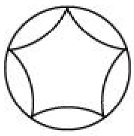
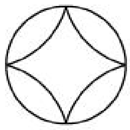
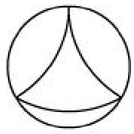
初三第二次适应性练习数学试卷

2023.4

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分．在每小题所给出的四个选项中，只有一项是正确的）

1. 下列图形是中心对称图形的是（　　）

A. 　B. 　C. 　D. 

【答案】B

【解析】

【分析】根据中心对称图形逐项分析即可，中心对称图形：在平面内，把一个图形绕着某个点旋转$180°$，如果旋转后的图形能与原来的图形重合，那么这个图形叫做中心对称图形．

【详解】解：A、.不是中心对称图形，不符合题意；

B、是中心对称图形，符合题意；

C、不是中心对称图形，不符合题意；

D、不是中心对称图形，不符合题意；

故选：B．

【点睛】本题考查了中心对称图形的识别，掌握中心对称图形的定义是解题的关键．

2. $\sqrt{4}$ 的值为（　　）

A. ± 2　　B. $\pm\sqrt{2}$　　C. -2　　D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】根据算术平方根的定义进行求解即可．

【详解】解：$\sqrt{4}=2$，

故答案为：D．

【点睛】本题考查了算术平方根．解题的关键在于正确的计算．

3. 下列各式从左到右的变形属于因式分解的是（　　）

A. $x(2x+1)=2x^2+x$　　B. $1-a^2=(1+a)(1-a)$

C. $(x+1)(x-1)=x^2-1$　　D. $a^2-2a+3=(a-1)^2+2$

【答案】B

【解析】

【分析】根据因式分解的定义解答即可．

【详解】解：A．$x(2x+1)=2x^2+x$ 不是将多项式化成整式乘积的形式，故 A 选项不符合题意；

B．$1-a^2=(1+a)(1-a)$ 是将多项式化成整式乘积的形式，故 B 选项符合题意；

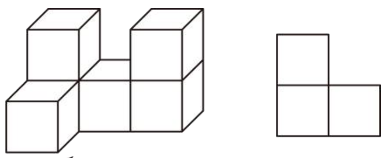
C．$(x+1)(x-1)=x^2-1$ 不是将多项式化成整式乘积的形式，故 C 选项不符合题意；

D．$a^2-2a+3=(a-1)^2+2$ 不是将多项式化成整式乘积的形式，故 D 选项不符合题意；

故选：D．

【点睛】本题主要考查了分解因式的定义，掌握定义是解题的关键．即把一个多项式化成几个整式乘积的形式，这种变形叫做分解因式．

4. 如图，小明从图1中几何体的某个方向观察看到如图2所示的结果，则小明是从该几何体的方向观察的．（　　）



从正面看　图1　图2

A. 正面　　B. 上面　　C. 左面　　D. 右面

【答案】C

【解析】

【分析】根据几何体得到从各个方向观察得到的图形，据此判断．

【详解】解：从正面观察得到的图形应为 2 行 3 列，故不符合；

从上面观察得到的图形应为 2 行 3 列，故不符合；

从左面观察得到的图形应用 2 行 2 列，且第一列为两个高度，第二列为一个高度，故符合；

故选：C．

【点睛】此题考查了从不同方向观察几何体得到的图形，正确理解观察的方向及得到的图形的特点是解题的关键．

5. 八年级一班的学生升九年级时，下列有关年龄的统计量不变的是（　　）

A. 平均年龄　　B. 年龄的方差　　C. 年龄的众数　　D. 年龄的中位数

【答案】B

【解析】

【分析】根据当数据都加上一个数时的平均数，方差，众数，中位数的变化特征进行判断即可．

【详解】解：由题意知，八年级一班的学生升九年级时，每个同学的年龄都加 1，

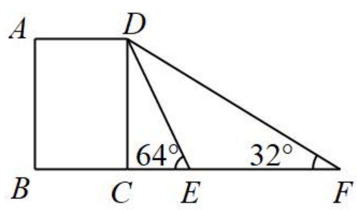
其中平均年龄加 1，众数加 1，中位数加 1，方差不变，

故 A、C、D 不符合要求；B 符合要求；

故选：B．

【点睛】本题考查了平均数、方差、众数和中位数．解题的关键在于熟练掌握当数据都加上（或减去）一个数时，方差不变，即数据的波动情况不变．

6. 如图，在点 F 处，看建筑物顶端 D 的仰角为 $32°$，向前走了 6 米到达点 E 即 $EF=6$ 米，在点 E 处看点 D 的仰角为 $64°$，则 CD 的长用三角函数表示为（　　）



A. $6\sin 32°$　　　　B. $6\tan 64°$　　　　C. $6\tan 32°$　　　　D. $6\sin 64°$

【答案】D

【解析】

【分析】首先根据题目条件，利用外角的性质，得出 $\triangle DEF$ 是等腰三角形，在 $\mathrm{Rt}\triangle DCE$ 中，利用 $\angle DEC$ 的正弦即可表示出 CD 的长度．

【详解】解：$\because \angle F=32°$，$\angle DEC=64°$，

$\therefore \angle EDF=\angle DEC-\angle F=32°$，

$\therefore DE=EF=6$，

由题可知，$\triangle DCE$ 为直角三角形，

在 $\mathrm{Rt}\triangle DCE$ 中，$\sin\angle DEC=\dfrac{CD}{DE}$，

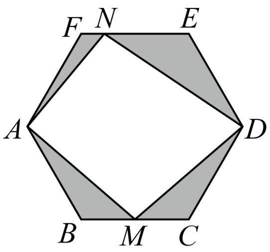
即：$\sin 64°=\dfrac{CD}{6}$，

$\therefore CD=6\cdot\sin 64°$，

故选：D．

【点睛】本题考查三角形的外角，等腰三角形的性质，解直角三角形的运算，解题关键是利用三角形的外角得出 $\triangle DEF$ 是等腰三角形．

7. 如图，面积为 6 的正六边形 $ABCDEF$ 中，点 M ，N 分别为边 BC ，EF 上的动点，则阴影部分面积为（　　）



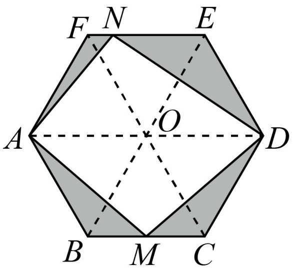
A. 2　　　　B. 3　　　　C. 4　　　　D. 5

【答案】A

【解析】

【分析】如图，连接 AD ，BE ，CF ，交点为 O，设 EF 与 AD 的距离为 h，根据正六边形的性质以及平行线间距离相等可得则 $\dfrac{S_{四边形ADEF}}{S_{\triangle ADN}}=\dfrac{\dfrac{(EF+AD)\cdot h}{2}}{\dfrac{AD\cdot h}{2}}=\dfrac{3}{2}$，进而可求 $S_{\triangle ADN}$，同理可求 $S_{\triangle ADM}$ 的值，根据 $S_{阴影}=S_{正六边形ABCDEF}-S_{\triangle ADM}-S_{\triangle ADN}$ 计算求解即可.

【详解】解：如图，连接 AD，BE，CF，交点为 O，



由正六边形 $ABCDEF$ 可得，$EF=AO=DO$ 即 $EF=\dfrac{1}{2}AD$，$AD\parallel EF\parallel BC$，

设 EF 与 AD 的距离为 h，

则 $\dfrac{S_{四边形ADEF}}{S_{\triangle ADN}}=\dfrac{\dfrac{(EF+AD)\cdot h}{2}}{\dfrac{AD\cdot h}{2}}=\dfrac{3}{2}$，

$\because S_{四边形ADEF}=\dfrac{1}{2}\times S_{正六边形ABCDEF}=3$，

$\therefore S_{\triangle ADN}=2$，

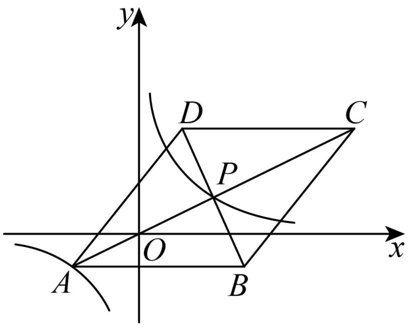
同理可得 $S_{\triangle ADM}=2$，

$\therefore S_{阴影}=S_{正六边形ABCDEF}-S_{\varsigma ADM}-S_{\varsigma ADN}=2$，

故选：A．

【点睛】本题考查了正六边形的性质，平行线间的距离相等．解题的关键在于确定阴影部分面积为正六边形的面积与空白部分面积的差．

8. 如图，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 交于点 P，且 AC 过原点 O， $AB // x$ 轴，点 C 的坐标为 $(12,6)$，反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象经过 A，P 两点，则 k 的值是（　　）



