

024 年九年级第一次模拟考试

数学试题

本试卷分试题和答题卡两部分,所有答案一律写在答题卡上.考试时间为120分钟.试卷满分150分.

注意事项:

1.答卷前,考生务必用0.5毫米黑色墨水签字笔将自己的姓名等个人信息填写在答题卡的相应位置上,并认真核对条形码上的姓名等个人信息是否与本人的相符合.

2.答选择题必须用2B铅笔将答题卡上对应题目中的选项标号涂黑.如需改动,请用橡皮擦干净后,再选涂其他答案.答非选择题必须用0.5毫米黑色墨水签字笔作答,写在答题卡上各题目指定区域内相应的位置,在其他位置答题一律无效.

3.作图必须用2B铅笔作答,并请加黑加粗,描写清楚.

4.卷中除要求近似计算的结果取近似值外,其他均应给出精确结果.

一、选择题(本大题共10小题,每小题3分,共30分.在每小题所给出的四个选项中,只有一项是正确的,请用2B铅笔把答题卡上相应的选项标号涂黑.)

1. 9的算术平方根是()

A. ± 3

B. -3

C. 3

D. 9

【答案】C

【解析】

【分析】根据算术平方根的定义求解.

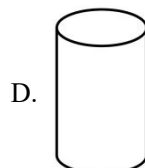
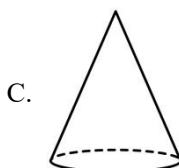
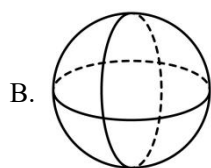
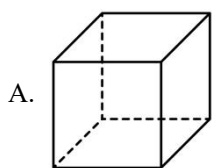
【详解】解: $\because 3^2 = 9$,

$\therefore 9$ 的算术平方根是3.

故选:C.

【点睛】本题考查了算术平方根的定义,解题的关键是掌握正数的算术平方根是正的平方根,0的算术平方根是0,负数没有算术平方根.

2. 在下面四个几何体中,其左视图不是中心对称图形的是()



【答案】C

【解析】

【分析】根据三视图的知识及中心对称的概念得出结论即可.

【详解】解：根据题意知，A 选项左视图为正方形，是中心对称图形，故该选项不符合题意；

B 选项左视图为圆，是中心对称图形，故该选项不符合题意；

C 选项左视图为等腰三角形，不是中心对称图形，故该选项符合题意；

D 选项左视图为矩形，是中心对称图形，故该选项不符合题意；

故选：C.

【点睛】本题主要考查左视图和中心对称的知识，熟练掌握三视图和中心对称的知识是解题的关键.

3. 下列多项式中，不能因式分解的是（ ）

A. $x^2 - 2x + 1$

B. $x^2 - 9$

C. $x^2 + 1$

D. $6x^2 + 3x$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了因式分解，根据公式法因式分解以及提公因式与公式法综合因式分解的方法逐项进行判断即可.

【详解】解：A、 $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ ，可以因式分解，不符合题意；

B、 $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$ ，可以因式分解，不符合题意；

C、 $x^2 + 1$ ，不能因式分解，符合题意；

D、 $6x^2 + 3x = 3x(2x + 1)$ ，可以因式分解，不符合题意；

故选：C.

4. 某校为了了解全校 965 名学生的课外作业负担情况，随机对全校 100 名学生进行了问卷调查，下面说法正确的是（ ）

A. 总体是全校 965 名学生

B. 个体是每名学生的课外作业负担情况

C. 样本是 100

D. 样本容量是 100 名

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查直接利用总体、个体、样本容量、样本的定义，掌握各定义是解题的关键直接利用总体、个体、样本容量、样本的定义逐项分析即可解答.

【详解】解：A、总体是全校 965 名学生的课外作业负担情况，故此选项错误；

B、个体是每名学生的课外作业负担情况，故此选项正确；

C、样本是 100 名学生的课外作业负担情况，故此选项错误；

D、样本容量是 100，故此选项错误。

故选 B。

5. 下列命题中属于假命题的是（ ）

A. 同位角相等，两直线平行

B. 菱形的对角线互相垂直

C. 三个角是直角的四边形是矩形

D. 三点确定一个圆

【答案】D

【解析】

【分析】根据平行线的判定、菱形的性质、矩形的判定及确定圆的条件进行判断即可。

【详解】解：同位角相等，两直线平行是真命题，故 A 不符合题意；

菱形的对角线互相垂直是真命题，故 B 不符合题意；

三个角是直角的四边形是矩形是真命题，故 C 不符合题意；

三点确定一个圆是假命题，故 D 符合题意；

故选：D。

【点睛】本题考查命题的真假判定、平行线的判定、菱形的性质、矩形的判定及确定圆的条件，熟练掌握相关定理是解题的关键。

6. 一个圆锥的底面半径为 6cm ，母线长为 9cm ，则该圆锥的侧面积为（ ）

A. 54cm^2

B. $54\pi\text{cm}^2$

C. 108cm^2

D. $108\pi\text{cm}^2$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查求圆锥的侧面积，根据圆锥的侧面积公式，进行求解即可。

【详解】解：由题意，得：该圆锥的侧面积为 $\pi \times 6 \times 9 = 54\pi\text{cm}^2$ ；

故选 B。

7. 我国古代著作《四元玉鉴》记载“买椽多少”问题：“六贯二百一十钱，倩人去买几株椽。每株脚钱三文足，无钱准与一株椽。”其大意为：现请人代买一批椽，这批椽的价钱为 6210 文。如果每件椽的运费是 3 文，那么少拿一株椽后，剩下的椽的运费恰好等于一株椽的价钱，试问 6210 文能买多少株椽？设这批椽的数量为 x 株，则符合题意的方程是（ ）

A. $3(x-1) = \frac{6210}{x}$

B. $\frac{6210}{x-1} = 3$

C. $3x-1 = \frac{6210}{x}$

D. $\frac{6210}{x} = 3$

【答案】A

【解析】

【分析】根据“这批椽的价钱为 6210 文”、“每件椽的运费为 3 文，剩下的椽的运费恰好等于一株椽的价钱”列出方程解答．

【详解】解：由题意得： $3(x-1) = \frac{6210}{x}$ ，

故选 A．

【点睛】本题考查了分式方程的应用．解题关键是要读懂题目的意思，根据题目给出的条件，找出合适的等量关系，列出方程，再求解，准确的找到等量关系并用方程表示出来是解题的关键．

8. 阅读理解：为了解决负数开平方问题，数学家大胆的引入一个符号 i ，把 i 叫做虚数单位，并且规定 $i^2 = -1$ ，

我们把形如 $a+bi$ （ a 、 b 为实数）的数叫做复数．复数的四则运算与整式的四则运算类似．例如：

$$(8+2i)+(2-i)=(8+2)+(2i-i)=10+(2-1)i=10+i；$$

$$(4+i)(3-2i)=4\times 3-8i+3i-2i^2=12-5i-2\times(-1)=12-5i+2=14-5i．$$

根据以上信息， $(5+2i)(5-2i)$ 的运算结果是（ ）

A. 21

B. 29

C. $25-4i$

D. $25+4i$

【答案】B

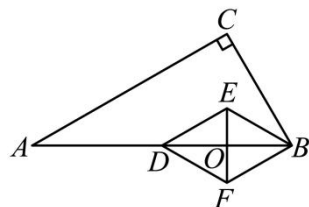
【解析】

【分析】本题主要考查了运用平方差公式进行运算、有理数混合运算等知识，理解虚数单位 i 是解题关键．首先根据平方公式进行运算得到 $25-4i^2$ ，然后将 $i^2 = -1$ 代入求解即可．

