

初三数学第一次适应性训练

一. 选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分.）

1. 2024 的倒数是（ ）

A. 2024

B. -2024

C. $|2024|$

D. $\frac{1}{2024}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了倒数，掌握倒数的定义是解答本题的关键；

乘积是 1 的两数互为倒数，据此解答即可；

【详解】解：2024 的倒数是 $\frac{1}{2024}$ ，

故选：D.

2. 下列运算正确的是（ ）

A. $(x^3)^2 = x^5$

B. $x^2 + x^3 = x^5$

C. $(-2a^2b)^3 = -8a^6b^3$

D.

$(a-b)(-a+b) = a^2 - b^2$

【答案】C

【解析】

【分析】此题考查了平方差公式，合并同类项，以及幂的乘方与积的乘方，熟练掌握公式及法则是解本题的关键. 利用平方差公式，完全平方公式，幂的乘方与积的乘方以及合并同类项法则判断即可.

【详解】解：A、原式 $= x^6$ ，不符合题意；

B、原式不能合并，不符合题意；

C、原式 $= -8a^6b^3$ ，符合题意；

D、原式 $= -a^2 + 2ab - b^2$ ，不符合题意，

故选：C.

3. 陈芋汐在 2023 年杭州亚运会女子十米跳台项目中获得了亚军，其中第五轮跳水的 7 个成绩分别是（单位：分）：9.0, 9.0, 8.5, 9.0, 9.5, 9.0, 8.5. 这组数据的众数和中位数分别是（ ）

A. 9.0, 8.5

B. 9.0, 9.0

C. 8.5, 8.75

D. 9.0, 9.25

【答案】B

【解析】

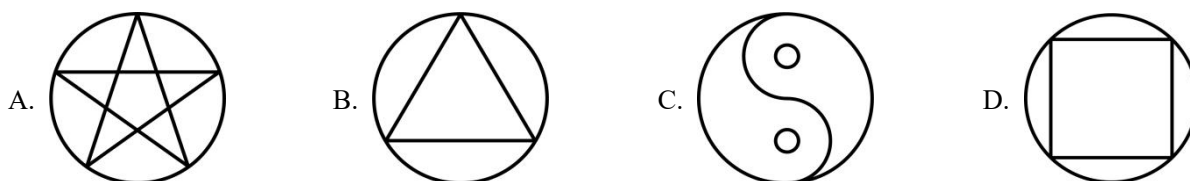
【分析】本题考查了众数和中位数，熟练掌握众数和中位数的定义是解答本题的关键．根据众数和中位数的定义求解即可．

【详解】解： $\because$ 从小到大排列为：8.5，8.5，9.0，9.0，9.0，9.0，9.5，

$\therefore$ 中位数是9.0，众数是9.0.

故选 B.

4. 下列图形中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的是（ ）



【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了轴对称图形和中心对称图形，掌握相关定义是解答本题的关键．把一个图形绕某一点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形就叫做中心对称图形，这个点叫做对称中心；如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴．根据轴对称图形和中心对称图形的定义解答即可．

【详解】解：A. 该图形是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项不符合题意；

B. 该图形是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项不符合题意；

C. 该图形是中心对称图形，不是轴对称图形，故本选项不符合题意；

D. 该图形既是轴对称图形又是中心对称图形，故本选项符合题意．

故选：D.

5. 若圆锥的底面半径为3，母线长为5，则这个圆锥的侧面积为（ ）

A. 6π B. 8π C. 15π D. 30π

【答案】C

【解析】

【分析】圆锥的侧面积=底面周长 $\times$ 母线长 $\div 2$ ，把相应数值代入即可求解．

【详解】解：圆锥的侧面积 $=2\pi \times 3 \times 5 \div 2 = 15\pi$.

故选 C.

【点睛】本题考查了圆锥的计算，解题的关键是弄清圆锥的侧面积的计算方法，特别是圆锥的底面周长等于圆锥的侧面扇形的弧长．

6. 下列结论中，正确的是（ ）

- A. 四边相等的四边形是正方形
- B. 对角线相等的菱形是正方形
- C. 正方形两条对角线相等，但不互相垂直平分
- D. 矩形、菱形、正方形都具有“对角线相等”的性质

【答案】B

【解析】

【详解】A.可判断为菱形，故本选项错误，

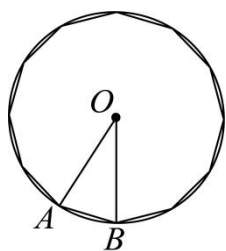
B.对角线相等的菱形是正方形，故本选项正确，

C.正方形的两条对角线相等，且互相垂直平分，故本选项错误，

D.菱形的对角线不一定相等，故本选项错误，

故选：B.

