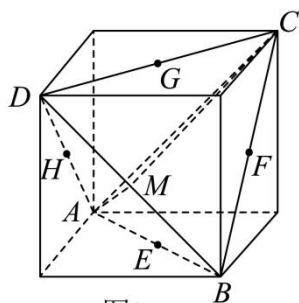


图2

对于选项 C，如图 3，由选项 A 知， $EF \parallel AC$ ，又 $\triangle ABC$ 是等边三角形，所以 AB 与 AC 不垂直，

故 AB 与 EF 不垂直，若 $AB \perp$ 平面 FGH ，又 $EF \subset$ 平面 FGH ，则 $AB \perp EF$ ，所以选项 C 错误，

对于选项 D，如图 3，因为 G, H 是 CD, AD 的中点，所以 $HG \parallel AC$ ，又 $EF \parallel AC$ ，

所以 $HG \parallel EF$ ，故 E, F, G, H 四点共面，所以选项 D 正确，

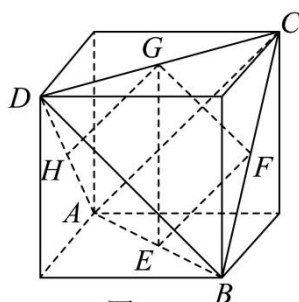


图3

故选：C.

6. 已知 M 是边长为 1 的正 $\triangle ABC$ 的边 AC 上靠近 C 的四等分点， N 为 AB 的中点，则 $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MN}$ 的值是

()

A. $-\frac{1}{2}$

B. $-\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{2}$

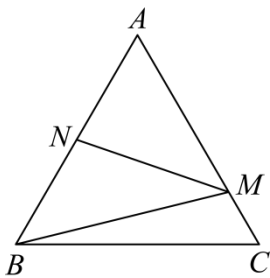
D. $\frac{1}{4}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据平面向量的线性运算可得 $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ ， $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} - \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ ，结合数量积的运算律计算即可求解.

【详解】如图，

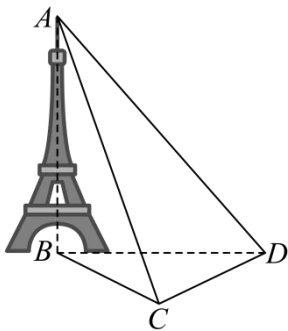


$$\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}, \quad \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} - \frac{3}{4}\overrightarrow{BC},$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MN} &= \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{BA} - \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}\right) \\ &= \frac{3}{16}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} - \frac{9}{16}\overrightarrow{BC}^2 + \frac{1}{16}\overrightarrow{BA}^2 - \frac{3}{16}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{9}{16} + \frac{1}{16} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

故选：A

7. 如图，为了测量某铁塔的高度，测量人员选取了与该塔底 B 在同一平面内的两个观测点 C 与 D ，现测得 $\angle CDB = 37^\circ$ ， $\angle BCD = 68^\circ$ ， $CD = 37.9$ 米，在点 C 处测得塔顶 A 的仰角为 64° ，则该铁塔的高度约为（ ）（参考数据： $\sqrt{2} \approx 1.4$ ， $\sqrt{6} \approx 2.4$ ， $\tan 64^\circ \approx 2.0$ ， $\cos 37^\circ \approx 0.8$ ）



A. 40 米

B. 14 米

C. 48 米

D. 52 米

【答案】C

【解析】

【分析】在 $\triangle CDB$ 中利用正弦定理求 BC ，再在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中求 AB 。

【详解】在 $\triangle CDB$ 中，由题意可得 $\angle CBD = 75^\circ$ ，

$$\text{则 } \sin \angle CBD = \sin 75^\circ = \sin (45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

$$\sin \angle CDB = \sin 37^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 37^\circ} \approx 0.6,$$

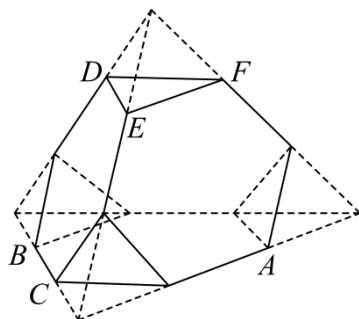
$$\text{由正弦定理 } \frac{CD}{\sin \angle CBD} = \frac{BC}{\sin \angle CDB} \text{ 可得 } BC = \frac{CD \cdot \sin \angle CDB}{\sin \angle CBD},$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABC \text{ 中, 可得 } AB = BC \cdot \tan \angle ACB = \frac{CD \cdot \sin \angle CDB \cdot \tan \angle ACB}{\sin \angle CBD} = \frac{37.9 \times 0.6 \times 2.0}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} \approx 48,$$

所以该铁塔的高度约为 48 米.