A. 12　　　B. 9　　　C. 8　　　D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了菱形的性质、反比例函数的性质、相似三角形的性质，由菱形的性质得出 $AP=PC$，结合反比例函数的性质得出 $OP=\dfrac{1}{3}OC$，作 $PE\perp x$ 轴于 E，$CF\perp x$ 轴于 F，则 $\varsigma OPE\backsim\varsigma OCF$，由相似三角形的性质得出点 P 的坐标为 $(4,2)$，即可得解．

【详解】解：Θ 四边形 $ABCD$ 为菱形，对角线 AC 、 BD 交于点 P，

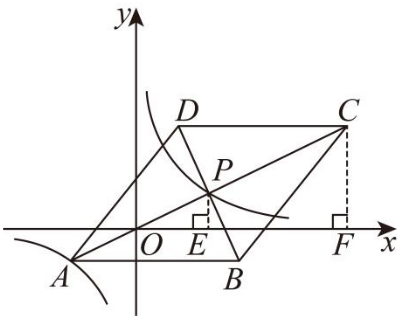
$\therefore AP=PC$，

Θ 反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ 的图象经过 A 、 P 两点

$\therefore OA=OP=\dfrac{1}{2}AP$，

$\therefore OP=\dfrac{1}{3}OC$，

如图，作 $PE\perp x$ 轴于 E， $CF\perp x$ 轴于 F，



则 $PE \parallel CF$，

$\therefore ς OPE \backsim ς OCF$，

$\therefore \dfrac{OP}{OC}=\dfrac{PE}{CF}=\dfrac{OE}{OF}=\dfrac{1}{3}$，

Θ 点 C 的坐标为 $\left(12,6\right)$，

$\therefore CF=6$，$OF=12$，

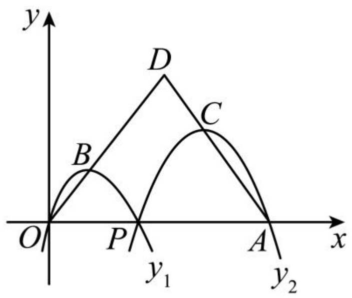
$\therefore OE=4$，$PE=2$，

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $\left(4,2\right)$，

$\therefore k=4\times 2=8$，

故选：C．

9. 如图，已知点 $A\left(10,0\right)$，O 为坐标原点，P 是线段 OA 上任意一点（不含端点 O、A），过 P、O 两点的二次函数 y_1 和过 P、A 两点的二次函数 y_2 的图象开口均向下，它们的顶点分别为 B、C，射线 OB 与 AC 相交于点 D．当 $OD=AD=13$ 时，这两个二次函数的最大值之和等于（　　）



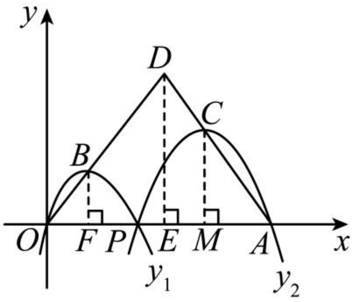
A. 5　　B. $2\sqrt{7}$　　C. 8　　D. 12

【答案】D

【解析】

【分析】首先利用勾股定理得到 $DE=12$，然后利用抛物线的对称性及相似三角形的判定和性质得到 $\dfrac{BF}{12}=\dfrac{m}{5}$ 和 $\dfrac{CM}{12}=\dfrac{n}{5}$，两个式子相加得出结果．

【详解】解：分别过点 B、D、C 作 $BF\perp AO$ 于点 F，$DE\perp AO$ 于点 E，$CM\perp AO$ 于点 M，



$\Theta\ DA = DO = 13$，

$\therefore OE = \frac{1}{2}OA = 5$，

$\therefore DE = \sqrt{OD^2 - OE^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$，

设$OF = m$，$AM = n$，则$PF = OF = m$，$MP = AM = n$，

$\Theta\ OF + FP + PM + AM = OA = 10$，即$2m + 2n = 10$，

$\therefore m + n = 5$,

$\Theta\ BF // DE$，

$\therefore ς OBF \backsim ς ODE$，

$\therefore \frac{BF}{DE} = \frac{OF}{OE}$,

即$\frac{BF}{12} = \frac{m}{5}$①,

同理$\frac{CM}{12} = \frac{n}{5}$②,

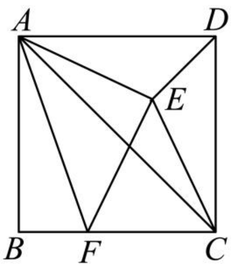
①+②得：$\frac{BF + CM}{12} = \frac{m + n}{5} = 1$，

$\therefore BF + CM = 12$，

故选：D.

【点睛】本题考查等腰三角形的性质、抛物线的对称性以及相似三角形的判定和性质，利用相似三角形的性质得到比例式是解决问题的关键.

10. 如图，在正方形$ABCD$中，F是BC边上一点，连接AF，以AF为斜边作等腰直角$\triangle AEF$．有下列四个结论：①$\angle CAF = \angle DAE$；②点E在线段BD上；③当$\angle AEC = 135°$时，CE平分$\angle ACD$；④若点F在BC上以一定的速度由B向C运动，则点F的运动速度是点E运动速度的2倍．其中正确的结论的个数为（　　）



A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】由正方形的性质及等腰直角三角形的性质得：$\angle FAE=\angle DAC=45^\circ$，从而可判定①；由$ς CAF ∽ ς DAE$可得$\angle ADE=\angle CDE=45^\circ$，由正方形的性质可证明$\triangle ADE\cong\triangle CDE$，可得$AE=CE$，即有$\angle EAC=\angle ECA$，再由$\angle AEC=135^\circ$可得$\angle EAC=\angle ECA=22.5^\circ$，从而$CE$、$AE$分别平分$\angle ACD$、$\angle CAD$，即可判定③；连接$BD$交$AC$于点$O$，由$\angle ADE=\angle CDE=45^\circ$知，点$E$的运动轨迹为线段$OD$，而点$F$的运动轨迹为线段$BC$，即可判断②，由$BC=\sqrt{2}OD$知，点$F$的运动速度是点$E$的运动速度的$\sqrt{2}$倍，即可判断④，因而可确定答案．

【详解】解：Θ 四边形$ABCD$是正方形，AC是对角线，

$\therefore AD=CD$，$\angle ADC=90^\circ$，$\angle DAC=\angle DCA=\angle ACB=45^\circ$，

Θ$ς AEF$是等腰直角三角形，

$\therefore \angle FAE=\angle DAC=45^\circ$，

Θ $\angle FAE=\angle CAF+\angle CAE=\angle CAE+\angle DAE=\angle DAC=45^\circ$，

$\therefore \angle CAF=\angle DAE$，

故①正确；

Θ$ς AEF$、$\triangle DAC$都是等腰直角三角形，

$\therefore AC=\sqrt{2}AD$，$AF=\sqrt{2}AE$，

$\therefore \dfrac{AC}{AD}=\dfrac{AF}{AE}=\sqrt{2}$，

Θ $\angle CAF=\angle DAE$，

$\therefore ς CAF ∽ ς DAE$，

$\therefore \angle ADE=\angle ACB=45^\circ$，即点$E$在线段$BD$上，

故②正确；

Θ $\angle ADC=90^\circ$，

$\therefore \angle ADE=\angle CDE=45^\circ$，

在$\vee ADE$和ςCDE中，

$$\begin{cases} AD = CD \\ \angle ADE = \angle CDE \\ DE = DE \end{cases},$$

$\therefore \varsigma ADE \cong \varsigma CDE(\text{SAS})$，

$\therefore AE = CE$，

$\therefore \angle EAC = \angle ECA$，

$\Theta\ \angle AEC = 135^\circ$，

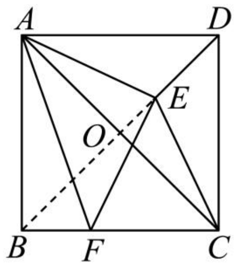
$\therefore \angle EAC = \angle ECA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AEC) = 22.5^\circ$，

$\Theta\ \angle DAC = \angle DCA = 45^\circ = 2\angle EAC = 2\angle ECA$，

$\therefore CE$、AE分别平分$\angle ACD$、$\angle CAD$，

故③正确；

如图，连接BD交AC于点O，



$\Theta\ \angle ADE = \angle CDE = 45^\circ$，

当点F与点B重合时，点E与点O重合；当点F与点C重合时，点E与点D重合，

$\therefore$点E的运动轨迹为线段OD，而点F的运动轨迹为线段BC，

$\Theta\ BC = CD = \sqrt{2}OD$，且点$F$与点$E$的运动时间相同，

$\therefore v_F = \sqrt{2}v_E$，

故④错误；

故选：C.