7. 魏晋时期的数学家刘徽首创“割圆术”，用圆内接正多边形的面积去无限逼近圆面积．如图所示的圆的内接正十二边形，若该圆的半径为1，则这个圆的内接正十二边形的面积为（ ）



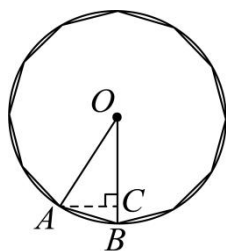
- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了正多边形与圆，三角形的面积的计算，解直角三角形，正确的作出辅助线是解题的关键．过A作 $AC \perp OB$ 于C，得到圆的内接正十二边形的圆心角为 $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ ，根据三角形的面积公式即可得到结论．

【详解】解：如图，过A作 $AC \perp OB$ 于C，



∵ 圆的内接正十二边形的圆心角为 $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ ，

$$\odot OA=1,$$

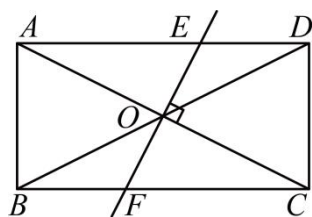
$$\therefore AC=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times 1\times \frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

$$\therefore \text{这个圆的内接正十二边形的面积为} 12\times \frac{1}{4}=3,$$

故选：C

8. 如图,在矩形 $ABCD$ 中,对角线 AC , BD 交于点 O ,过点 O 作 $EF \perp AC$ 交 AD 于点 E ,交 BC 于点 F . 已知 $AB=4$, $\triangle AOE$ 的面积为 5, 则 DE 的长为 ()



A. 2

B. $\sqrt{5}$

C. $\sqrt{6}$

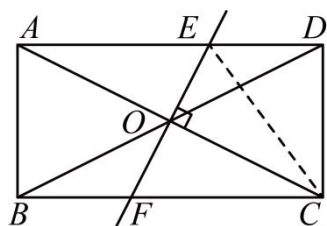
D. 3

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了矩形的性质、线段垂直平分线的性质、勾股定理以及三角形的面积问题. 连接 CE , 由题意可得 OE 为对角线 AC 的垂直平分线, 可得 $AE=CE$, $S_{\triangle AOE}=S_{\triangle COE}=5$, 由三角形的面积则可求得 AE 的长, 然后由勾股定理求得答案.

【详解】解: 连接 CE , 如图所示:



由题意可得, OE 为对角线 AC 的垂直平分线,

$$\therefore AE=CE, S_{\triangle COE}=S_{\triangle AOE}=5,$$

$$\therefore S_{\triangle ACE}=2S_{\triangle AOE}=10.$$

$$\therefore \frac{1}{2}AE \times CD=10,$$

$$\odot AB=4=CD,$$

$$\therefore AE=5,$$

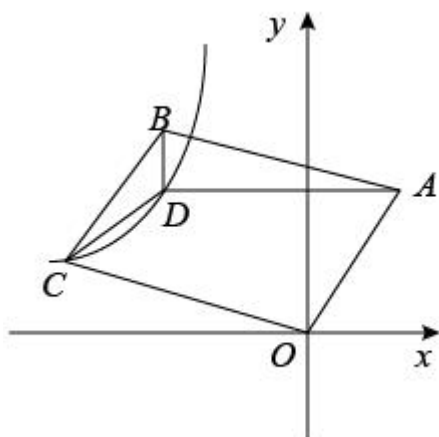
$$\therefore CE = 5,$$

在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中，由勾股定理得 $DE = \sqrt{CE^2 - CD^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$,

故选：D.

9. 如图，点 D 是 $\Psi OABC$ 内一点， AD 与 x 轴平行， BD 与 y 轴平行， $BD = \sqrt{3}$ ， $\angle BDC = 120^\circ$ ，

$S_{\triangle BCD} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$ ，若反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x < 0)$ 的图像经过 C ， D 两点，则 k 的值是（ ）