【详解】解： $(5+2i)(5-2i)=5^2-(2i)^2=25-4i^2=25-4\times(-1)=29$ ．

故选：B．

9. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ， $AC = 9$ ， D 为 AB 中点，以 DB 为对角线长作边长为 3 的菱形 $DFBE$ ，现将菱形 $DFBE$ 绕点 D 顺时针旋转一周，旋转过程中当 BF 所在直线经过点 A 时，点 A 到菱形对角线交点 O 之间的距离为（ ）



A. $\frac{4}{3}\sqrt{21}$

B. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$

C. $\frac{4}{3}\sqrt{21}$ 或 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$

D. $\frac{3}{2}\sqrt{21}$ 或 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了菱形的性质，解直角三角形，含 30° 度角的直角三角形的性质和勾股定理. 先求得 $\triangle DEF$ 是等边三角形，分两种情况讨论，当 $DF \perp AB$ 时， BF 所在直线经过点 A ，作 $OG \perp AB$ 于点 G ，再利用勾股定理求解；当 A 与 B' 重合时， BF 所在直线经过点 A ，据此求解即可.

【详解】解： $\because \angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ， $AC = 9$ ， D 为 AB 中点，

$$\therefore BC = AC \cdot \tan 30^\circ = 3\sqrt{3}, \quad AB = 2BC = 6\sqrt{3}, \quad B'D = AD = BD = \frac{1}{2}AB = 3\sqrt{3},$$

$\because$ 菱形 $DFBE$ 边长为 3，

$$\therefore EF \perp DB', \quad B'O = OD = \frac{1}{2}B'D = \frac{3}{2}\sqrt{3},$$

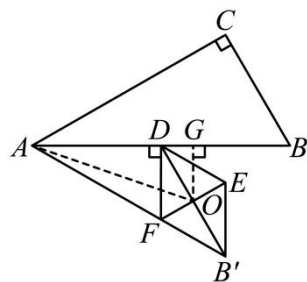
$$\therefore OE = \sqrt{DE^2 - DO^2} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore EF = 2OE = 3 = DE,$$

$$\therefore \triangle DEF \text{ 是等边三角形, } \angle FDO = \angle ODE = \frac{1}{2}\angle FDE = 30^\circ,$$

当 $DF \perp AB$ 时， BF 所在直线经过点 A ，

作 $OG \perp AB$ 于点 G ，连接 AO ，

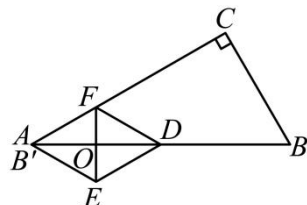


$$\therefore \angle ODG = 90^\circ - \angle FDO = 60^\circ,$$

$$\therefore DG = \frac{1}{2}DO = \frac{3}{4}\sqrt{3}, \quad OG = \sqrt{DO^2 - DG^2} = \frac{9}{4},$$

$$\therefore AO = \sqrt{AG^2 + OG^2} = \frac{3}{2}\sqrt{21};$$

当 A 与 B' 重合时， BF 所在直线经过点 A ，



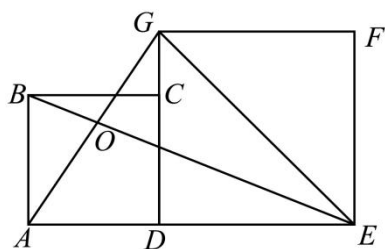
$$\text{此时, } AO = B'O = \frac{3}{2}\sqrt{3},$$

综上点 A 到菱形对角线交点 O 之间的距离为 $\frac{3}{2}\sqrt{21}$ 或 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ ，

故选：D.

10. 如图， $AE = 10$ ， D 为 AE 上一点（端点除外），分别以 AD 、 DE 为边长，在 AE 同侧作正方形 $ADCB$

和正方形 $DEFG$ ，连接 BE 、 GE ，连接 AG 交 BE 于点 O 。设 $DE = x$ ， $\triangle OEG$ 的面积为 y ，则 y 关于 x 的函数表达式为（ ）



A. $y = \frac{5x^3}{10(10-x) + x^2}$

B. $y = \frac{5(10-x)^3}{10x + (10-x)^2}$

C. $y = \frac{5}{3}x$

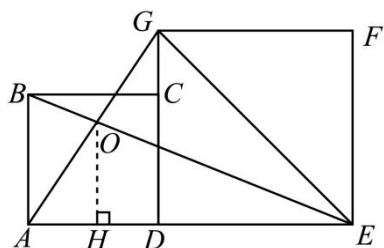
D. $y = (x-5)^2 + \frac{25}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查相似三角形的判定和性质，正方形的性质，过点 O 作 $OH \perp AE$ ，设 $AH = a$ ，证明 $\triangle AOH \sim \triangle AGD$ ， $\triangle EOH \sim \triangle EBA$ ，列出比例式，用含 x 的式子表示 a ，进而表示出 OH 的长，根据 $S_{\triangle OGE} = S_{\triangle AGE} - S_{\triangle AOE}$ ，列出函数关系式即可。

【详解】解：过点 O 作 $OH \perp AE$ ，



$\because$ 正方形 $ADCB$ 和正方形 $DEFG$ ，

$\therefore AB \perp AE, DG \perp AE$ ，

$\therefore OH \parallel AB \parallel DG$ ，

$\therefore \triangle AOH \sim \triangle AGD, \triangle EOH \sim \triangle EBA$ ，

$$\therefore \frac{OH}{AB} = \frac{EH}{AE}, \frac{OH}{DG} = \frac{AH}{AD},$$

$\because AE = 10, DE = x$ ，

$\therefore AB = AD = AE - DE = 10 - x, DG = DE = x$ ，

设 $AH = a$ ，则 $EH = AE - AH = 10 - a$ ，

$$\therefore \frac{OH}{10-x} = \frac{10-a}{10}, \frac{OH}{x} = \frac{a}{10-x},$$

$$\therefore OH = \frac{(10-a)(10-x)}{10} = \frac{ax}{10-x},$$

$$\therefore a = -\frac{10(x-10)^2}{-x^2+10x-100},$$

$$\therefore OH = \frac{-\frac{10(x-10)^2}{-x^2+10x-100} \cdot x}{10-x} = \frac{10x(x-10)}{-x^2+10x-100},$$

$$\therefore S_{\triangle OGE} = S_{\triangle AGE} - S_{\triangle AOE},$$

$$\text{即: } y = \frac{1}{2} AE \cdot DG - \frac{1}{2} AE \cdot OH$$

$$= \frac{1}{2} \times 10x - \frac{1}{2} \times 10 \cdot \frac{10x(x-10)}{-x^2+10x-100}$$

$$= 5x - \frac{50x(x-10)}{-x^2+10x-100}$$

$$= \frac{-5x^3+50x^2-500x-50x^2+500x}{-x^2+10x-100}$$

$$= \frac{-5x^3+50x^2-500x-50x^2+500x}{-x^2+10x-100}$$

$$= \frac{-5x^3}{-x^2+10x-100}$$

$$= \frac{5x^3}{x^2-10x+100}$$

$$= \frac{5x^3}{10(10-x)+x^2};$$

故选 A.