故选: C.

8. 半正多面体亦称“阿基米德体”或“阿基米德多面体”，是由边数不全相同的正多边形为面的多面体.某半正多面体由 4 个正三角形和 4 个正六边形构成，其可由正四面体切割而成.在如图所示的半正多面体中，若其棱长为 2，点 M, N 分别在线段 DE, BC 上，则 $FM + MN + AN$ 的最小值为 ()



A. $3\sqrt{2}$

B. $\sqrt{19}$

C. $6\sqrt{2}$

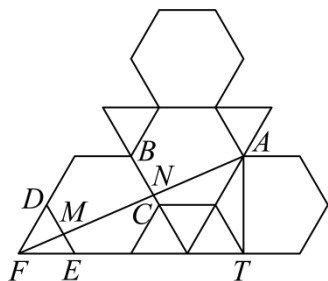
D. $2\sqrt{19}$

【答案】D

【解析】

【分析】将几何体展开为平面图形，利用两点之间线段最短求 $FM + MN + AN$ 的最小值.

【详解】将该半正多面体展开为平面，且 A, F 在线段 DE, BC 两侧（两线段在两点之间），如下图所示，



由半正多面体中，棱长为 2，得 $FT = 8$ ， $AT = 2\sqrt{3}$ ，

且 $AT \perp FT$ ，故 $AF = \sqrt{FT^2 + AT^2} = 2\sqrt{19}$ ，

所以 $FM + MN + AN \geq AF = 2\sqrt{19}$ ，当且仅当在展开图中 A, N, M, F 共线时等号成立。

故选：D.

【点睛】方法点睛：

空间图形求表面上折线段之和最小值时，关键是弄清几何体中的有关点、线在展开图中的相应位置关系，解决的方法就是把各侧面展开铺在平面上，根据“平面内连结两点的线段最短”的方法来解决。

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，以下判断正确的是（ ）

A. 若 $\cos A = \cos B$ ，则 $\triangle ABC$ 为等腰三角形

B. 若 $a = \sqrt{5}$ ， $b = \sqrt{15}$ ， $A = 30^\circ$ ，则符合条件的 $\triangle ABC$ 有且只有一个

C. 若 $a \cos A = b \cos B$ ，则 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形

D. 若 $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C < 0$ ，则 $\triangle ABC$ 是钝角三角形

【答案】AD

【解析】

【分析】对于 A，由余弦函数的性质判断，对于 B，由正弦定理分析判断，对于 C，由正弦定理统一成角的形式，再化简判断，对于 D，利用正弦定理和余弦定理分析判断。

【详解】对于 A，因为 $\cos A = \cos B$ ， $A, B \in (0, \pi)$ ，所以 $A = B$ ，

所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，故 A 正确；

对于 B，由正弦定理得：
$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{\sqrt{15} \times \frac{1}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

因为 $b > a$ ，所以 $B > A$ ，即 $30^\circ < B < 150^\circ$ ，

所以 $B = 60^\circ$ 或 120° ，则三角形有两解，故 B 错误；

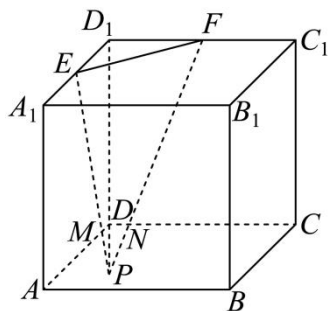
对于 C，在 $\triangle ABC$ 中， $a \cos A = b \cos B$ ，

由正弦定理得 $\sin A \cos A = \sin B \cos B$ ，即 $\sin 2A = \sin 2B$ ，

因为 $2A, 2B \in (0, 2\pi)$ ，所以 $2A = 2B$ 或 $2A = \pi - 2B$ ，即 $A = B$ 或 $A + B = \frac{\pi}{2}$ ，

所以这个三角形为等腰三角形或直角三角形，故 C 错误；

对于 D，若 $\sin^2 A + \sin^2 B < \sin^2 C$ ，由正弦定理得 $a^2 + b^2 < c^2$ ，



EF 将四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 分成一个三角形和一个五边形，所以不可能得到四棱柱.

故选：ABC.

