

2024~2025 学年度苏锡常镇高三教学情况调研（一）

数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，，写在本试卷上无效。
3. 本卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 i 为虚数单位，复数 z 满足 $z(1+i)=2$ ，则 $|z| =$ ()
A. $\sqrt{2}$ B. 1 C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$
2. “ $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$ ”是“ $2^a > 2^b$ ”的 ()
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 已知平面向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 是两个单位向量， $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量为 $\frac{1}{2}\vec{b}$ ，则 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) =$ ()
A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$
4. 已知 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_4 = 4a_3 - 4a_2$ ，则 $\frac{S_4}{a_1 + a_2} =$ ()
A. 5 B. 9 C. -9 D. -5
5. 已知 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{3}{5}$ ， $\tan \alpha = 2 \tan \beta$ ，则 $\sin(\alpha - \beta) =$ ()
A. $-\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{5}$
6. 已知一圆柱内接于半径为 1 的球，当该圆柱的体积最大时，其高为 ()
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
7. 在空间中，过点 A 作平面 τ 的垂线，记垂足 $B = f^{\tau}(A)$ 。设两个不同平面 α, β ，对任意一点 P，

$M = f^{\alpha}(f^{\beta}(P))$, $N = f^{\beta}(f^{\alpha}(P))$, 恒有 $|\overrightarrow{PM}| = |\overrightarrow{PN}|$ 成立, 则 ()

- A. $\alpha // \beta$ B. α, β 的夹角为 45° C. α, β 的夹角为 60° D. $\alpha \perp \beta$

8. 我市某校共有 1500 名学生在学校用午餐, 每次午餐只能选择在楼上或楼下的一个食堂用餐, 经统计, 当天在楼上食堂用午餐的学生中, 有 10% 的学生第二天会到楼下食堂用午餐; 而当天在楼下食堂用午餐的学生中, 有 15% 的学生第二天会到楼上食堂用午餐, 则一学期后, 在楼上食堂用午餐的学生数大约为 ()

- A. 700 B. 800 C. 900 D. 1000

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分, 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 某中学举行数学史知识竞赛, 其中 6 个小组的比赛成绩分别为: 70, 85, 89, 75, 96, 89, 则这组数据的 ()

- A. 极差为 26 B. 中位数大于平均数 C. 方差为 472 D. 下四分位数为 75

10. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$, 其导函数为 $f'(x)$, 则 ()

- A. 直线 $y = -2x$ 是曲线 $y = f(x)$ 的切线
B. $f(x)$ 有三个零点
C. $f'(2-x) = f'(x)$
D. 若 $f(x)$ 在区间 $(a, a+4)$ 上有最大值, 则 a 的取值范围为 $(-4, 0)$

11. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 点 P 满足 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD} + z\overrightarrow{AA_1}$, 其中 $x, y, z \in [0, 1]$, 则 ()

- A. 当 $x = y, y \neq 0, z \neq 0$ 时, $B_1B //$ 平面 ACP
B. 当 $x = y = z, z \neq 0$ 时, 异面直线 AP 与 BC 所成的角为 45°
C. 当 $x + y = 1, z = 0$ 时, $D_1P \perp A_1C_1$
D. 当 $x + y + z = 1$ 时, 线段 AP 的长度最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 请写出一个同时满足以下三个条件的函数 $f(x) =$ _____.

① $f(-x)+f(x)=0$, ② $f(x+\pi)=f(x)$, ③ $f(x)$ 不是常数函数.

13. 已知抛物线 $C_1: x^2=4y$, $C_2: x^2=-8y$ 的焦点分别为 F_1, F_2 , 一条平行于 y 轴的直线分别与 C_1, C_2 交于 A, B 两点. 若 $|AF_1|=|BF_2|$, 则四边形 AF_1F_2B 的周长为_____.

14. 在一个不透明的袋子中装有 4 个形状大小相同, 颜色互不相同的小球. 某人先后两次任意摸取小球 (每次至少摸取 1 个小球), 第一次摸取后记下摸到的小球颜色, 再将摸到的小球放回袋中; 第二次摸取后, 也记下摸到的小球颜色. 则“两次记下的小球颜色能凑齐 4 种颜色, 且恰有一种颜色两次都被记下”的概率为_____.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $2b\cos C = 2a + \sqrt{2}c$.

(1) 求 B ;

(2) 若 $b = \sqrt{13}$, $c = 2\sqrt{2}$, D 为 AC 的中点, 求 BD .

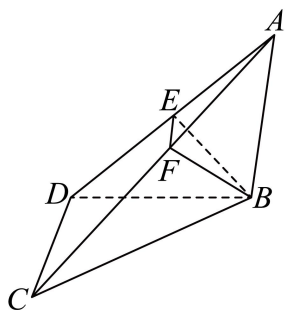
16. 在① $S_n = n^2 - 2^n$; ② $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n}$; ③ $2\sqrt{S_n} - 1 = a_n$ 这三个条件中, 请选择一个合适的条件, 补充在下题横线上 (只要写序号), 并解答该题.

已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 其前 n 项和为 S_n , 且对任意正整数 n , 有_____.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{a_{n+1}}{S_n \cdot S_{n+1}}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 证明: $\frac{3}{4} \leq T_n < 1$.

17. 如图, 在四面体 $ABCD$ 中, $AB = BD = 2$, $\angle ADC = \angle BDC = 90^\circ$, 点 E 为棱 AD 的中点, 点 F 为棱 AC 上的动点.



(1) 求证: 平面 $ACD \perp$ 平面 BEF ;

(2) 已知二面角 $A-DC-B$ 的大小为 30° , 当直线 BF 与平面 ACD 所成角的正弦值的最大值为 $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ 时,

求此时四面体 $ABEF$ 的体积.

18. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右顶点 A 到其渐近线的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 点 $B(2,1)$ 在 C 的渐近线上, 过 B 的直线 l 与 C 交于 P, Q 两点, 直线 AP, AQ 分别与 y 轴交于 M, N 两点.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若 $\triangle APQ$ 的面积为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$, 求 l 的方程;

(3) 证明: 线段 MN 的中点为定点.

19. 我们把 $d = b - a (a < b)$ 称为区间 $[a, b]$ 的长度. 若函数 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数, 且存在

$[a, b] \subseteq I$, 使得 $\{f(x) | x \in [a, b]\} = [a, b]$, 则称 $[a, b]$ 为 $f(x)$ 的自映射区间. 已知函数

$f(x) = x - \sin x (x \in I)$, $g(x) = m \ln x (m > 0)$.

(1) 若 $I = [-10, 10]$, 任取 $f(x)$ 的一个自映射区间, 求其区间的长度 $d > \pi$ 的概率;

(2) 若 $g(x)$ 存在自映射区间 $[a, b]$,

①求 m 的取值范围;

②求证: $ab > e^2$, 且 $[a, b]$ 的长度 $d > 2\sqrt{m^2 - em}$.