二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分，其中第 18 题第一空 1 分，第二空 2 分.不需写出解答过程，只需把答案直接填写在答题卡上相应的位置.）

11. 函数 $y = \frac{2}{x+1}$ 中，自变量 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \neq -1$

【解析】

【详解】根据分式有意义的条件是分母不为0，可得 $x+1 \neq 0$ ，

解得 $x \neq -1$ ，

故答案为： $x \neq -1$ 。

【点睛】考点：函数自变量的取值范围；分式有意义的条件。

12. 今年春节，无锡首条市域轨交S1线也实行为期9天的免费乘坐，引发了往来锡澄两地的万千市民的搭乘热情。免费期间S1线总客流量达到约2287000人次，数据2287000用科学记数法表示为_____。

【答案】 2.287×10^6

【解析】

【分析】本题主要考查了科学记数法，将数据表示成形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 < |a| < 10$ ， n 为整数，正确确定 a 、 n 的值是解题的关键。

将2287000写成 $a \times 10^n$ 其中 $1 < |a| < 10$ ， n 为整数的形式即可。

【详解】解： $2287000 = 2.287 \times 10^6$ 。

故答案为： 2.287×10^6 。

13. 若某函数图象经过点 $(1, 2)$ ，且函数值 y 随着自变量 x 的增大而增大，请写出一个符合上述条件的函数表达式：_____。

【答案】 $y = 2x$ （答案不唯一）

【解析】

【分析】本题考查的是一次函数的性质。设此函数的解析式为 $y = kx (k > 0)$ ，再把点 $(1, 2)$ 代入求出 k 的值即可。

【详解】解：① 函数值 y 随着自变量 x 的增大而增大，

∴ 设此函数的解析式为 $y = kx (k > 0)$ ，

② 函数图象经过点 $(1, 2)$ ，

∴ $2 = k \times 1$ ，

解得 $k = 2$ ，

∴ 函数解析式为： $y = 2x$ 。

故答案为： $y = 2x$ （答案不唯一）.

14. 某超市一月份的利润为 10 万元，三月份的利润为 12.1 万元，设第一季度平均每月利润增长的百分率是 x ，则根据题意可得方程为_____.

【答案】 $10(1+x)^2 = 12.1$

【解析】

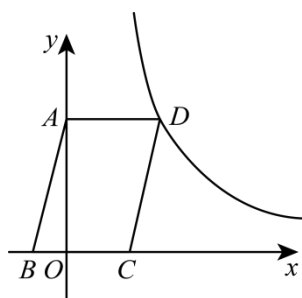
【分析】 本题考查了一元二次方程的应用中增长率的问题，熟练掌握增长率的计算公式和方法是解题的关键，设平均每月增长率为 x ，根据等量关系“一月份的利润乘以（1+平均每月增长率的百分率）的平方等于三月份的利润”，列出方程即可求解.

【详解】 解：设平均每月增长率为 x ，根据题意得：

$$10(1+x)^2 = 12.1,$$

故答案为： $10(1+x)^2 = 12.1$.

15. 如图， $\Psi ABCD$ 的点 A 在 y 轴上， BC 在 x 轴上，点 D 在某反比例函数的图像上，已知 $\Psi ABCD$ 的面积为 5，则该反比例函数表达式为_____.

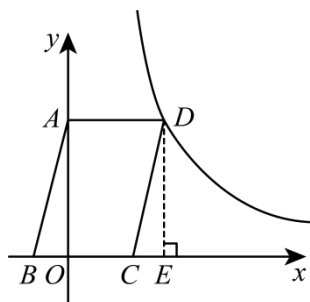


【答案】 $y = \frac{5}{x}$

【解析】

【分析】 本题考查反比例函数和全等三角形的判定，熟练掌握反比例函数中面积和系数 k 的关系是解题的关键，利用平行四边形证明 $\triangle ABO \cong \triangle DCE$ ，从而得到 $k = 5$ ，进而得到反比例函数解析式.

【详解】 解：如图，作 $DE \perp x$ 轴，垂足为 E ，



∵ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$$\therefore AB = CD, AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle ABO = \angle DCE,$$

$$\text{又 } \angle AOB = \angle DEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABO \cong \triangle DCE,$$

$$\therefore S_{\triangle ABO} = S_{\triangle DCE},$$

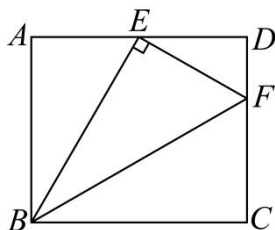
$$\therefore S_{\text{矩形} OADE} = S_{\triangle ABCD} = 5,$$

$$\therefore k = S_{\text{矩形} AOED} = 5,$$

$$\therefore \text{反比例函数解析式: } y = \frac{5}{x},$$

$$\text{故答案为: } y = \frac{5}{x}.$$

16. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, BE 、 BF 将 $\angle ABC$ 三等分, 连接 EF . 若 $\angle BEF = 90^\circ$, 则 $AB:BC$ 的比值为_____.



【答案】 $\sqrt{3}:2$

【解析】

【分析】 本题考查矩形的性质、锐角三角函数. 根据矩形的性质和锐角三角函数, 可以求得 AB 和 BC 的比值, 本题得以解决.

【详解】 解: ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ, \angle A = 90^\circ, \angle C = 90^\circ,$$

∵ BE 、 BF 将 $\angle ABC$ 三等分,

$$\therefore \angle ABE = \angle EBF = \angle FBC = 30^\circ,$$

设 $AE = x$, 则 $BE = 2x$,

$$\therefore AB = \sqrt{BE^2 - AE^2} = \sqrt{3}x,$$

$$\because \angle BEF = 90^\circ, \angle EBF = 30^\circ,$$

$$\therefore EF = BE \cdot \tan 30^\circ = 2x \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}x,$$

$$\therefore BF = 2EF = \frac{4\sqrt{3}}{3}x,$$

$$\therefore BC = BF \cdot \cos 30^\circ = \frac{4\sqrt{3}}{3}x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2x,$$

$$\therefore AB : BC = \sqrt{3}x : 2x = \sqrt{3} : 2,$$

故答案为： $\sqrt{3} : 2$.

17. 已知某二次函数的图象开口向上，与 x 轴的交点坐标为 $(-2, 0)$ 和 $(6, 0)$ ，点 $P(m+4, n_1)$ 和点

$Q(3m-2, n_2)$ 都在函数图象上，若 $n_1 < n_2$ ，则 m 的取值范围为_____.

【答案】 $m < \frac{1}{2}$ 或 $m > 3$

【解析】

【分析】 本题主要考查了二次函数的图象与性质. 依据题意得，抛物线的对称轴是直线 $x = \frac{-2+6}{2} = 2$ ，又二次函数的图象开口向上，越靠近对称轴函数值越小，再结合 $n_1 < n_2$ ，可得 $|m+2| < |3m-4|$ ，进而根据

① $m < -2$ ；② $-2 \leq m \leq \frac{4}{3}$ ；③ $m > \frac{4}{3}$ 分类讨论计算可以得解.

【详解】 解：由题意得，抛物线的对称轴是直线 $x = \frac{-2+6}{2} = 2$.

又二次函数的图象开口向上，

$\therefore$ 越靠近对称轴函数值越小.