11. 平行四边形 $ABCD$ 中， $AB = \frac{3}{2}$ ， $AD = 1$ ， $\angle A = \frac{\pi}{3}$. 动点 P 满足 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD}$ ， $\lambda, \mu \in [0, 1]$ ，

下列选项中正确的有（ ）

A. $\lambda = 1$ 时， $|\overrightarrow{CP}|$ 的取值范围是 $[0, 1]$

B. $\mu = 1$ 时，存在 P 使得 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

C. $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{21}{8}$ 时，动点 P 形成的轨迹的长为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\lambda = \frac{1}{3}$ 且 $|\overrightarrow{AP}|$ 最大时， $\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量为 $\frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$

【答案】ABD

【解析】

【分析】根据图形特征建立平面直角坐标系，当 $\lambda = 1$ 时 P 在线段 BC 上，从而判断 A；若 $\mu = 1$ ，，则

$P\left(\frac{3}{2}\lambda, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，通过解方程进而判断 B；通过 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{21}{8}$ 从而得到动点 P 轨迹方程进而判断 C；通过图

形特征以及投影向量的相关概念判断 D.

【详解】在平行四边形 $ABCD$ 中，作 $DO \perp AB$ ，建立如图所示的平面直角坐标系，

则 $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ ， $B(1, 0)$ ， $C\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ， $D\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，则 $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$ ， $\overrightarrow{AD} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，

所以 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD} = \left(\frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu, \frac{\sqrt{3}}{2}\mu\right)$ ，则 $P\left(\frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\mu\right)$ ，

对于 A，若 $\lambda = 1$ ，则 P 在线段 BC 上（含端点），所以 $|\overrightarrow{CP}|$ 的取值范围是 $[0, 1]$ ，故 A 正确；

对于 B，若 $\mu = 1$ ，则 $P\left(\frac{3}{2}\lambda, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，所以 $\overrightarrow{AP} = \left(\frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ， $\overrightarrow{BD} = \left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，

所以令 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BD} = -\left(\frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} = 0$ ，所以 $\lambda = \frac{1}{6}$ 符合题意，

所以 $\mu = 1$ 时，存在 P 使得 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ ，故 B 正确；

对于 C， $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu\right) = \frac{21}{8}$ ，则 $\frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu = \frac{7}{4}$ ，

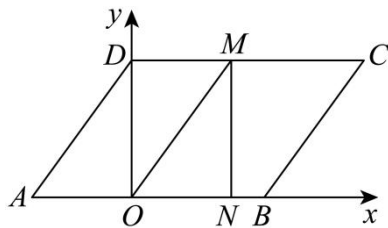
所以 $P\left(\frac{5}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\mu\right)$ ，由 $\begin{cases} 0 \leq \lambda = \frac{\frac{7}{2} - \mu}{3} \leq 1, \\ 0 \leq \mu \leq 1 \end{cases}$ 得到 $\frac{1}{2} \leq \mu \leq 1$ ，

所以动点 P 形成的轨迹的长为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ，故 C 错误；

对于 D，过点 O 作 $OM \parallel AD$ ，若 $\lambda = \frac{1}{3}$ ，则 P 在 OM 上，又因为 $|\overrightarrow{AP}|$ 最大，

所以 P 与 M 重合，作 $MN \perp AB$ ，则 $\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量为 $\overrightarrow{AN}$ ，

由 $|\overrightarrow{AN}| = |\overrightarrow{AO}| + |\overrightarrow{ON}| = |\overrightarrow{AO}| + |\overrightarrow{DM}| = 1 = \frac{2}{3}|\overrightarrow{AB}|$ ，则 $\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量为 $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ，故 D 正确。



故选：ABD

【点睛】方法点睛：本题考查平面向量综合问题，该类问题常见的处理方法为：

- (1) 基底法：通过基底的建立与表示进行求解；
- (2) 坐标法：通过平面直角坐标系，结合坐标公式进行求解；
- (3) 转化法：通过平方关系的转化求解平面向量问题。

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知向量 $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$ ， $\vec{b} = (x, \sqrt{3})$ ，若 $\vec{a} \perp (\vec{a} - 2\vec{b})$ ，则 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为_____。

【答案】 $\frac{\pi}{3}$ ## 60°

【解析】

【分析】利用平面向量的坐标运算求出 $\vec{b}$ ，再利用夹角公式求解即可。

【详解】易知 $\vec{a} - 2\vec{b} = (1 - 2x, -\sqrt{3})$ ，而 $\vec{a} \perp (\vec{a} - 2\vec{b})$ ，故 $1 - 2x - 3 = 0$ ，

解得 $x = -1$ ，则 $\vec{b} = (-1, \sqrt{3})$ ，设 $\vec{a}, \vec{b}$ 夹角为 β ，显然 $\beta \in [0, \pi]$ ，

$$\text{得 } \cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-1+3}{\sqrt{4} \times \sqrt{4}} = \frac{1}{2}, \text{ 故 } \beta = \frac{\pi}{3}.$$

故答案为: $\frac{\pi}{3}$

13. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ， D 为边 AC 的中点， $c = 1$ ， $BD = \sqrt{2}$ ， $\angle ABD = \frac{\pi}{4}$ ，则边 a 的长为_____.