【点睛】本题是一个综合性较强的题目，考查了正方形的性质，等腰直角三角形的性质，全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，点的运动路径的确定等知识，熟练运用这些知识是正确解答本题的关键．确定点E的运动路径是本题的难点所在．

二、填空题（本大题共8小题，每小题3分，共24分）

11. 使分式$\dfrac{1}{x-1}$有意义的x的取值范围是_________.

【答案】$x\neq1$

【解析】

【详解】根据题意得：x-1≠0，即$x\neq1$.

故答案为：$x\neq1$.

12. 据报道，北京标志性场馆“冰丝带”——国家速滑馆冰面面积约12000平方米，是目前亚洲最大的冰面．将12000用科学记数法表示应为______.

【答案】1.2×10^{4}

【解析】

【分析】12000用科学记数法表示成$a\times10^{n}$的形式，其中$a=1.2$，$n=4$，代入可得结果.

【详解】解：12000的绝对值大于10表示成$a\times10^{n}$的形式，

$\because a=1.2$，$n=5-1=4$，

$\therefore$ 12000表示成1.2×10^{4}，

故答案为：1.2×10^{4}.

【点睛】本题考查了科学记数法．解题的关键在于确定a、n的值.

13. 如果$a^{2}=b^{2}$，那么$a=b$的逆命题是________.

【答案】若$a=b$，则$a^{2}=b^{2}$

【解析】

【分析】把一个命题的条件和结论互换就得到它的逆命题，

【详解】解：命题“如果$a^{2}=b^{2}$，那么a＝b”的条件是如果$a^{2}=b^{2}$，结论是a＝b，

故逆命题是：如果a＝b，那么$a^{2}=b^{2}$.

故答案为若a＝b，那么$a^{2}=b^{2}$.

【点睛】本题考查了互逆命题的知识，两个命题中，如果第一个命题的条件是第二个命题的结论，而第一个命题的结论又是第二个命题的条件，那么这两个命题叫做互逆命题．其中一个命题称为另一个命题的逆命题.

14. 已知x、y满足方程组$\begin{cases}x+2y=2\\2x+y=7\end{cases}$，则$x+y$的值为______.

【答案】3

【解析】

【分析】由①+②，可得$3x+3y=9$，即可求解.

【详解】解：$\begin{cases} x+2y=2 & ① \\ 2x+y=7 & ② \end{cases}$，

由①+②，可得$3x+3y=9$，

$\therefore x+y=3$，

故答案为：3.

【点睛】本题主要考查了解二元一次方程组，熟练掌握二元一次方程组的解法是解题的关键.

15. 已知圆锥的母线长为6cm，底面半径为2cm，则这个圆锥的侧面展开图的圆心角的度数为______.

【答案】120°##120度

【解析】

【分析】根据底面周长等于圆锥的侧面展开图的弧长以及弧长公式求解即可.

【详解】解：设圆锥的侧面展开图的圆心角的度数为$n°$，

根据题意，得$2\pi\cdot 2=\dfrac{n\pi\cdot 6}{180}$，

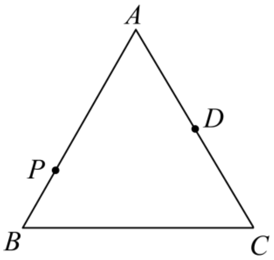
解得$n=120$，

则圆锥的侧面展开图的圆心角的度数为$120°$，

故答案为：$120°$.

【点睛】本题考查了圆锥的有关计算、弧长公式，解答本题的关键是有确定底面周长=展开图的弧长这个等量关系，扇形的半径等于圆锥的母线长.

16. 如图，在等边三角形ABC中，$AB=6$，点D为AC的中点，点P在AB上，且$BP=\sqrt{3}$，将BP绕点B在平面内旋转，点P的对应点为点Q，连接AQ，DQ. 当$\angle ADQ=90°$且点Q在V ABC内部时，AQ的长为________.

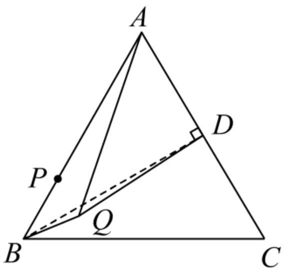


【答案】$\sqrt{21}$

【解析】

【分析】连接BD，根据等边三角形的性质，得出$BD\perp AC$，$AD=CD=3$，根据勾股定理求出$BD=3\sqrt{3}$，由旋转的性质可知$BQ=BP=\sqrt{3}$，推出Q点一定在线段BD上，利用勾股定理即可求得AQ的长.

【详解】解：如图，连接BD，



Θ 在V ABC为等边三角形，

$\therefore AC=BC=AB=6$，

Θ 点D为AB的中点，

$\therefore AD=CD=\frac{1}{2}AC=3$， $BD\perp AC$，

$\therefore \angle ADB=90^\circ$，

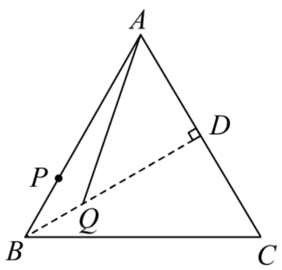
$\therefore BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$，

由旋转的性质可知， $BQ=BP=\sqrt{3}$，

Θ $\angle ADB=90^\circ$，

$\therefore$当$\angle ADQ=90^\circ$时，点Q一定在直线BD上；

当点Q在V ABC内部时，如图所示，



$DQ=BD-BQ=3\sqrt{3}-\sqrt{3}=2\sqrt{3}$，

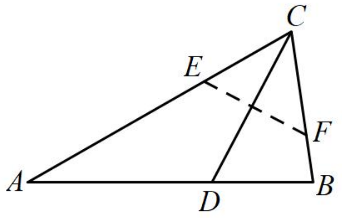
在Rt△ADQ中， $AQ=\sqrt{AD^2+DQ^2}=\sqrt{3^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{21}$；

故答案为： $\sqrt{21}$.

【点睛】本题考查了旋转的性质，勾股定理，等边三角形的性质，熟练掌握知识点并灵活运用是解题的关

键．

17. 如图，$\triangle ABC$ 中，$AB=5\sqrt{3}$，$AC=9$，$\angle A=30^{\circ}$，折叠$\triangle ABC$，使点C落在AB边上的点D处，折痕EF交边AC于点E，在点D从点B运动到点A的过程中，点E运动的路径长为______．



【答案】5.5

【解析】

【分析】由折叠知，EF垂直平分CD，分析D点的运动路径，分段计算出长度加在一起即可．

【详解】解：①由折叠知，EF垂直平分CD，

∴当D与B重合时，此时AE最小，

∴如图2，作$E_1G\perp AB$，垂足为G，连接E_1B，

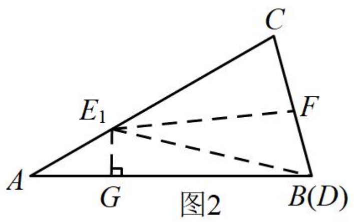


图2

设$AE_1=x$，

∵$\angle A=30^{\circ}$，

∴$EG=\frac{1}{2}AE_1=\frac{1}{2}x$，

∴$AG=\frac{\sqrt{3}}{2}x,CE_1=9-x$，

∵E_1F垂直平分CB，

∴$E_1B=E_1C=9-x$，

∴在$\text{Rt}\triangle E_1GB$中，$E_1B^2=E_1G^2+GB^2$，

即$(9-x)^2=\left(\frac{1}{2}x\right)^2+\left(5\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2$，