又 $n_1 < n_2$ ，

$$\therefore |m+4-2| < |3m-2-2|.$$

$$\therefore |m+2| < |3m-4|.$$

①当 $m < -2$ 时， $-m-2 < 4-3m$ ，

$$\therefore m < 3.$$

$$\therefore m < -2;$$

②当 $-2 \leq m \leq \frac{4}{3}$ 时， $m+2 < 4-3m$ ，

$$\therefore m < \frac{1}{2}.$$

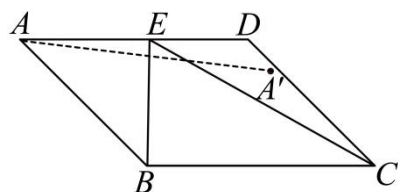
$$\therefore -2 \leq m < \frac{1}{2};$$

③当 $m > \frac{4}{3}$ 时, $m + 2 < 3m - 4$,

$\therefore m > 3$.

综上, $m < \frac{1}{2}$ 或 $m > 3$.

18. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $\angle A = 45^\circ$, $AB = 3$, $AD = 4$, 点 E 为 AD 上一点 (端点除外), 连接 BE 、 CE , 点 A 关于 BE 的对称点记为 A' , 当点 A' 恰好落在线段 EC 上时, 此时 $EC =$ _____, $AE =$ _____.

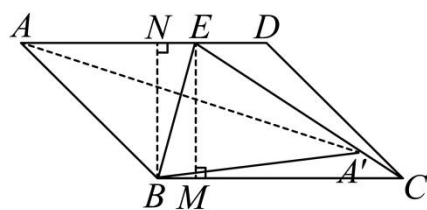


【答案】 ①. 4 ②. $\frac{8+3\sqrt{2}-\sqrt{46}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查平行四边形的性质, 轴对称的性质, 勾股定理, 等腰三角形的判定, 矩形的判定和性质, 关键是由轴对称的性质, 平行线的性质推出 $\angle BEC = \angle CBE$, 由勾股定理求出 CM 的长, 得到 MB 的长. 过 B 作 $BN \perp AD$ 于 N , 过 E 作 $EM \perp BC$ 于 M , 由平行四边形的性质推出 $AD \parallel BC$, 判定四边形 $BMEN$ 是矩形, 得到 $EN = MB$, 判定 $\triangle ABN$ 是等腰直角三角形, 求出 $AN = BN = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 得到 $ME = BN = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 由轴对称的性质得到 $\angle BEC = \angle BEA$, 由平行线的性质推出 $\angle AEB = \angle CBE$, 得到 $\angle BEC = \angle CBE$, 推出 $CE = BC = 4$, 由勾股定理求出 $CM = \sqrt{CE^2 - EM^2} = \frac{\sqrt{46}}{2}$, 得到 $BM = BC - CM = \frac{8 - \sqrt{46}}{2}$, 因此 $NE = \frac{8 - \sqrt{46}}{2}$, 于是得到 $AE = AN + NE = \frac{8 + 3\sqrt{2} - \sqrt{46}}{2}$.

【详解】 解: 过 B 作 $BN \perp AD$ 于 N , 过 E 作 $EM \perp BC$ 于 M ,



① 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$, $BC = AD = 4$,

$\therefore$ 四边形 $BMEN$ 是矩形,

$\therefore EN = MB$,

② $\angle BAD = 45^\circ$,

$\therefore \triangle ABN$ 是等腰直角三角形,

$$\ominus AB=3,$$

$$\therefore AN=BN=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=\frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore ME=BN=\frac{3\sqrt{2}}{2},$$

由轴对称的性质得到: $\angle BEC = \angle BEA$,

$$\ominus AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle CBE,$$

$$\therefore \angle BEC = \angle CBE,$$

$$\therefore CE = BC = 4,$$

$$\therefore CM = \sqrt{CE^2 - EM^2} = \frac{\sqrt{46}}{2},$$

$$\therefore BM = BC - CM = \frac{8 - \sqrt{46}}{2},$$

$$\therefore NE = MB = \frac{8 - \sqrt{46}}{2},$$

$$\therefore AE = AN + NE = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{8 - \sqrt{46}}{2} = \frac{8 + 3\sqrt{2} - \sqrt{46}}{2},$$

$$\text{故答案为: } 4, \frac{8 + 3\sqrt{2} - \sqrt{46}}{2}.$$

三、解答题(本大题共 10 小题, 共 96 分.请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤等.)

19. 计算:

$$(1) (\pi - 3.14)^0 - 2 \cos 45^\circ + \sqrt{2};$$

$$(2) 2(x-3)(x+3) - (1-x)^2.$$

$$\text{【答案】}(1) 1 \quad (2) x^2 + 2x - 19$$

【解析】

【分析】本题考查了整式的混合运算, 完全平方公式, 零指数幂, 特殊角的三角函数值, 实数的运算, 平方差公式, 准确熟练地进行计算是解题的关键.

(1) 先化简各式, 然后再进行计算即可解答;

(2) 利用完全平方公式, 平方差公式进行计算, 即可解答.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } (\pi - 3.14)^0 - 2 \cos 45^\circ + \sqrt{2}$$

$$= 1 - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}$$

$$= 1 - \sqrt{2} + \sqrt{2}$$

$$= 1;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } 2(x-3)(x+3) - (1-x)^2$$

$$= 2(x^2 - 9) - (1 - 2x + x^2)$$

$$= 2x^2 - 18 - 1 + 2x - x^2$$

$$= x^2 + 2x - 19.$$

$$20. (1) \text{解方程: } x^2 - 6x + 4 = 0;$$

$$(2) \text{解方程组: } \begin{cases} \frac{x}{3} - y = 3 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$$

$$\text{【答案】} (1) x_1 = 3 + \sqrt{5}, x_2 = 3 - \sqrt{5}; (2) \begin{cases} x = 6 \\ y = -1 \end{cases}$$

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程的解法，解二元一次方程组，解（1）的关键是掌握一元二次方程的解法：直接开平方法，配方法，公式法，因式分解法等．解（2）的关键是利用代入消元法或加减消元法消去一个未知数．

（1）利用公式法解一元二次方程即可；

（2）方程组整理后，方程组利用加减消元法求解即可．

$$\text{【详解】解: } (1) \Delta = 36 - 16 = 20 > 0 \quad x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$a = 1, \quad b = -6, \quad c = 4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 16 = 20 > 0.$$

$$\therefore x = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2 \times 1} = 3 \pm \sqrt{5}$$

$$\text{即 } x_1 = 3 + \sqrt{5}, \quad x_2 = 3 - \sqrt{5};$$

$$(2) \text{解: } \begin{cases} \frac{x}{3} - y = 3 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$$

$$\text{整理得} \begin{cases} x-3y=9 \text{①} \\ 2x+3y=9 \text{②} \end{cases}$$

$$\text{①}+\text{②} \text{ 得: } 3x=18$$

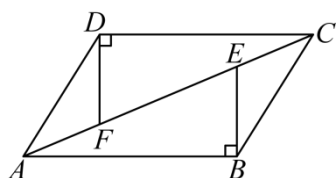
解得 $x=6$,

将 $x=6$ 代入①得 $6-3y=9$

解得 $y=-1$.

$$\therefore \text{原方程组的解为} \begin{cases} x=6 \\ y=-1 \end{cases}.$$

21. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 点 E 、 F 在 AC 上, $BE \perp AB$, $DF \perp CD$.



(1) 求证: $\triangle ABE \cong \triangle CDF$;

(2) 求证: $BE \parallel DF$.