【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】

【分析】在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得 AD ，从而发现 $AB^2 + AD^2 = BD^2$ ，利用勾股定理可解.

【详解】在 $\triangle ABD$ 中， $c = 1$ ， $BD = \sqrt{2}$ ， $\angle ABD = \frac{\pi}{4}$ ，

$$\text{由余弦定理得 } AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos \angle ABD = 1 + 2 - 2 \times 1 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1,$$

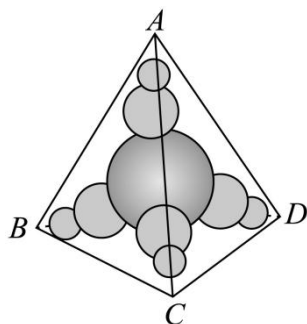
所以 $AD = 1, AC = 2AD = 2$ ，

此时 $AB^2 + AD^2 = BD^2$ ，即 $AB \perp AD$ ，

所以 $a = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{5}$.

故答案为: $\sqrt{5}$

14. 如今中国在基建方面世界领先，可谓是逢山开路，遇水架桥.公路上里程、高铁里程双双都是世界第一.建设过程中研制出用于基建的大型龙门吊、平衡盾构机等国之重器更是世界领先.如图是某重器上一零件结构模型，中间最大球为正四面体 $ABCD$ 的内切球，中等球与最大球和正四面体三个面均相切，最小球与中等球和正四面体三个面均相切，已知正四面体 $ABCD$ 体积为 $8\sqrt{3}$ ，则模型中最大球的体积为_____，模型中九个球的表面积之和为_____.



【答案】 ①. $\frac{4\pi}{3}$ ②. 9π

【解析】

【分析】根据三棱锥的体积公式计算可得正四面体的棱长为 $2\sqrt{6}$ ，如图，作出辅助线，先求出正四面体的内切球半径，再利用三个球的半径之间的关系得到另外两个球的半径，得到答案.

【详解】设正四面体的棱长为 x ，高为 h ，底面圆半径为 r ，

$$\text{则 } \frac{x}{\sin 60^\circ} = 2r, \text{ 得 } r = \frac{\sqrt{3}}{3}x, \text{ 又 } h = \sqrt{x^2 - r^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}x,$$

$$\text{所以正四面体的体积为 } V_{A-BCD} = \frac{1}{3} S_{\triangle BCD} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} x^2 \cdot \sin 60^\circ \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} x = 8\sqrt{3}, \text{ 解得 } x = 2\sqrt{6}.$$

如图，取 BC 的中点 E ，连接 DE ， AE ，则 $CE = BE = \sqrt{6}$ ， $AE = DE = \sqrt{24 - 6} = 3\sqrt{2}$ ，

过点 A 作 $AF \perp$ 底面 BCD ，垂足在 DE 上，且 $DF = 2EF$ ，

$$\text{所以 } DF = 2\sqrt{2}, EF = \sqrt{2}, \text{ 故 } AF = \sqrt{AD^2 - DF^2} = \sqrt{24 - 8} = 4,$$

点 O 为最大球的球心，连接 DO 并延长，交 AE 于点 M ，则 $DM \perp AE$ ，

设最大球的半径为 R ，则 $OF = OM = R$ ，

$$\text{因为 } \text{Rt}\triangle AOM \sim \text{Rt}\triangle AEF, \text{ 所以 } \frac{AO}{AE} = \frac{OM}{EF}, \text{ 即 } \frac{4-R}{3\sqrt{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}, \text{ 解得 } R = 1,$$

$$\text{所以最大球的体积为 } \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi, \text{ 且 } OM = OF = 1, \text{ 则 } AO = 4 - 1 = 3, \sin \angle EAF = \frac{OM}{AO} = \frac{1}{3},$$

设最小球的球心为 J ，中间球的球心为 K ，则两球均与直线 AE 相切，设切点分别为 H, G ，

连接 HJ, KG ，则 HJ, KG 分别为最小球和中间球的半径，长度分别设为 a, b ，

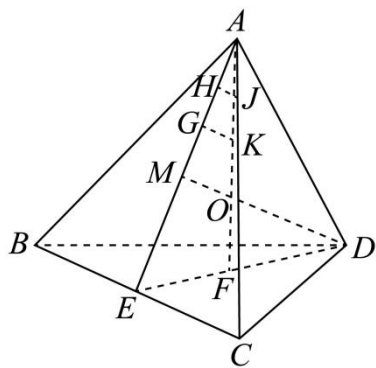
$$\text{则 } AJ = 3HJ = 3a, AK = 3GK = 3b, \text{ 则 } JK = AK - AJ = 3b - 3a,$$