解得$x=2$，

$\therefore AE_1=2$，

②$\because ED=EC$，

$\therefore$当 AE 最大时，EC 最短，

$\therefore ED$ 最短，

$\therefore$当 $ED\perp AB$ 时，ED 为垂线段，取最小值，

$\therefore$如图 3，作 $E_2D_2\perp AB$，垂足为 D_2，

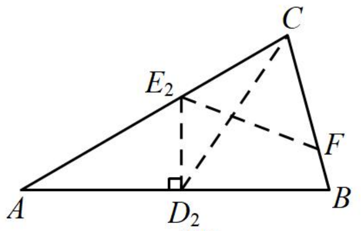


图3

设 $AE_2=y$，则 $\ _2\ _2=\frac{1}{2}A\ _2=\frac{1}{2}y$，

$\therefore AD_2=\frac{\sqrt{3}}{2}y$，$E_2C=9-y$，

$\because E_2F$ 垂直平分 CD_2，

$\therefore E_2D_2=E_2C$，

$\therefore \frac{1}{2}y=9-y$，解得：$y=6$，

$\therefore AE_2=6$，

$\therefore E$ 从最近到最远走了 $6-2=4$；

③当 D 从 D_2 点继续向 A 移动，ED 增加，

$\therefore AE$ 减小，

当 D 与 A 重合时，如图 4，

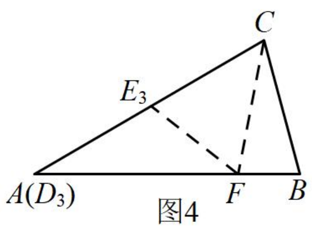


图4

此时 $E_3D_3=E_3C=\frac{1}{2}AC=\frac{9}{2}$，

$\therefore AE_3=\frac{9}{2}$，

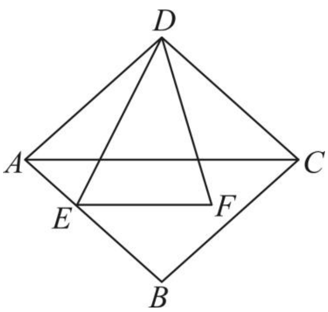
$\therefore E$ 从 E_2 到 E_3 运动了 $6-\frac{9}{2}=1.5$，

$\therefore$ 点 E 从 E_1，运动到 E_2，再运动到 E_3，路径长为 $4+1.5=5.5$，

故答案为：5.5.

【点睛】本题主要考查图形翻折变换，勾股定理，直角三角形的性质等知识，熟练掌握图形的翻折变换，勾股定理，直角三角形的性质等知识，是解题的关键.

18. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，E 是 AB 上一点，F 是 $\triangle ABC$ 内一点，$AC\parallel EF$，$AC=2EF$，$\angle BAD=2\angle EDF$，$AE=2$，$DF=3\sqrt{2}$，则菱形 $ABCD$ 的边长为______.

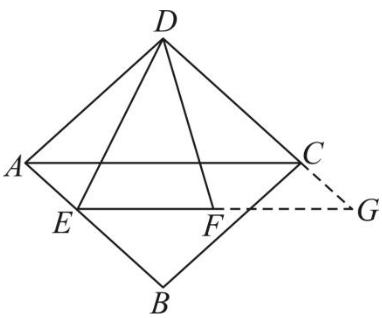


【答案】4

【解析】

【分析】分别延长 EF，DC 相交于点 G，得证四边形 $AEGC$ 是平行四边形，得到 $AC=EG$，$CG=AE$，$\angle EAC=\angle G$，证明 $\triangle EDF\backsim\triangle EGD$，得到 $\frac{ED}{EG}=\frac{EF}{DE}$，则 $DE=\sqrt{2}EF$，可求出 DG，即可求解.

【详解】解：如图，延长 EF，交 DC 的延长线于点 G，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AB\parallel DC$，$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BAD$，

$\because AC\parallel EF$，

$\therefore$ 四边形 $AEGC$ 是平行四边形，

$\therefore AC=EG$，$AE=CG=2$，$\angle EAC=\angle G$，

$\because \angle BAD = 2\angle EDF$，

$\therefore \angle EDF = \angle BAC$，

$\therefore \angle EDF = \angle G$，

又$\because \angle DEF = \angle GED$，

$\therefore \triangle EDF \backsim \triangle EGD$，

$\therefore \dfrac{ED}{EG} = \dfrac{EF}{ED}$，

$\therefore ED^2 = EF \cdot EG$，

又$\because EG = AC = 2EF$，

$\therefore DE^2 = 2EF^2$，

$\therefore DE = \sqrt{2}EF$，

$\because \triangle EDF \backsim \triangle EGD$，

$\therefore \dfrac{DG}{DF} = \dfrac{DE}{EF}$，

$\therefore DG = \sqrt{2}DF = \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6$，

$\therefore DC = DG - CG = 6 - 2 = 4$，

$\therefore$ 菱形 $ABCD$ 的边长为 4．

故答案为：4．

【点睛】本题是相似三角形的综合题，主要考查了相似三角形的判定与性质，平行四边形的判定与性质，菱形的性质等知识，正确掌握相似三角形的判定定理是解题的关键．

三、解答题（本大题共 10 小题，共 96 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

19. （1）计算：$\left|-\sqrt{2}\right| - 2^{-1} - \sqrt{2}\tan 45^\circ$；

（2）化简：$x\left(x+2y\right)-\left(y-3x\right)\left(x+y\right)$．

【答案】（1）$-\dfrac{1}{2}$；（2）$4x^2+4xy-y^2$

【解析】

【分析】（1）按照实数的绝对值、负整数指数幂、特殊角的三角函数值分别计算，再进行减法运算即可；

（2）利用单项式乘多项式和多项式乘法法则展开，再进行合并同类项即可．

【详解】解：（1）$\left|-\sqrt{2}\right| - 2^{-1} - \sqrt{2}\tan 45^\circ$

$=\sqrt{2}-\frac{1}{2}-\sqrt{2}\times 1$

$=-\frac{1}{2}$

（2）$x(x+2y)-(y-3x)(x+y)$

$=x^2+2xy-(xy+y^2-3x^2-3xy)$

$=x^2+2xy-xy-y^2+3x^2+3xy$

$=4x^2+4xy-y^2$

【点睛】此题考查了实数的混合运算、特殊角的三角函数值、整式的混合运算等知识，熟练掌握运算法则是解题的关键.

20. （1）解方程：$\frac{1-x}{x-2}=\frac{1}{2-x}-2$；

（2）解不等式组：$\begin{cases}x-3(x-2)\le 4 & ① \\ \frac{1+2x}{3}>x-1 & ②\end{cases}$.

【答案】（1）无解；（2）$1\le x<4$

【解析】

【分析】（1）分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到x的值，经检验即可得到分式方程的解；

（2）分别求出不等式组中两不等式的解集，找出两解集的公共部分即可.

【详解】解：（1）$\frac{1-x}{x-2}=\frac{1}{2-x}-2$

$1-x=-1-2(x-2)$

$1-x=-1-2x+4$

$x=-1+4-1$

$x=2$，

经检验，$x=2$是原方程的增根，

故原方程无解；

（2）$\begin{cases}x-3(x-2)\le 4 & ① \\ \frac{1+2x}{3}>x-1 & ②\end{cases}$，

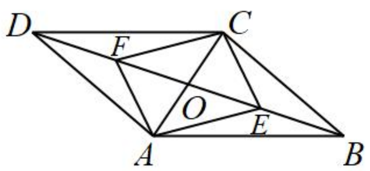
解不等式①，得：$x\ge 1$；

解不等式②，得：$x<4$；

即不等式组得解集为：$1\le x<4$．

【点睛】此题考查了解分式方程，以及解一元一次不等式组，解分式方程利用了转化的思想，解分式方程注意要检验．

21. 如图，平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，E，F 分别是 OB，OD 的中点．求证：



（1）$\triangle DCF\cong\triangle BAE$；

（2）$AF\parallel CE$．

【答案】（1）证明见解析

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）根据平行四边形的性质得 $AB=CD$，$AB\parallel CD$，$OB=OD$，推出 $\angle CDF=\angle ABE$，由中点的性质可得 $DF=BE$，即可证明 $\triangle DCF\cong\triangle BAE(\text{SAS})$；

（2）由（1）$\triangle DCF\cong\triangle BAE$ 得 $CF=AE$，$\angle DCF=\angle BAE$，结合 $AB\parallel CD$，推出 $CF\parallel AE$，可得四边形 $AECF$ 是平行四边形，由平行四边形的性质即可得出结论．

【小问 1 详解】

证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB=CD$，$AB\parallel CD$，$OB=OD$，

$\therefore \angle CDF=\angle ABE$，

$\because E$，F 分别是 OB，OD 的中点，

$\therefore DF=\frac{1}{2}OD=\frac{1}{2}OB=BE$，

在 $\triangle DCF$ 和 $\triangle BAE$ 中，

$$\begin{cases}CD=AB\\ \angle CDF=\angle ABE,\\ DF=BE\end{cases}$$

$\therefore \triangle DCF\cong\triangle BAE(\text{SAS})$；

【小问 2 详解】

证明：由（1）知$\triangle DCF \cong \triangle BAE$，

$\therefore CF = AE$，$\angle DCF = \angle BAE$，

Θ $AB // CD$，

$\therefore \angle DCA = \angle BAC$，

$\therefore \angle DCA - \angle DAF = \angle BAC - \angle BAE$，即$\angle FCA = \angle EAC$，

$\therefore CF // AE$，

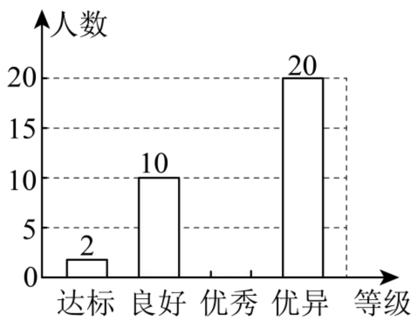
$\therefore$四边形$AECF$是平行四边形，

$\therefore AF // CE$.