【答案】(1) 详见解析

(2) 详见解析

【解析】

【分析】此题考查了平行四边形的性质、全等三角形的判定与性质, 熟练运用平行四边形的性质、全等三角形的判定与性质是解题的关键.

(1) 根据平行四边形的性质、平行线的性质求出 $AB=CD$, $\angle BAE=\angle DCF$, 根据垂直的定义求出 $\angle ABE=\angle CDF$, 利用 ASA 即可证明 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$;

(2) 根据全等三角形的性质得出 $\angle AEB=\angle CFD$, 根据“内错角相等, 两直线平行”即可得解.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB=CD, \quad AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle BAE=\angle DCF,$$

$$\because BE \perp AB, \quad DF \perp CD,$$

$$\therefore \angle ABE=\angle CDF=90^\circ,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中,

$$\begin{cases} \angle BAE = \angle DCF \\ AB = CD \\ \angle ABE = \angle CDF \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF (ASA);$

【小问 2 详解】

证明： $\triangle ABE \cong \triangle CDF$,

$\therefore \angle AEB = \angle CDF$,

$\therefore BE \parallel DF$.

22. 有三张大小、质地都相同的卡片，正面分别标有数字 -1 ， 1 ， 2 ，将卡片搅匀后背面朝上，任意抽取一张记下数字 a ，不放回，再抽取一张，记下数字 b ，这样就得到了一个点 A 的坐标 (a, b) .

(1) 求点 $A(a, b)$ 恰好在函数 $y = -x + 3$ 的图像上的概率. (请用“画树状图”或“列表”等方法写出分析过程)

(2) 若再增加 $n (n \geq 1)$ 张都标有数字 1 的卡片，与原有三张卡片混合后，按照题目中的抽取方式，所得到的点 $A(a, b)$ 恰好在函数 $y = -x + 3$ 的图像上的概率为_____. (请用含 n 的代数式直接写出结果)

【答案】(1) $\frac{1}{3}$

(2) $\frac{2(n+1)}{(n+3)(n+2)}$

【解析】

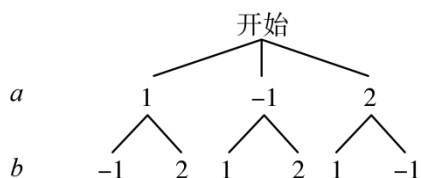
【分析】本题考查列表法与树状图法、概率公式，熟练掌握列表法与树状图法以及概率公式是解答本题的关键.

(1) 列表可得出所有等可能的结果数以及点 $A(a, b)$ 恰好在函数 $y = -x + 3$ 的图像上的结果数，再利用概率公式可得出答案；

(2) 由题意可得，共有 $(n+3)(n+2)$ 种等可能的结果，其中点 $A(a, b)$ 恰好在函数 $y = -x + 3$ 的图像上的结果有 $2(n+1)$ 种，再利用概率公式可得答案.

【小问 1 详解】

解：画出树状图，如下：



共有 6 种等可能的结果，其中点 $A(a,b)$ 恰好在函数 $y = -x + 3$ 的图像上的点有： $(1,2)$ ， $(2,1)$ ，共 2 种，

$\therefore$ 点 $A(a,b)$ 恰好在函数 $y = -x + 3$ 的图像上的概率为： $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ；

【小问 2 详解】

再增加 $n(n \geq 1)$ 张都标有数字 1 的卡片，共有 $(n+3)$ 张卡片，

按照题目中的抽取方式，共有 $(n+3)(n+2)$ 种等可能的结果，

其中点 $A(a,b)$ 恰好在函数 $y = -x + 3$ 的图象上的结果有 $2(n+1)$ 种，

$\therefore$ 点 $A(a,b)$ 恰好在函数 $y = -x + 3$ 的图像上的概率为： $\frac{2(n+1)}{(n+3)(n+2)}$ 。

23. 某职业技术学院准备从本校两名优秀学员中挑选一人参加市级操作技能大赛，以下分别是两名学员在培训期间的先后 8 次操作技能测试的得分情况及统计情况：

表 1：

测试次数	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次	第 6 次	第 7 次	第 8 次
甲学员	82	92	86	a	92	93	92	94
乙学员	96	92	92	80	96	92	79	93

表 2：

	平均数	中位数	众数
甲学员	90	b	92
乙学员	90	92	c

根据以上统计结果回答下列问题：

(1) $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ； $b = \underline{\hspace{2cm}}$ ； $c = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2) 应用你所学的统计知识，你认为选派哪名学员参加比赛更合适？请说明你的理由。

【答案】(1) 89；92；92

(2) 选甲，理由见解析

【解析】

【分析】本题主要考查了平均数、众数、中位数以及利用方差作决策，熟练掌握相关知识是解题关键.

(1) 根据平均数、众数和中位数的定义求解即可；

(2) 分别求得甲、乙两位同学操作技能测试得分的方差，即可获得答案.

【小问 1 详解】

解：根据题意，

$$a = 90 \times 8 - 82 - 92 - 86 - 92 - 93 - 92 - 94 = 89,$$

对于甲学员，将 8 次操作技能测试的得分按照从小到大的顺序排列，

为 82, 86, 89, 92, 92, 92, 93, 94,

其中在第 4 和第 5 位的是 92 和 92,

所以，甲学员操作技能测试得分的中位数为 $\frac{92+92}{2} = 92$,

对于乙学员，8 次操作技能测试出现次数最多的是 92，共计 3 次，

所以，甲学员操作技能测试得分的众数为 92.

故答案为：89；92；92；

【小问 2 详解】

选派甲学员参加比赛更合适，理由如下：

甲、乙两位同学操作技能测试得分的平均数、众数和中位数均相同，

根据数据可知，甲同学操作技能测试得分的方差为

$$s_{\text{甲}}^2 = \frac{1}{8} \times [(82-90)^2 + (92-90)^2 + (86-90)^2 + (89-90)^2 + (92-90)^2 + (93-90)^2 + (92-90)^2 + (94-90)^2] = 14.75,$$

乙同学操作技能测试得分的方差为

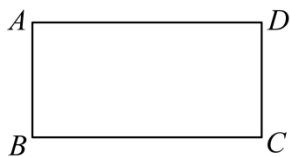
$$s_{\text{乙}}^2 = \frac{1}{8} \times [(96-90)^2 + (92-90)^2 + (92-90)^2 + (80-90)^2 + (86-90)^2 + (92-90)^2 + (79-90)^2 + (93-90)^2] = 39.25,$$

$$\therefore s_{\text{甲}}^2 < s_{\text{乙}}^2,$$

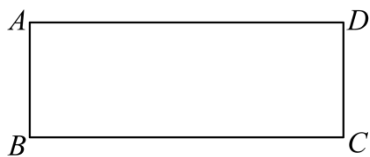
$\therefore$ 甲的成绩更稳定，

$\therefore$ 选派甲学员参加比赛更合适.