$$\text{又 } JK = a + b, \text{ 所以 } 3b - 3a = a + b, \text{ 解得 } b = 2a,$$

$$\text{又 } OK = R + b = AO - AK = 3 - 3b, \text{ 故 } 4b = 3 - R = 2, \text{ 解得 } b = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } a = \frac{1}{4},$$

$$\text{模型中九个球的表面积和为 } 4\pi R^2 + 4\pi b^2 \times 4 + 4\pi a^2 \times 4 = 4\pi + 4\pi + \pi = 9\pi.$$



故答案为: $\frac{4}{3}\pi$; 9π

【点睛】思路点睛: 解决与球有关的内切或外接的问题时, 解题的思路是确定球心的位置. 对于外切的问题要注意球心到各个面的距离相等且都为球半径; 对于球的内接几何体的问题, 注意球心到各个顶点的距离相等, 解题时要构造出由球心到截面圆的垂线段、小圆的半径和球半径组成的直角三角形, 利用勾股定理求得球的半径.

四、解答题: 本题共 5 小题, 其中第 15 题 13 分, 第 16, 17 题 15 分, 第 18, 19 题 17 分, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{DB}$, P 为线段 AD 的中点, 记 $\overrightarrow{CB} = \vec{a}, \overrightarrow{CA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CP} = m\vec{a} + n\vec{b}, m, n \in \mathbb{R}$.

(1) 求 $m+n$ 的值;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, $a=2$, $\angle ACB = \frac{\pi}{3}$, 求线段 CP 的长度.

【答案】(1) $m+n = \frac{5}{6}$;

(2) $\frac{\sqrt{19}}{3}$.

【解析】

【分析】(1) 利用向量的线性运算, 结合平面向量基本定理计算得解.

(2) 利用三角形面积公式求出 b , 再利用向量数量积的运算律计算即得.

【小问 1 详解】

由 P 为线段 AD 的中点, $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{DB}$, 得 $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$,

即 $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$, 而 $\overrightarrow{CP} = m\vec{a} + n\vec{b}$, 且 $\vec{a}, \vec{b}$ 不共线,

因此 $m = \frac{1}{3}, n = \frac{1}{2}$, 所以 $m+n = \frac{5}{6}$.

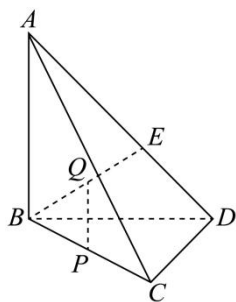
【小问 2 详解】

由 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$ ，即 $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$ ，且 $\angle ACB = \frac{\pi}{3}$ ，

得 $\frac{1}{2}CA \cdot CB \sin \angle ACB = \sqrt{3}$ ，即 $ab = 4$ ，而 $a = 2$ ，因此 $b = 2$ ，

$$\begin{aligned} \text{所以 } |\overrightarrow{CP}| &= \sqrt{\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}\vec{a}^2 + \frac{1}{4}\vec{b}^2 + \frac{1}{3}\vec{a} \cdot \vec{b}} = \sqrt{\frac{1}{9}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{3}ab \cos \frac{\pi}{3}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{9} \times 2^2 + \frac{1}{4} \times 2^2 + \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{19}}{3}. \end{aligned}$$

16. 我国古代数学名著《九章算术》中，称四面都为直角三角形的三棱锥为“鳖臑”. 如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中， $AB \perp$ 平面 BCD , $BC \perp CD$.



(1) 证明：三棱锥 $A-BCD$ 为鳖臑；

(2) 若 E 为 AD 上一点，点 P, Q 分别为 BC, BE 的中点. 平面 DPQ 与平面 ACD 的交线为 l .

①证明：直线 $PQ \parallel$ 平面 ACD ；

②判断 PQ 与 l 的位置关系，并证明你的结论.

【答案】(1) 证明见解析；

(2) ①证明见解析；②平行，证明见解析.

【解析】

【分析】(1) 利用线面垂直的性质及判定定理即可求解；

(2) ①利用三角形的中位线定理及线面平行的判定定理即可求解；

②利用①的结论及线面平行的性质定理即可求解.