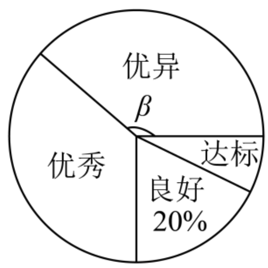
【点睛】本题考查了平行四边形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，平行线的判定和性质，中点的性质，熟练掌握并灵活运用知识点是解题的关键.

22. 为感受数学的魅力，享受学习数学的乐趣，某学校举行数学解题竞赛．现随机抽取了部分学生的成绩作为样本，把成绩按达标，良好，优秀，优异四个等级分别进行统计，并将所得数据绘制成如下不完整的统计图．请根据图中提供的信息，解答下列问题：

竞赛成绩条形统计图



竞赛成绩扇形统计图



（1）在这次调查中，一共抽取了________名学生，圆心角$\beta =$________度；

（2）补全条形统计图；

（3）已知学校共有1200名学生，估计此次竞赛该校获优异等级的学生人数为多少？

【答案】（1）50；144

（2）见解析　　（3）480名

【解析】

【分析】本题主要考查了扇形统计图与条形统计图信息相关联，用样本估计总体：

（1）用良好等级的人数除以其人数占比求出参与调查的人数，再用360度乘以优异的人数占比即可求出β；

（2）求出优秀的人数，再补全统计图即可；

（3）用1200乘以样本中优异的人数占比即可得到答案．

【小问1详解】

解：$10 \div 20\% = 50$ 名，

∴一共抽取了 50 名学生，

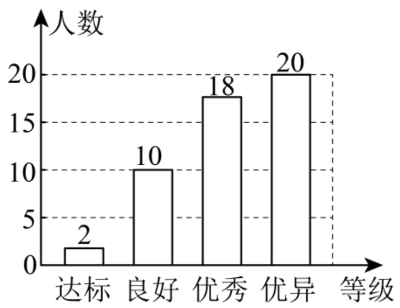
∴ $\beta = 360° \times \frac{20}{50} = 144°$；

【小问 2 详解】

解：优秀的人数有 $50 - 2 - 10 - 20 = 18$ 名，

补全统计图如下：

竞赛成绩条形统计图



【小问 3 详解】

解：$120 \times \frac{20}{50} = 480$ 名，

∴估计此次竞赛该校获优异等级的学生人数为 480 名．

23. 有甲乙两个不透明的布袋，甲袋中有两个完全相同的小球，分别标有数字 1、$\sqrt{3}$，乙袋中有三个完全相同的小球，分别标有数字 0、1、2，小丽先从甲袋中随机取出一个小球，记录下小球上的数字为 x；再从乙袋中随机取出一个小球，记录下小球上的数字为 y，设点 P 坐标为 (x, y)．

（1）请用列表格或树状图列出点 P 所有可能的坐标；

（2）在平面直角坐标系中，$\odot O$ 的圆心在原点，半径为 2，求点 P 在 $\odot O$ 内的概率．

【答案】（1）表格见解析

（2）$\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】（1）根据题意列表格即可；

（2）由题意知，P 到 O 点的距离有 1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{3}$，2，$\sqrt{7}$，共 6 种等可能的结果，其中在圆内，即距离小于 2 时有 1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，共 3 种等可能的结果，然后进行求解即可．

【小问 1 详解】

解：由题意列表格如下：

	0	1	2
1	（1,0）	（1,1）	（1,2）
$\sqrt{3}$	（$\sqrt{3}$，0）	（$\sqrt{3}$，1）	（$\sqrt{3}$，2）

【小问 2 详解】解：由题意知，P 到 O 点的距离有 1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{3}$，2，$\sqrt{7}$，共 6 种等可能的结果，

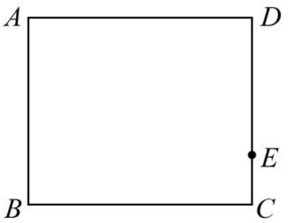
其中在圆内，即距离小于 2 时有 1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，共 3 种等可能的结果，

∴点 P 在$\odot O$ 内的概率为$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，

∴点 P 在$\odot O$ 内的概率为$\frac{1}{2}$，

【点睛】本题考查了列表法求概率，点与圆的位置关系等知识．解题的关键在于熟练掌握当点到圆心的距离小于半径时，点在圆内．

24. 如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=5$，E 是 CD 边上的一点，点 P 在 BC 边上，且满足$\angle PEC=\angle DAP$．



（1）请用不带刻度的直尺和圆规，在所给的图中作出符合条件的点 P；（不要求写作法，但保留作图痕迹）

（2）若 $CE=1$，试确定 $\tan\angle EPC$ 的值．

【答案】（1）图见解析

（2）$\frac{1}{4}$或 1

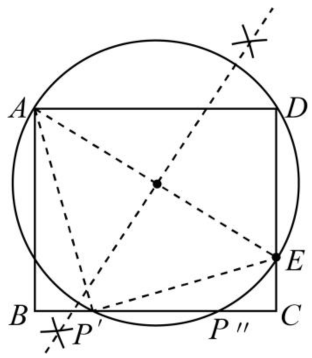
【解析】

【分析】（1）连接 AE，作 AE 的垂直平分线，以 AE 为直径画圆，交 BC 于点 P' 和 P''，根据补角的定义、圆周角定理及四边形内角和可得$\angle PEC+\angle PED=180°$，$\angle PAD+\angle PED=180°$，即可得$\angle PEC=\angle DAP$，则点 P' 和 P'' 即为所求；

（2）根据矩形性质和$\angle PEC=\angle DAP$，可以证明$\triangle ABP\backsim\triangle PCE$，对应边成比例进而可得 PC 的长，根据正切的概念即可求解．

【小问 1 详解】

解：如图，连接 AE，作 AE 的垂直平分线，以 AE 为直径画圆，交 BC 于点 P' 和 P''，



Θ $\angle PEC+\angle PED=180^\circ$， $\angle PAD+\angle PED=360^\circ-90^\circ-90^\circ=180^\circ$，

$\therefore$ $\angle PEC=\angle DAP$，

则点 P' 和 P'' 即为所求；

【小问 2 详解】

解：Θ 矩形 $ABCD$ 中， $AD \mathbin{/\!/} BC$，

$\therefore$ $\angle DAP=\angle APB$，

Θ $\angle PEC=\angle DAP$，

$\therefore$ $\angle APB=\angle PEC$，

Θ $\angle B=\angle C=90^\circ$，

$\therefore$ $\triangle ABP\backsim\triangle PCE$，

$\therefore$ $\dfrac{BP}{CE}=\dfrac{AB}{PC}$，

设 $PC=x$， $AB=4$， $BC=5$，

$\therefore$ $BP=5-x$，

$\therefore$ $\dfrac{5-x}{1}=\dfrac{4}{x}$，

解得 $x_1=1$， $x_2=4$，

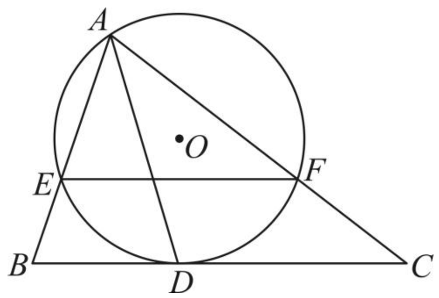
$\therefore$ PC 的长为 1 或 4，

当 $PC=1$ 时， $\tan\angle EPC=\dfrac{CE}{CP}=\dfrac{1}{1}=1$，

当 $PC=4$ 时， $\tan\angle EPC=\dfrac{CE}{CP}=\dfrac{1}{4}$.

【点睛】本题考查了作图-复杂作图，圆内接四边形的性质，矩形的性质，相似三角形的判定与性质，圆周角定理，正切的概念，解决本题的关键是掌握矩形的性质.