24. 尺规作图：



图①



图②

(1) 请在图①中以矩形 $ABCD$ 的 AD 边为边作菱形 $ADEF$ ，使得点 E 在 BC 上；

(2) 请在图②中以矩形 $ABCD$ 的 AD 边为直径作 ΓO ，并在 ΓO 上确定点 P ，使得 $\triangle BCP$ 的面积与矩形 $ABCD$ 的面积相等.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

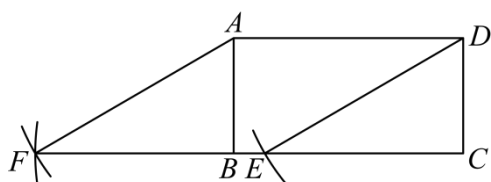
【解析】

【分析】(1) 结合菱形的判定，以点 D 为圆心， AD 的长为半径画弧，交 BC 为点 E ，再分别以点 E 、点 A 为圆心， AD 的长为半径画弧，两弧交于点 F ，连接 DE 、 EF 、 AF 即可；

(2) 作线段 AD 的垂直平分线 MN ，交 AD 于点 O ，以点 O 为圆心， AO 的长为半径画圆，即可得 ΓO ，以点 O 为圆心， AB 的长为半径画弧，在 AD 的上方交 MN 于点 E ，再作 $\angle MEF = \angle EOD$ ，作直线 EF ，分别交 ΓO 于点 P' 、 P'' ，即可求解.

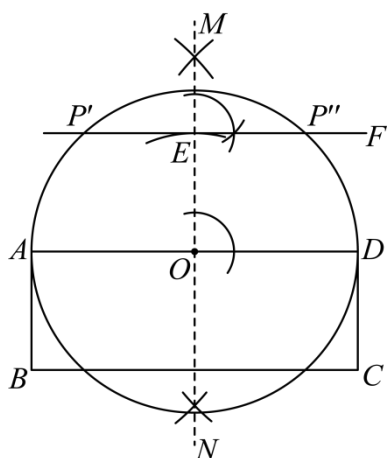
【小问 1 详解】

解：如图，菱形 $ADEF$ 即为所求，



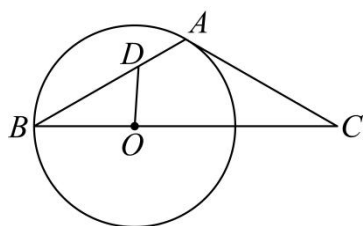
【小问 2 详解】

解：如图，点 P' 、 P'' 即为所求，



【点睛】本题考查作图—复杂作图、菱形的判定、矩形的性质、垂直平分线的性质，理解题意、灵活运用相关知识是解题的关键.

25. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 O 在 BC 上，以 OB 为半径的 ΓO 经过点 A .



(1) 若 $\sin \angle B = \frac{1}{2}$ ，求证：AC 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 在 AB 上取一点 D，连接 OD，已知 $AD=11$ ， $BD=21$ ， $OD=13$ ，求 OB。

【答案】(1) 证明见解析；

(2) $OB=20$ 。

【解析】

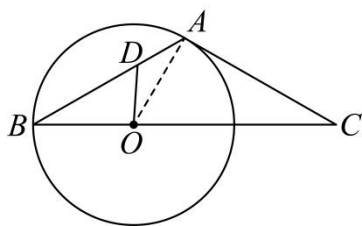
【分析】(1) 连接 OA，由 $\sin \angle B = \frac{1}{2}$ ，得到 $\angle B = 30^\circ$ ，根据等腰三角形的性质得到 $\angle B = \angle C = 30^\circ$ ，由 $OA = OB$ 求得 $\angle AOC$ 的度数 $\angle BAC = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$ ，进而求得 $\angle OAC = 90^\circ$ 即可；

(2) 过 O 作 $OH \perp AB$ 于 H，根据垂径定理得到 $BH = AH = \frac{1}{2}AB$ ，求得 $BH = AH = 16$ ，根据勾股定理即可得到结论；

本题考查了切线的判定，等腰三角形的性质，垂径定理，勾股定理，三角函数的定义，熟练掌握知识点的应用是解题的关键。

【小问 1 详解】

证明：连接 OA，



$$\because \sin \angle B = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle B = 30^\circ,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle C = \angle B = 30^\circ,$$

$$\because AO = BO,$$

$$\therefore \angle BAO = \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC = \angle BAO + \angle B = 60^\circ,$$

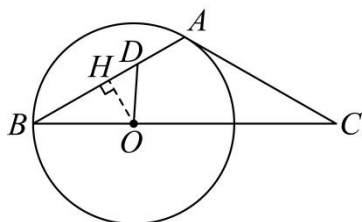
$$\therefore \angle OAC = 90^\circ, \text{ 即 } OA \perp AC,$$

$$\because AO \text{ 为 } \odot O \text{ 的半径},$$

$$\therefore AC \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线};$$

【小问 2 详解】

解：作 $OH \perp AB$ ，



$$\because AD=11, \quad BD=21,$$

$$\therefore AB=BD+AD=32,$$

$$\therefore AH=BH=\frac{1}{2}AB=16,$$

$$\therefore DH=BD-BH=21-16=5,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ODH \text{ 中, } OH=\sqrt{OD^2-DH^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle OBH \text{ 中, } OB=\sqrt{BH^2+OH^2}=\sqrt{16^2+12^2}=20.$$

26. 为迎接即将到来的“五一劳动节”，某日用品超市推出了两种优惠促销方式供顾客选择，并规定顾客只能选择其中一种促销方式进行结算付款.

促销方式一：按所购商品原价打 85 折；

促销方式二：按所购商品原价每满 300 减 60.（如：所购商品原价为 340 元，则减 60 元，需付款 280 元；

所购商品原价为 630 元，则减 120 元，需付款 510 元）

（1）若某商品原价为 500 元，该选择哪种促销方式更优惠？请说明理由；

（2）当商品原价为多少时，两种促销方式一样优惠；

（3）若某商品原价为 m 元（ $0 < m < 900$ ），请问当 m 满足什么条件时，促销方式二比促销方式一更优惠，请说明理由.

【答案】（1）促销方式一更优惠，理由见解析

（2）当商品原价为 400 的整数倍时，两种促销方式一样优惠

（3）当 $300 \leq m < 400$ 或 $600 \leq m < 800$ 时，促销方式二更优惠

【解析】

【分析】（1）分别求出当商品原价为 500 元时，选择两种促销方式需付款的金额，比较后即可得出结论；

（2）设商品原价为 x 元，依题意，列出关于 x 的两种方式一样优惠的一元一次方程，解出 x 即可得出结论；

（3）分 $0 < m < 300$ ， $300 \leq m < 600$ 及 $600 \leq m < 900$ 三种情况考虑，当 $0 < m < 300$ 时，选择促销方式一需付款 $85\%m$ 元，选择促销方式二需付款 m 元，显然此时促销方式一比促销方式二更优惠；当 $300 \leq m < 600$ 时，选择促销方式一需付款 $85\%m$ 元，选择促销方式二需付款 $(m-60)$ 元，根据促销方式二比促销方式一更优惠，可列出关于 m 的一元一次不等式，解之可得出 m 的取值范围，结合 $300 \leq m < 600$ ，

可得出 m 的取值范围；当 $600 \leq m < 900$ 时，选择促销方式一需付款 $85\%m$ 元，选择促销方式二需付款 $(m-120)$ 元，根据促销方式二比促销方式一更优惠，可列出关于 m 的一元一次不等式，解之可得出 m 的取值范围，结合 $600 \leq m < 900$ ，可得出 m 的取值范围.

本题考查了一元一次方程的应用以及一元一次不等式的应用，解题的关键是：（1）根据两种促销方式，求出选择两种促销方式需付款的金额；（2）找准等量关系，正确列出一元一次方程；（3）根据各数量之间的关系，正确列出一元一次不等式.