【小问 1 详解】

$\because BC \perp CD$,

$\therefore \triangle BCD$ 为直角三角形，

$\because AB \perp$ 平面 BCD ，且 $BD \subset$ 平面 BCD ， $BC \subset$ 平面 BCD ， $CD \subset$ 平面 BCD ，

$\therefore AB \perp BC$ ， $AB \perp BD$ ， $AB \perp CD$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 为直角三角形,

$\because BC \cap AB = B$, $BC \subset \text{平面 } ABC$, $AB \subset \text{平面 } ABC$,

$\therefore CD \perp \text{平面 } ABC$,

又 $\because AC \subset \text{平面 } ABC$,

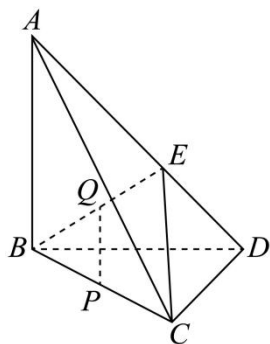
$\therefore CD \perp AD$,

$\therefore \triangle ACD$ 为直角三角形,

$\therefore$ 三棱锥 $A-BCD$ 为鳖臑.

【小问 2 详解】

①



连接 CE , $\because$ 点 P, Q 分别为 BC, BE 的中点,

$\therefore PQ \parallel CE$,

且 $PQ \not\subset \text{平面 } ACD$, $CE \subset \text{平面 } ACD$,

所以直线 $PQ \parallel \text{平面 } ACD$,

② 平行,

证明: $PQ \parallel \text{平面 } ACD$, $PQ \subset \text{平面 } DPQ$, $\text{平面 } DPQ \cap \text{平面 } ACD = l$,

所以 $PQ \parallel l$.

17. 在① $\cos A = \frac{2c-a}{2b}$, ② $b \cos C = (2a-c) \cos B$ 中任选一个作为已知条件, 补充在下列问题中, 并作

答.

问题: 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知_____.

(1) 求 B ;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 1, 且 $\cos A \cos C = -\frac{1}{8}$, 求 $a+c$.

注：若选择不同条件分别作答，则按第一个解答计分.

【答案】(1) $B = \frac{\pi}{3}$;

(2) $a + c = \frac{\sqrt{30}}{2}$.

【解析】

【分析】(1) 选择条件①根据余弦定理边角互化可求解，选择条件②根据正弦定理边化角结合三角恒等变换求解；

(2) 根据余弦的和差角公式可得 $\sin A \sin C = \frac{3}{8}$ ，进而利用正弦定理可得 $ac = \frac{3}{2}$ ， $b = \sqrt{3}$ ，由余弦定理即可求解 $a + c$.

【小问 1 详解】

选择条件①：因为 $\cos A = \frac{2c - a}{2b}$,

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理可得 $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2c - a}{2b}$ ，化简得 $a^2 + c^2 - b^2 = ac$,

由余弦定理可得 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{ca}{2ac} = \frac{1}{2}$,

因为 $B \in (0, \pi)$ ，所以 $B = \frac{\pi}{3}$.

选择条件②：因为 $b \cos C = (2a - c) \cos B$ ，由正弦定理得，

$$\sin B \cos C + \sin C \cos B = 2 \sin A \cos B.$$

$$\text{即 } \sin(B + C) = 2 \sin A \cos B,$$

$$\text{则 } \sin A = 2 \sin A \cos B,$$

因为 $A \in (0, \pi)$ ， $\sin A \neq 0$ ，所以 $\cos B = \frac{1}{2}$,

因为 $B \in (0, \pi)$ ，所以 $B = \frac{\pi}{3}$.

【小问 2 详解】

因为 $B = \frac{\pi}{3}$ ，所以 $A + C = \frac{2\pi}{3}$ ，即 $\cos(A + C) = -\frac{1}{2}$ ，

即 $\cos A \cos C - \sin A \sin C = -\frac{1}{2}$ ，又因为 $\cos A \cos C = -\frac{1}{8}$ ，

所以 $\sin A \sin C = \frac{3}{8}$.

由于 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 $R=1$ ，由正弦定理可得 $\sin A \sin C = \frac{a}{2} \cdot \frac{c}{2}$ ，

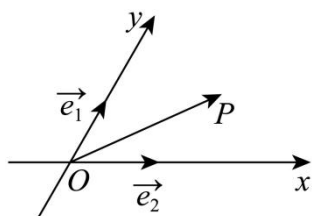
可得 $ac = \frac{3}{2}$ ，

所以 $b = 2R \sin B = \sqrt{3}$ ，

由余弦定理可得 $b^2 = a^2 + c^2 - ac \cos B = (a+c)^2 - 3ac = 3$ ，

所以 $a+c = \frac{\sqrt{30}}{2}$ 。

18. 我们把由平面内夹角成 60° 的两条数轴 Ox ， Oy 构成的坐标系，称为“广义坐标系”。如图所示， $\vec{e}_1$ ， $\vec{e}_2$ 分别为 Ox ， Oy 正方向上的单位向量。若向量 $\vec{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ ，则称有序实数对 $\{x, y\}$ 为向量 $\vec{OP}$ 的“广义坐标”，可记作 $\vec{OP} = \{x, y\}$ 。