25. 如图，在V ABC 中， $CA=CB$ ， E 为 AB 上一点，作 $EF \mathbin{/\!/} BC$ ，与 AC 交于点 F ，经过点A 、 E 、 F 的$\ulcorner O$ 与 BC 相切于点 D ，连接 AD .



（1）求证：AD 平分 $\angle BAC$；

（2）若 $AE=10$，$BE=8$，求 AC 的长．

【答案】（1）证明见解析

（2）$AC=36$

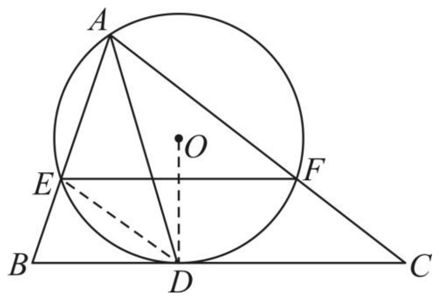
【解析】

【分析】（1）连接 OD，$\odot O$ 与 BC 相切于点 D，推出 $OD\perp BC$，已知 $EF\parallel BC$，得到 $OD\perp EF$，推出 $\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{DF}$，进而得到 $\angle BAD=\angle CAD$，得证 AD 平分 $\angle BAC$；

（2）连接 DE，已知 $EF\parallel BC$，得到 $\angle BDE=\angle DEF$，结合 $\angle BAD=\angle CAD=\angle DEF$，得到 $\angle BDE=\angle BAD$，已知 $\angle DBE=\angle ABD$，得到 $\triangle BDE\backsim\triangle BAD$，可求得 $BD=12$，得到 $\dfrac{DE}{AD}=\dfrac{BE}{BD}=\dfrac{2}{3}$，进一步证明 $\triangle ADE\backsim\triangle ACD$，得到 $\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{DE}{CD}$，即 $CD=\dfrac{DE}{AD}\cdot AC=\dfrac{2}{3}AC$，已知 $AC=CB$，即可求得 CD 的长，进而可得 AC 的长．

【小问 1 详解】

证明：连接 OD，



$\because$ $\odot O$ 与 BC 相切于点 D，

$\therefore OD\perp BC$，

$\because EF\parallel BC$，

$\therefore OD\perp EF$，

$\therefore \overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{DF}$，

$\therefore \angle BAD=\angle CAD$，

$\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$；

【小问 2 详解】

解：连接 DE，

$\because EF \parallel BC$，

$\therefore \angle BDE = \angle DEF$，

又$\because \angle BAD = \angle CAD = \angle DEF$，

$\therefore \angle BDE = \angle BAD$，

又$\because \angle DBE = \angle ABD$，

$\therefore \triangle BDE \backsim \triangle BAD$，

$\therefore \dfrac{BD}{BA} = \dfrac{BE}{BD}$，

$\therefore BD^2 = BE \cdot BA = BE \cdot \left(BE + AE\right) = 8 \times (8 + 10) = 144$，

$\therefore BD = 12$，

$\therefore \dfrac{DE}{AD} = \dfrac{BE}{BD} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$，

$\because EF \parallel BC$，

$\therefore \angle AFE = \angle C$，

又$\because \angle AFE = \angle ADE$，

$\therefore \angle ADE = \angle C$，

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ACD$，

$\therefore \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{DE}{CD}$，

$\therefore CD = \dfrac{DE}{AD} \cdot AC = \dfrac{2}{3} AC$，

$\because AC = CB$，

$\therefore CD = \dfrac{2}{3}(BD + CD) = \dfrac{2}{3} \times (12 + CD)$，

$\therefore CD = 24$，

$\therefore AC = \dfrac{3}{2} \times CD = 36$．

【点睛】本题主要考查平行线的性质，圆周角定理，相似三角形的判定及性质，熟练掌握相关知识点是解题的关键．

26. 无锡阳山是闻名遐迩的“中国水蜜桃之乡”，每年 6 至 8 月，总会吸引大批游客前来品尝，当地某商家为回馈顾客，两周内将标价为 20 元/千克的水蜜桃经过两次降价后变为 16.2 元/千克，并且两次降价的百分率相同．

（1）求水蜜桃每次降价的百分率．

（2）①从第一次降价的第 1 天算起，第 x 天（x 为整数）的售价、销量及储存和损耗费用的相关信息如表所示：

时间 x/天	$1 \le x < 9$	$9 \le x < 15$
售价/（元/千克）	第 1 次降价后的价格	第 2 次降价后的价格
销量/千克	$105-3x$	$120-x$
储存和损耗费用/元	$40+3x$	$3x^2-68x+300$

已知该种水果的进价为 8.2 元/千克，设销售该水果第 x（天）的利润为 y（元），求 y 与 x（$1 \le x < 15$）之间的函数解析式，并求出第几天时销售利润最大？

②在①的条件下，问这 14 天中有多少天的销售利润不低于 930 元，请直接写出结果．

【答案】（1）10%

（2）① $y=\begin{cases}-32.4x+989\left(1 \le x < 9\right)\\ -3x^2+60x+660\left(9 \le x < 15\right)\end{cases}$；第 10 天利润最大，最大利润为 960 元；②这 14 天中有 6 天的销售利润不低于 930 元

【解析】

【分析】（1）设水蜜桃每次降价的百分率为 x，根据题意可列出关于 x 的一元二次方程，解出 x 的值即得出答案；

（2）①根据利润＝（标价－进价）×销量储存和损耗费，即可得 y（元），进而可求出 y 与 x 之间的函数解析式，再结合一次函数和二次函数的性质求出其最值即可；②依题意可列出关于 x 的不等式，结合解一元一次不等式的方法和图象法解一元二次不等式，分别求出 x 的解集，即可得出答案．

【小问 1 详解】

解：设水蜜桃每次降价的百分率为 x， 依题意得，

$20\left(1-x\right)^2=16.2$，

解得：$\boldsymbol{x_1=0.1, x_2=1.9}$，（舍）．

∴水蜜桃每次降价的百分率为10%；

【小问 2 详解】

解：①结合（1）得：第一次降价后的价格为$20\left(1-10\%\right)=18$（元），

$\therefore$当$1\le x<9$时，$y=(18-8.2)(105-3x)-(40+3x)=-32.4x+989$.

$\because k=-32.4<0$，

$\therefore y$ 随着 x 的增大而减小，

$\therefore$当$x=1$元时，利润最大为$-32.4\times1+989=956.6$（元）;

当$9\le x<15$时，$y=(16.2-8.2)(120-x)-\left(3x^2-68x+300\right)=-3x^2+60x+660=-3(x-10)^2+960$，

$\because a=-3<0$，

$\therefore$当$x=10$时，利润最大为 960 元.

$\because 956.6<960$，

$\therefore$第 10 天利润最大，最大利润为 960 元.

综上可知，$y=\begin{cases}-32.4x+989(1\le x<9)\\-3x^2+60x+660(9\le x<15)\end{cases}$；第 10 天利润最大，最大利润为 960 元；

②当$1\le x<9$时，$y=-32.4x+989\ge930$，

解得：$x\le\dfrac{295}{162}$，

$\therefore$此时第 1 天利润不低于 930 元；

当$9\le x<15$时，$y=-3x^2+60x+660\ge930$，

当$-3x^2+60x+660=930$时，

解得：$x_1=10+\sqrt{10},x_2=10-\sqrt{10}$，

$\therefore y=-3x^2+60x+660\ge930$时，$10-\sqrt{10}\le x\le10+\sqrt{10}$，

$\because 6<10-\sqrt{10}<7,13<10+\sqrt{10}<14$，

$\therefore$此时第 9 天到第 13 天利润不低于 930 元.

$\therefore$这 14 天中有 6 天的销售利润不低于 930 元.

【点睛】本题考查一元二次方程的实际应用，一次函数和二次函数的实际应用，一元一次不等式和一元二次不等式的实际应用．理解题意，找出等量关系，列出等式和不等式是解题关键．

27. 如图 1，已知抛物线$C_1: y=ax^2+bx-3$与x轴交于点$A(-1,0)$和点$B(3,0)$，与y轴交于点C.