【小问 1 详解】

解：选择促销方式一更优惠，理由如下：

选择促销方式一需付款 $500 \times 85\% = 425$ （元）；

选择促销方式二需付款 $500 - 60 = 440$ （元）.

$$\ominus 425 < 440,$$

$\therefore$ 选择促销方式一更优惠；

【小问 2 详解】

设商品原价为 x 元，按促销方式二，可优惠 $60n$ 元（ $n \geq 1$ ），且 n 为正整数；

$$85\%x = x - 60n,$$

解得： $x = 400n$ ；

答：当商品原价为 400 元的整数倍时，两种促销方式一样优惠；

【小问 3 详解】

当 $0 < m < 300$ 时，选择促销方式一需付款 $85\%m$ 元，选择促销方式二需付款 m 元，

$\therefore$ 此时促销方式一比促销方式二更优惠；

当 $300 \leq m < 600$ 时，选择促销方式一需付款 $85\%m$ 元，选择促销方式二需付款 $(m-60)$ 元，

根据题意得： $85\%m > m - 60$ ，

解得： $m < 400$ ，

$\therefore$ 当 $300 \leq m < 400$ 时，促销方式二比促销方式一更优惠；

当 $600 \leq m < 900$ 时，选择促销方式一需付款 $85\%m$ 元，选择促销方式二需付款 $(m-120)$ 元，

根据题意得： $85\%m > m - 120$ ，

解得： $m < 800$ ，

当 $600 \leq x < 800$ 时，促销方式二比促销方式一更优惠.

答：当 $300 \leq m < 400$ 或 $600 \leq x < 800$ 时，促销方式二比促销方式一更优惠.

27. 在平面直角坐标系中，二次函数 $y = mx^2 + mx - 6m$ 的图象与 x 轴交于 A 、 B (A 在 B 左侧)，与 y 轴交于 C ，一次函数 $y = 2x + n$ 的图象经过 A 、 C 两点.

(1) 分别求出 m 、 n 的值；

(2) 在二次函数图象上是否存在点 P ，且 P 满足 $\angle POC + \angle BCO = 45^\circ$ ？若存在，请求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

【答案】(1) $m = -1$ ， $n = 6$

(2) P 的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{33}-3}{2}, \sqrt{33}-3\right)$ 或 $(-2, 4)$

【解析】

【分析】(1) 由待定系数法即可求解；

(2) 当点 P 在 y 轴右侧时，利用解直角三角形的方法求出 $OH = \sqrt{2}x = \frac{6}{\sqrt{5}}$ ，得到 $H\left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$ ，进而求解；

当点 P 在 y 轴左侧时，同理求解即可.

【小问 1 详解】

解：令 $y = mx^2 + mx - 6m = 0$ ，则 $x = 2$ 或 -3 ，

即点 A 、 B 的坐标分别为： $(-3, 0)$ 、 $(2, 0)$ ，

将点 A 的坐标代入一次函数表达式得： $0 = -6 + n$ ，则 $n = 6$ ，

则一次函数表达式为： $y = 2x + 6$ ，

将点 C 的坐标 $(0, -6m)$ 代入一次函数表达式得： $-6m = 6$ ，

解得： $m = -1$ ，

则抛物线的表达式为： $y = -x^2 - x + 6$ ；

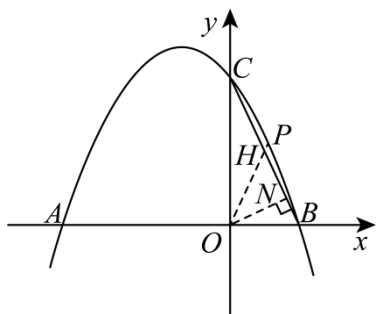
即 $m = -1$ ， $n = 6$ ；

【小问 2 详解】

解：存在，理由：

当点 P 在 y 轴右侧时，

设 OP 交 CB 于点 H ，过点 O 作 $ON \perp BC$ 于点 N ，



则 $\angle OHN = \angle POC + \angle BCO = 45^\circ$,

而 $\tan \angle OCB = \frac{OB}{OC} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, 则 $\sin \angle OCB = \frac{1}{\sqrt{10}}$,

设 $ON = HN = x$, 则 $OH = \sqrt{2}x$,

在 $\text{Rt}\triangle OCN$ 中, $ON = x = CO \cdot \sin \angle OCB = 6 \times \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{6}{\sqrt{10}}$,

则 $OH = \sqrt{2}x = \frac{6}{\sqrt{5}}$,

设直线 BC 解析式为 $y = kx + b$,

由点 B 、 C 的坐标得 $\begin{cases} 2k + b = 0 \\ b = 6 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} k = -3 \\ b = 6 \end{cases}$,

则直线 BC 的表达式为: $y = -3x + 6$,

设点 $H(m, -3m + 6)$,

则 $OH^2 = m^2 + (-3m + 6)^2 = \left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2$,

解得: $m = \frac{6}{5}$ 或 $m = \frac{12}{5}$ (不合题意, 舍去),

则点 $H\left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$,

由点 H 的坐标得, 同理可求直线 OP 的表达式为: $y = 2x$,

联立直线 OP 和抛物线的表达式得: $2x = -x^2 - x + 6$,

解得: $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$ 或 $x_2 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2}$ (不合题意, 舍去),

则点 P 的坐标为: $\left(\frac{\sqrt{33} - 3}{2}, \sqrt{33} - 3\right)$.

当点 P 在 y 轴左侧时, 同理可求直线 OP 的表达式为: $y = -2x$,

联立直线 OP 和抛物线的表达式得： $-2x = -x^2 - x + 6$ ，

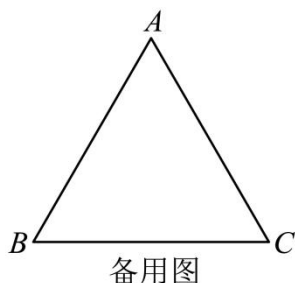
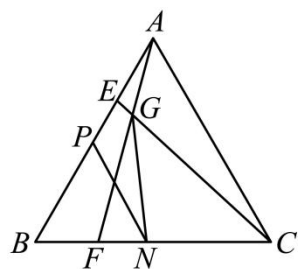
解得： $x_1 = -2$ 或 $x_2 = 3$ （不合题意，舍去），

则点 P 的坐标为： $(-2, 4)$ ，

则点 P 的坐标为： $(-2, 4)$ 或 $\left(\frac{\sqrt{33}-3}{2}, \sqrt{33}-3\right)$ 。

【点睛】 本题考查的是二次函数综合运用，涉及到一次函数的基本性质、待定系数法求函数表达式、平行四边形的性质、解直角三角形等，有一定的综合性。

28. 如图，等边 $\triangle ABC$ 中， $AB = 4\text{cm}$ ，点 E 在 AB 上，从 A 向 B 运动，运动速度为 1cm/s ；点 F 在 BC 上，从 B 向 C 运动，运动速度是 v ，两点同时出发，设运动时间为 $t(\text{s})$ ，当一点到达终点时，另一点停止运动。连接 CE 、 AF ，交点为 G 。



- (1) 若 $v = 1\text{cm/s}$ ，求 $\angle FGC$ 的度数；
- (2) 在 (1) 的条件下，取 AB 中点 P ， N 为 BC 上一动点，连接 PN 、 GN ，则 $PN + GN$ 的最小值为_____；
- (3) 若 $v = 0.5\text{cm/s}$ ，求 t 为何值时， $EC + 2AF$ 的值最小，并求出最小值是多少？