(1) 已知 $\vec{a} = \{1, 2\}$ ， $\vec{b} = \{2, -1\}$ ，求 $\vec{a} + \vec{b}$ ， $2\vec{a} - \vec{b}$ 的“广义坐标”；

(2) 已知 $\vec{a} = \{x_1, y_1\}$ ， $\vec{b} = \{x_2, y_2\}$ ，求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ；

(3) 已知 $\vec{a} = \{x_1, y_1\}$ ， $\vec{b} = \{x_2, y_2\}$ ，求证： $\vec{a} // \vec{b}$ 的充要条件是 $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$ 。

【答案】(1) $\vec{a} + \vec{b} = \{3, 1\}$ ， $2\vec{a} - \vec{b} = \{0, 5\}$ ；

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 + x_2 y_1)$ ；

(3) 证明见解析。

【解析】

【分析】(1) 根据已知条件及向量的坐标运算即可求解；

(2) 利用向量的数量积公式及数量积的运算律即可求解；

(3) 根据已知条件及向量的共线定理即可求解。

【小问 1 详解】

因为 $\vec{a} = \{1, 2\}$ ， $\vec{b} = \{2, -1\}$ ，

所以 $\vec{a} + \vec{b} = \{3, 1\}$ ， $2\vec{a} - \vec{b} = \{0, 5\}$

【小问 2 详解】

因为 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ 两分别为 Ox , Oy 正方向上的单位向量, 且夹角为 60° ,

$$\text{所以 } \vec{e_1} \cdot \vec{e_2} = |\vec{e_1}| |\vec{e_2}| \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \{x_1, y_1\} \cdot \{x_2, y_2\} = (x_1 \vec{e_1} + y_1 \vec{e_2}) \cdot (x_2 \vec{e_1} + y_2 \vec{e_2}) \\ &= x_1 x_2 \vec{e_1}^2 + x_1 y_2 \vec{e_1} \cdot \vec{e_2} + x_2 y_1 \vec{e_1} \cdot \vec{e_2} + y_1 y_2 \vec{e_2}^2 \\ &= x_1 x_2 |\vec{e_1}|^2 + \frac{1}{2} x_1 y_2 + \frac{1}{2} x_2 y_1 + y_1 y_2 |\vec{e_2}|^2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + \frac{1}{2} (x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + \frac{1}{2} (x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

【小问 3 详解】

必要性: 若 $\vec{b} = \vec{0}$, 则 $x_1 \times 0 - 0 \times y_1 = 0$;

若 $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} // \vec{b}$, 则存在 λ , 使得 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$, 即 $\begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \\ y_1 = \lambda y_2 \end{cases}$, 消去 λ 得 $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$;

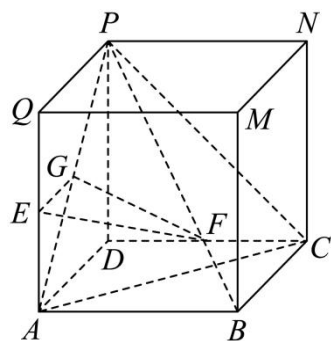
充分性: 当 $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$, 若 $\vec{b} = \vec{0}$, 则 $\vec{a} // \vec{b}$,

$$\text{若 } \vec{b} \neq \vec{0}, \text{ 不妨设 } x_2 \neq 0, \text{ 则 } y_1 = \frac{x_1 y_2}{x_2}, \text{ 则 } \begin{cases} x_1 = \frac{x_1}{x_2} x_2 \\ y_1 = \frac{y_1}{y_2} y_2 \end{cases},$$

则存在 $\lambda = \frac{x_1}{x_2}$, 使得 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$,

所以 $\vec{a} // \vec{b}$.

19. 在直四棱柱 $ABCD-QMNP$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, $PB \perp AC$, E, F, G 分别为线段 AQ, DC, PA 的中点.