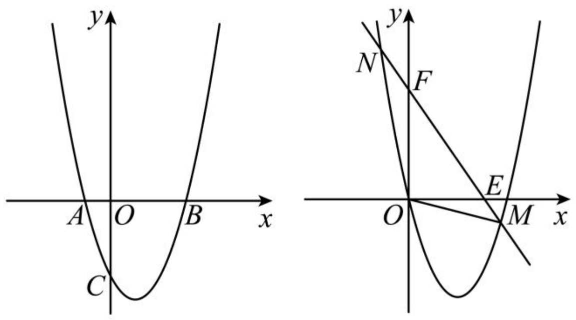


图1　　　　图2

（1）求抛物线的解析式；

（2）点 P 在抛物线上，若 $\triangle ACP$ 的内心恰好在 y 轴上，求出点 P 的坐标；

（3）如图 2，将抛物线 C_1 向右平移一个单位长度得到抛物线 C_2，点 M，N 都在抛物线 C_2 上，且分别在第四象限和第二象限，连接 MN，分别交 x 轴、y 轴于点 E、F，若 $\angle NOF=\angle MOE$，求证：直线 MN 经过一定点．

【答案】（1）$y=x^2-2x-3$

（2）$P(5,12)$

（3）见解析

【解析】

【分析】（1）把点 A，B 的坐标分别代入抛物线的解析式，利用待定系数法即可求出抛物线的解析式；

（2）先作出点 A 关于 y 轴的对称点 A'，然后连接 CA' 并延长交抛物线于点 P，根据对称性可知 P 为所求的点，内心在三角形三个内角的角平分线上，所以可考虑作点 A 关于 y 轴的对称点，再求得直线 CA' 的解析式，联立成方程组，解方程组即可求解；

（3）过点 M 作 $MQ\perp x$ 于点 Q，过点 N 作 $NP\perp y$ 轴，首先根据平移的性质，可求得抛物线 C_2 的解析式为：$y=x^2-4x$，设点 M 的坐标为 $\left(x_1,x_1^2-4x_1\right)\left(x_1^2-4x_1<0\right)$，点 N 的坐标为 $\left(x_2,x_2^2-4x_2\right)\left(x_2<0\right)$，设直线 MN 的解析式为 $y=mx+n$，联立成方程组，可得 $x_1+x_2=4+m$，$x_1x_2=-n$，再证得 $\varsigma OPN\backsim\varsigma OQM$，可得 $\dfrac{-x_2}{-\left(x_1^2-4x_1\right)}=\dfrac{x_2^2-4x_2}{x_1}$，即可求得 $m=-\dfrac{n+1}{4}$，$y=-\dfrac{n+1}{4}x+n$，据此即可求解．

【小问 1 详解】

解：把点 $A(-1,0)$ 和点 $B(3,0)$ 分别代入解析式，得：

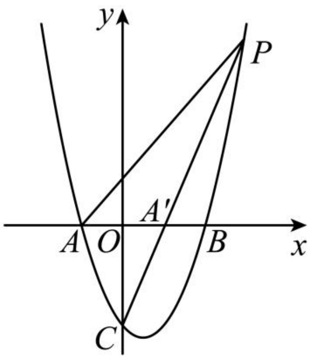
$$\begin{cases}a-b-3=0\\9a+3b-3=0\end{cases}$$

解得$\begin{cases}a=1\\b=-2\end{cases}$

故抛物线的解析式为$y=x^2-2x-3$；

【小问2详解】

解：如图：作点A关于y轴的对称点A'，连接CA'并延长交抛物线于点P，点P为所求的点，



$\therefore \angle ACO=\angle A'CO$，$A'(1,0)$，

$\therefore \triangle ACP$的内心在y轴上，

在$y=x^2-2x-3$中，令$x=0$，则$y=-3$，

故点C的坐标为$(0,-3)$，

设直线CA'的解析式为$y=kx+b$，

把点C、A'的坐标分别代入解析式，得：

$$\begin{cases}k+b=0\\b=-3\end{cases}$$

解得$\begin{cases}k=3\\b=-3\end{cases}$，

$\therefore$直线CA'的解析式为$y=3x-3$，

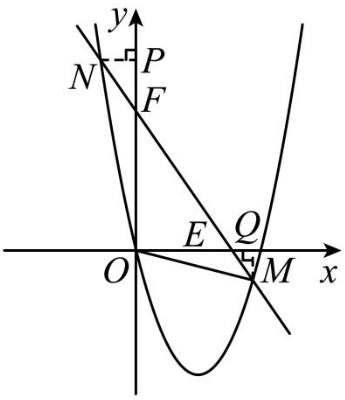
$$\begin{cases}y=x^2-2x-3\\y=3x-3\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x=5\\y=12\end{cases}$或$\begin{cases}x=0\\y=-3\end{cases}$，

∴点 P 的坐标为 $\left(5,12\right)$；

【小问 3 详解】

解：如图：过点 M 作 $MQ\ \perp\ x$ 于点 Q，过点 N 作 $NP\perp y$ 轴，



Θ 将抛物线 C_1： $y=x^2-2x-3=\left(x-1\right)^2-4$ 向右平移一个单位长度得到抛物线 C_2，

∴抛物线 C_2 的解析式为： $y=\left(x-2\right)^2-4=x^2-4x$，

Θ 点 M， N 都在抛物线 C_2 上，且分别在第四象限和第二象限，

∴设点 M 的坐标为 $\left(x_1,x_1^2-4x_1\right)\left(x_1^2-4x_1<0\right)$，点 N 的坐标为 $\left(x_2,x_2^2-4x_2\right)\left(x_2<0\right)$，

∴ $PN=-x_2$， $OP=x_2^2-4x_2$， $OQ=x_1$， $QM=-\left(x_1^2-4x_1\right)$，

设点直线 MN 的解析式为 $y=mx+n$，

$$\begin{cases}y=x^2-4x\\y=mx+n\end{cases}$$

得 $x^2-\left(4+m\right)x-n=0$，

则 $x_1+x_2=4+m$， $x_1x_2=-n$，

Θ $\angle NOP=\angle MOQ$， $\angle OPN=\angle OQM=90^\circ$，

∴ς OPN ∽ς OQM，

∴ $\dfrac{PN}{QM}=\dfrac{OP}{OQ}$，

∴ $\dfrac{-x_2}{-\left(x_1^2-4x_1\right)}=\dfrac{x_2^2-4x_2}{x_1}$，

得： $x_1x_2=\left(x_1x_2\right)^2-4x_1x_2\left(x_1+x_2\right)+16x_1x_2$，

得：$\left(-n\right)^2-4\times\left(-n\right)\times\left(4+m\right)+15\times\left(-n\right)=0$，

整理得：$n^2+n+4mn=0$，

得 $n\left(n+1+4m\right)=0$，

Θ 由图象可知 $n\neq 0$，

$\therefore n+1+4m=0$，

$\therefore m=-\dfrac{n+1}{4}$，

$\therefore y=-\dfrac{n+1}{4}x+n$，

Θ 当 $x=4$ 时，$y=-1$，

$\therefore$ 直线 MN 经过一定点 $\left(4,-1\right)$．

【点睛】本题主要考查二次函数的综合应用，利用待定系数法求抛物线与一次函数的解析式，三角形的内心，相似三角形的判定与性质，一元二次方程根与系数的关系，难度比较大，采用数形结合的方法是解决本题的关键．

28. 已知V ABC 和ςDEF 为等腰直角三角形，$\angle ACB=\angle EDF=90^\circ$，$BC=AC$，$ED=FD$，将两三角形如图 1 所示放置，其中 F、B、D 在同一直线上，$FD>BD$．现将ςDEF 绕点 D 顺时针旋转，旋转角度为 $\alpha\left(0^\circ<\alpha<360^\circ\right)$．

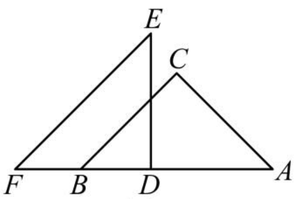


图1

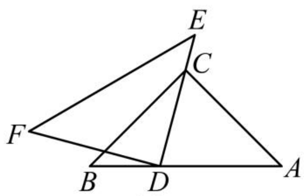


图2

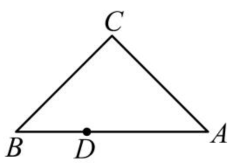


图3

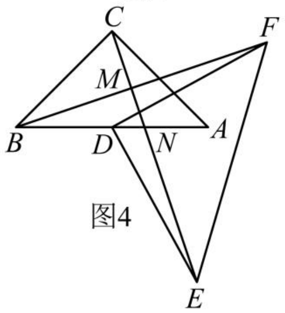


图4

（1）如图 2，当线段 DE 过点 C 时，若 $BD=\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{3}+1$，则 α 的度数为______；

（2）若点 F 在边 AC 的延长线上，连接 AE，请在图 3 中补全图形，探究线段 AF、AE、AD 之间的数量关系，并证明你的结论；

（3）若点 D 为 AB 的中点，$\triangle DEF$ 旋转至如图 4 所示位置，连接 BF 、CE 交于点 M ，CE 交 AB 于点 N ，且 $BC:DE:ME=4:\sqrt{17}:5$ ，请直接写出 $\dfrac{ND}{CN}$ 的值.