【答案】 (1) 60°

(2) $\frac{2\sqrt{57}-4\sqrt{3}}{3}\text{cm}$

(3) $t = \frac{8}{3}\text{s}$ ， $EC + 2AF$ 的最小值为 $4\sqrt{7}\text{cm}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了等边三角形的性质、三角形的外接圆、相似三角形的判定于性质、解直角三角形等知识点，正确作出辅助线成为解题的关键

(1) 根据运动速度相等可得 $AE = BF$ ，在根据等边三角形的性质可证 $\triangle AEC \cong \triangle BFA(\text{SAS})$ ，即 $\angle BAF = \angle ACE$ ；然后运用角的和差即可解答；

(2) 先说明 $\angle AGC = 120^\circ$ 为定角，再作 $\triangle AGC$ 的外接圆 ΓO ，链接 OA, OG, OC ，则 $OA = OG = OC$ ，

进而得到 $\angle ACO = \angle OAC = 30^\circ$, 如图: 作 $OM \perp AC$ 于 M , 则 $CM = AM = \frac{1}{2}AC = 2$, 解直角三角形可得 $OA = OC = \frac{4\sqrt{3}}{3}$; 再通过轴对称和两点之间线段最短可得 P', N, G, O 在同一条直线上时, $PN + GN$ 有

最小值 $OP' - OG$; 再证明四边形 $TP'RC$ 为矩形, 运用矩形的性质以及勾股定理即可解答;

(3) 如图: 过 A 作 $MN \parallel BC$ 且使 $AM = 2AB = 8$, 作 $CN \perp MN$ 于 N , 连接 CM, EM ; 证明 $\triangle AME \sim \triangle BAF$ 可得 $ME = 2AF$, 进而得到当 E, C, M 共线时, $EC + 2AF$ 有最小值; 再证

$\triangle AEM \sim \triangle BEC$ 求得 AE 的长, 进而求得 $BF = \frac{4}{3}$, 即可求得时间; 然后再运用解直角三角形和勾股定理

即可求得最小值

【小问 1 详解】

解: 由题意可得: $AE = BF$,

$\because$ 等边 $\triangle ABC$ 中, $AB = 4\text{cm}$,

$\therefore AC = AB = 4, \angle EAC = \angle ABF = 60^\circ$,

$\therefore \triangle AEC \cong \triangle BFA (\text{SAS})$,

$\therefore \angle BAF = \angle ACE$,

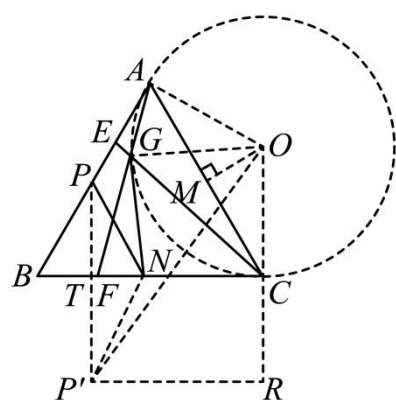
$\therefore \angle BAF + \angle FAC = \angle BAC = 60^\circ$,

$\therefore \angle GAC + \angle ACE = 60^\circ$,

$\therefore \angle FGC = \angle FAC + \angle ACG = 60^\circ$.

【小问 2 详解】

解: 由 $\angle AGC = 180^\circ - \angle FGC = 120^\circ$ 为定角, 则如图: 作 $\triangle AGC$ 的外接圆 $\odot O$, 连接 OA, OG, OC , 则 $OA = OG = OC$,



$\therefore \angle OAG = \angle OGA, \angle OCG = \angle OGC$,

$\therefore \angle AOC = 360^\circ - \angle OAG - \angle AGC - \angle OCG = 360^\circ - 2 \times 120^\circ = 120^\circ$,

$$\therefore \angle ACO = \angle OAC = 30^\circ,$$

如图：作 $OM \perp AC$ 于 M ，则 $CM = AM = \frac{1}{2}AC = 2$ ，

$$\therefore OA = OC = \frac{CM}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

如图：作 P 关于 BC 的对称点 P' ，连接 $P'N, PP', P'P$ 交 BC 于 T ，

$$\therefore P'T = PT, PN = P'N,$$

如图：过 P' 作 $PR \perp OC$ 交 OC 延长线于 R ，

由两点之间、线段最短可得： $P'N + GN + OG \geq OP'$ ，

$$\therefore P'N + GN \geq OP' - OG,$$

$\therefore$ 当 P', N, G, O 在同一条直线上时， $PN + GN$ 有最小值 $OP' - OG$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BPT$ 中， $BP = 2$ ，

$$\therefore PT = 2 \sin 60^\circ = \sqrt{3}, BT = 2 \cos 60^\circ = 1,$$

$$\therefore CT = BC - BT = 3,$$

$$\therefore \angle P'TC = \angle P'RC = \angle TCR = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $TP'RC$ 为矩形，

$$\therefore P'R = CT = 3, CR = TP' = PT = \sqrt{3},$$

$$\therefore OR = \frac{4\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{7\sqrt{3}}{3},$$

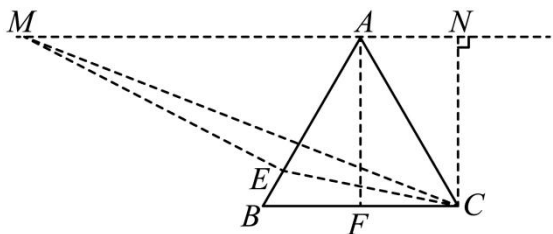
$$\therefore OP' = \sqrt{3^2 + \left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{57},$$

$$\therefore OG = \frac{4}{3}\sqrt{3},$$

$$\therefore PN + GN \text{ 的最小值为 } \frac{2\sqrt{57}}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{57} - 4\sqrt{3}}{3}.$$

【小问3 详解】

解：如图：过 A 作 $MN \parallel BC$ 且使 $AM = 2AB = 8$ ，作 $CN \perp MN$ 于 N ，连接 CM, EM ，



由题知： $AE = 2BF$ ，即 $\frac{AE}{BF} = 2$ ，

$$\therefore \frac{AM}{AB} = 2,$$

$$\therefore \frac{AE}{BF} = \frac{AM}{AB} = 2,$$

$$\therefore MN \parallel BC,$$

$$\therefore \angle MAE = \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle AME \sim \triangle BAF,$$

$$\therefore \frac{ME}{AF} = 2, \text{ 即 } ME = 2AF,$$

由两点之间线段最短可得： $ME + EC \geq CM$ ，即 $EC + 2AF \geq CM$ ，

$\therefore$ 当 E 、 C 、 M 共线时， $EC + 2AF$ 有 最小值，

$$\therefore AN \parallel BC,$$

$$\therefore \angle NAC = \angle ACB = 60^\circ, \triangle AEM \sim \triangle BEC,$$

$$\therefore AN = AC \cdot \cos 60^\circ = 2, \quad CN = AC \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}, \quad \frac{AE}{BE} = \frac{AM}{BC} = 2,$$

$$\therefore MN = AN + AM = 2 + 8 = 10, \quad AE = \frac{4}{3} \times 2 = \frac{8}{3}, \quad BF = \frac{1}{2} AE = \frac{4}{3}$$

$$\therefore CM = \sqrt{10^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{7}, \quad t \text{ 的值为 } \frac{\frac{4}{3}}{0.5} = \frac{8}{3}.$$

$\therefore$ 当 t 的值为 $\frac{8}{3}$ 时， $EC + 2AF$ 的最小值为 $4\sqrt{7}$ 。