(1) 证明: $PA = PC$;

(2) 证明: 平面 $EFG //$ 平面 PBC ;

(3) 若 $PD=1, \angle DAB=60^\circ$ ，当 PA 与平面 PBC 所成角的正弦值最大时，求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析 (3) $\frac{1}{3}$

【解析】

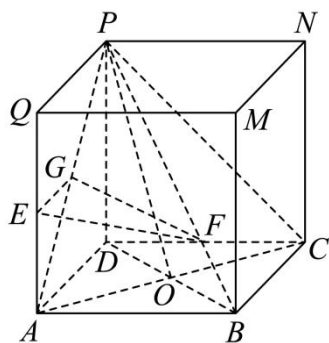
【分析】(1) 连接 BD ，设 $AC \cap BD = O$ ，连接 PO ，通过证明 $AC \perp PO$ 以及 $AO = OC$ 得到 $\triangle PAC$ 为等腰三角形，进而可得结论；

(2) 结 EG 交 PD 于 H ，连结 FH ，通过证明 $EG \parallel$ 平面 PBC 以及 $HF \parallel$ 平面 PBC 可得面面平行；

(3) 利用体积法求点 A 到平面 PBC 的距离 h ，设 PA 与平面 PBC 所成的角为 θ ，表示出 $\sin \theta$ ，求其最值，进而可得体积.

【小问 1 详解】

如图，连接 BD ，设 $AC \cap BD = O$ ，连接 PO .



因为， $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AC \subset$ 平面 $ABCD$ ，故 $PD \perp AC$ ，

而 $PB \perp AC$ ， $PB \cap PD = P$ ， $PB, PD \subset$ 平面 PDB ，

故 $AC \perp$ 平面 PDB ，而 $PO \subset$ 平面 PDB ，故 $AC \perp PO$ ，

由四边形 $ABCD$ 为平行四边形可得 $AO = OC$ ，

故 $\triangle PAC$ 为等腰三角形，即 $PA = PC$ ；

【小问 2 详解】

延长 EG 交 PD 于 H ，连结 FH ，由中位线性质的可得 $EG \parallel PQ$ ，且 $PQ \parallel BC$ ，所以 $EG \parallel BC$ ，

因为 $EG \not\subset$ 平面 PBC ， $BC \subset$ 平面 PBC ，所以 $EG \parallel$ 平面 PBC ，

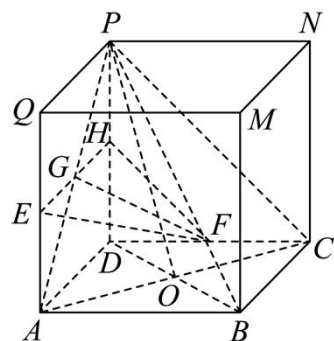
可得 H 为 PD 中点，所以 $FH \parallel PC$ ，

因为 $HF \not\subset$ 平面 PBC ， $PC \subset$ 平面 PBC ，

所以 $HF \parallel$ 平面 PBC ，

因为 $EG \perp HF = H, EG \subset \text{平面 } PBC, HF \subset \text{平面 } PBC$,

所以平面 $EFG \parallel \text{平面 } PBC$;



【小问 3 详解】

设 $AD = x, x > 0$,

由 (1) 可得 $AC \perp \text{平面 } PDB$, 而 $BD \subset \text{平面 } PDB$, 故 $AC \perp BD$,

故四边形 $ABCD$ 为菱形, 而 $\angle DAB = 60^\circ$, 故 $BD = AB = x$.

因为 $PD \perp \text{平面 } ABCD$, $AD \subset \text{平面 } ABCD$, 故 $PD \perp AD$,

故 $PA = \sqrt{x^2 + 1}$, 同理 $PC = PB = \sqrt{x^2 + 1}$.

而 $BC = x$, 故 $S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} \times x \times \sqrt{x^2 + 1 - \frac{1}{4}x^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{4}x^4 + x^2}$.

设 d 为点 A 到平面 PBC 的距离, PA 与平面 PBC 所成的角为 θ ,

故 $\sin \theta = \frac{d}{PA} = \frac{d}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

又 $V_{P-ABC} = \frac{1}{3} \times PD \times S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle ABD} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times x^2 = \frac{\sqrt{3}}{12} x^2$,

而 $V_{A-PBC} = \frac{1}{3} \times d \times S_{\triangle PBC} = \frac{1}{3} \times d \times \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{4}x^4 + x^2}$,

故 $\frac{1}{3} \times d \times \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{4}x^4 + x^2} = \frac{\sqrt{3}}{12} x^2$, 故 $d = \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{3x^2 + 4}}$,

故 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3x^2 + \frac{4}{x^2} + 7}} \leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\sqrt{12} + 7}} = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 3$,

当且仅当 $x^4 = \frac{4}{3}$ 即 $x = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$ 时等号成立,

$$\text{故此时 } V_{P-ABCD} = \frac{1}{3} \times 1 \times AD \times AB \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \times x^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}.$$

【点睛】方法点睛：线面角 θ 可以通过体积法求出点到面的距离 h 后，利用 $\sin \theta = \frac{h}{l}$ （ l 为斜线段的长度）来表示，可以避免建系产生的复杂计算.