【答案】（1）15°　　（2）作图见解析；$AF=\sqrt{2}AD+AE$，证明见解析

（3）$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

【解析】

【分析】（1）过点 D 作 $DH\perp BC$ 于点 H，则 $\angle BHD=\angle CHD=90^\circ$，证明 $\triangle BHD$ 是等腰直角三角形，则 $BH=DH=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BD=1$，得 $CH=\sqrt{3}$，由 $\tan\angle CDH=\sqrt{3}$ 得到 $\angle CDH=60^\circ$，则 $\angle FDH=30^\circ$，可得 $\angle BDF=15^\circ$，即可得到 α 的度数；

（2）过 F 作 $FH\perp AB$ 于 H，过 E 作 $EG\perp AB$ 于 G，结合 K 字型全等，等腰直角三角形，四点共圆即可得到答案；

（3）过点 C 作 BF 的平行线，点 F 作 BC 的平行线交于点 G；过点 G 作 $GH\perp BF$ 于点 H，过点 K 作 $KI\perp FG$，证明 $\triangle BDF\cong\triangle CDE$，设 $BC=4t$，则 $DE=\sqrt{17}t$，$ME=5t$，结合勾股定理、相似三角形及解直角三角形的知识进行计算即可得到答案.

【小问 1 详解】

解：过点 D 作 $DH\perp BC$ 于点 H，则 $\angle BHD=\angle CHD=90^\circ$，

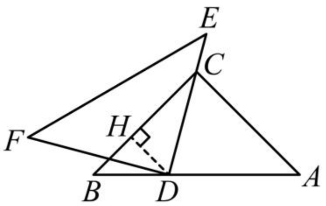


图2

$\because \angle ACB=\angle EDF=90^\circ$，$BC=AC$，

$\therefore \angle ABC=\angle ABC=45^\circ$，

$\therefore \angle BDH=45^\circ$，

$\therefore \triangle BHD$ 是等腰直角三角形，

$\therefore BH=DH=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}=1$，

$\therefore CH=BC-BH=\sqrt{3}+1-1=\sqrt{3}$，

$\therefore \tan\angle CDH = \dfrac{DH}{CH} = \sqrt{3}$，

$\therefore \angle CDH = 60°$，

$\therefore \angle FDH = \angle EDF - \angle CDH = 90° - 60° = 30°$，

$\therefore \angle BDF = \angle BDH - \angle FDH = 45° - 30° = 15°$，

即α的度数为$15°$，

故答案为：$15°$

【小问 2 详解】

解：线段AF、AE、AD之间的数量关系：$AF = \sqrt{2}AD + AE$，证明如下：过F作$FH \perp AB$于H，过E作$EG \perp AB$于G，如图 3：

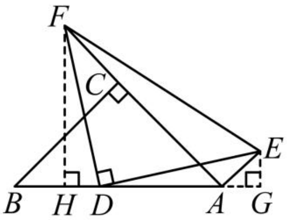


图3

$\because FH \perp AB, EG \perp AB, \angle EDF = 90°$，

$\therefore \angle FHD = \angle DGE = 90°, \angle FDH = 90° - \angle EDG = \angle DEG$，

又$\because DF = DE$，

$\therefore \varsigma FHD \cong \varsigma DGE(\mathrm{AAS})$，

$\therefore FH = DG = AD + AG$，

$\because \angle ACB = \angle EDF = 90°, BC = AC, ED = FD$，

$\therefore \angle FAB = \angle FED = 45°$，

$\therefore$点F、D、A、E四点共圆，

$\therefore \angle FAE = \angle FDE = 90°$，$\angle EAG = \angle DFE = 45°$，

$\because FH \perp AB, EG \perp AB, \angle BAC = 45°$，

$\therefore \varsigma FAH$和$\triangle EAG$为等腰直角三角形，

$\therefore AF = \sqrt{2}FH$，$AE = \sqrt{2}AG$，

$\therefore AF = \sqrt{2}(AD + AG) = \sqrt{2}AD + \sqrt{2}AG = \sqrt{2}AD + AE$；

【小问 3 详解】

过点 C 作 BF 的平行线，点 F 作 BC 的平行线交于点 G；过点 G 作 $GH \perp BF$ 于点 H，过点 K 作 $KI \perp FG$ 于点 I，如图 4：

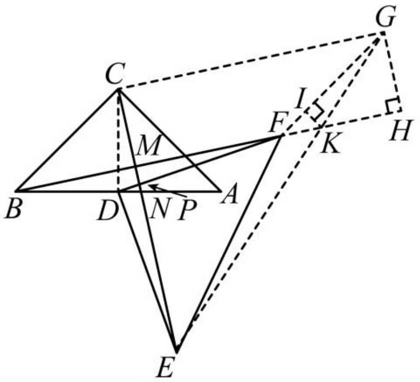


图4

∵V ABC 是等腰直角三角形，点 D 为 AB 的中点，

∵ $\angle BDC = \angle FDE = 90°$， $CD = BD$,

∴ $\angle BDC + \angle CDF = \angle FDE + \angle CDF$，即 $\angle BDF = \angle CDE$，

又∵ $DE = DF$，

∴ςBDF≌ς$CDE\left(\mathrm{SAS}\right)$，

∴ $BF = CE$，$\angle DEC = \angle DFB$，

∵ $\angle DEC + \angle DPE = 90°, \angle DPE = \angle MPF$，

∴ $\angle DFB + \angle MPF = 90°$，

∴ $\angle FME = 90°$，

由 $BC : DE : ME = 4 : \sqrt{17} : 5$，设 $BC = 4t$，则 $DE = \sqrt{17}t$， $ME = 5t$；

∴ $EF = \sqrt{2}DE = \sqrt{34}t$，

∵ $CG \parallel BF$， $FG \parallel BC$，

∴四边形 $BFGC$ 为平行四边形，

∴ $CE = BF = CG$， $\angle ECG = \angle FME = 90°$，

∴ςECG 为等腰直角三角形，

∴ $\angle CGE = \angle MEG = 45° = \angle GKH$ ，

∴ $\triangle GKH$ 为等腰直角三角形，ςMEK 为等腰直角三角形，

∴ $\dfrac{GE}{CE} = \sqrt{2}$， $\dfrac{FG}{CD} = \dfrac{BC}{CD} = \sqrt{2}$， $\dfrac{EF}{DE} = \sqrt{2}$， $ME = MK$，

∴ $\dfrac{GE}{CE} = \dfrac{FG}{CD} = \dfrac{EF}{DE}$，

$\therefore \varsigma CDE \backsim \varsigma GFE$，

$\therefore \angle DCE = \angle FGE$，

$\therefore \dfrac{ND}{CN} = \sin\angle DCE = \sin\angle FGE$；

在 Rt$\triangle MFE$ 中，$MF = \sqrt{EF^2 - ME^2} = 3t$，

$\therefore FK = MK - MF = ME - MF = 5t - 3t = 2t, FG = BC = 4t$，

设$\angle GFH = \alpha$，$\angle KGI = \angle NCD = \beta$，

$\therefore \sin\alpha = \dfrac{GH}{FG}, \sin\beta = \dfrac{KI}{KG} = \dfrac{DN}{CN}$，

在 RtςFKI 中，$\sin\alpha = \dfrac{KI}{FK}$，

$\therefore KI = FK \cdot \sin\alpha = FK \cdot \dfrac{GH}{FG}$，

$\because GH = \dfrac{KG}{\sqrt{2}}$，

$\therefore KI = FK \cdot \dfrac{\frac{KG}{\sqrt{2}}}{FG} = \dfrac{FK \cdot KG}{\sqrt{2}FG}$，

$\therefore \sin\beta = \dfrac{KI}{KG} = \dfrac{\frac{FK \cdot KG}{\sqrt{2}FG}}{KG} = \dfrac{FK}{\sqrt{2}FG} = \dfrac{2t}{\sqrt{2} \cdot 4t} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

$\therefore \dfrac{ND}{CN} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

【点睛】本题考查等腰直角三角形的旋转变换，涉及全等三角形的判定与性质、相似三角形的判定与性质、解直角三角形、勾股定理等知识，中间穿插了不同的模型，对模型的运用与转化能力要求很高，难度较大，属于压轴题，解题的关键是作辅助线，构造全等三角形或相似三角形.