A. $-6\sqrt{3}$

B. -6

C. $-12\sqrt{3}$

D. -12

【答案】C

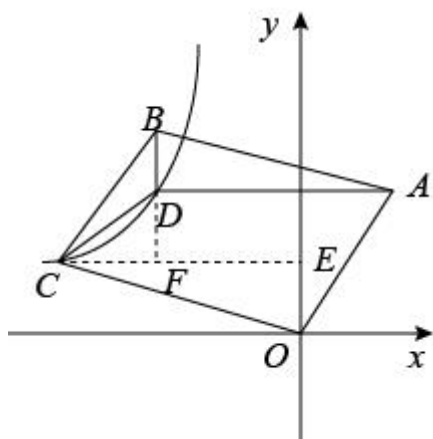
【解析】

【分析】过点 C 作 $CE \perp y$ 轴于点 E ，延长 BD 交 CE 于点 F ，可证明 $\triangle COE \cong \triangle ABE$ (AAS)，则 $OE = BD = \sqrt{3}$ ；

由 $S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot CF = \frac{9}{2}\sqrt{3}$ 可得 $CF = 9$ ，由 $\angle BDC = 120^\circ$ ，可知 $\angle CDF = 60^\circ$ ，所以 $DF = 3\sqrt{3}$ ，所以点 D 的纵

坐标为 $4\sqrt{3}$ ；设 $C(m, \sqrt{3})$ ， $D(m+9, 4\sqrt{3})$ ，则 $k = \sqrt{3}m = 4\sqrt{3}(m+9)$ ，求出 m 的值即可求出 k 的值.

【详解】解：过点 C 作 $CE \perp y$ 轴于点 E ，延长 BD 交 CE 于点 F ，



∵ 四边形 $OABC$ 为平行四边形,

∴ $AB \parallel OC$, $AB=OC$,

∴ $\angle COE = \angle ABD$,

∵ $BD \parallel y$ 轴,

∴ $\angle ADB = 90^\circ$,

∴ $\triangle COE \cong \triangle ABD$ (AAS),

∴ $OE = BD = \sqrt{3}$,

∵ $S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot CF = \frac{9}{2} \sqrt{3}$,

∴ $CF = 9$,

∵ $\angle BDC = 120^\circ$,

∴ $\angle CDF = 60^\circ$,

∴ $DF = 3\sqrt{3}$.

∴ 点 D 的纵坐标为 $4\sqrt{3}$,

设 $C(m, \sqrt{3})$, $D(m+9, 4\sqrt{3})$,

∵ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x < 0$) 的图像经过 C 、 D 两点,

∴ $k = \sqrt{3}m = 4\sqrt{3}(m+9)$,

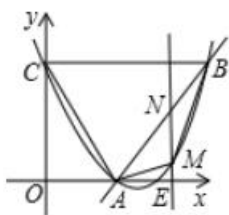
∴ $m = -12$,

∴ $k = -12\sqrt{3}$.

故选: C.

【点睛】 本题主要考查反比例函数与几何的综合问题, 坐标与图形, 全等三角形的判定与性质, 设出关键点的坐标, 并根据几何关系消去参数的值是本题解题关键.

10. 如图, 抛物线 $y = ax^2 - \frac{10}{3}x + 4$ 与直线 $y = \frac{4}{3}x + b$ 经过点 $A(2, 0)$, 且相交于另一点 B , 抛物线与 y 轴交于点 C , 与 x 轴交于另一点 E , 过点 N 的直线交抛物线于点 M , 且 $MN \parallel y$ 轴, 连接 AM, BM, BC, AC , 当点 N 在线段 AB 上移动时 (不与 A 、 B 重合), 下列结论正确的是 ()



A. $MN + BN < AB$

B. $\angle BAC = \angle BAE$

C. $\angle ACB - \angle ANM = \frac{1}{2} \angle ABC$

D. 四边形 $ACBM$ 的最大面积为 13

【答案】C

【解析】

【分析】(1) 当 MN 过对称轴的直线时，解得： $BN = \frac{25}{6}$ ，而 $MN = \frac{5}{6}$ ， $BN + MN = 5 = AB$ ；

(2) 由 $BC \parallel x$ 轴 (B 、 C 两点 y 坐标相同) 推知 $\angle BAE = \angle CBA$ ，而 $\triangle ABC$ 是等腰三角形， $\angle CBA \neq \angle BCA$ ，故 $\angle BAC = \angle BAE$ 错误；

(3) 如上图，过点 A 作 $AD \perp BC$ 、 $BE \perp AC$ ，由 $\triangle ABC$ 是等腰三角形得到： EB 是 $\angle ABC$ 的平分线， $\angle ACB - \angle ANM = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle ABC$ ；

(4) $S_{\text{四边形 } ACBM} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ABM}$ ，其最大值为 $\frac{9}{4}$ 。

【详解】解：将点 $A(2, 0)$ 代入抛物线 $y = ax^2 - \frac{10}{3}x + 4$ 与直线 $y = \frac{4}{3}x + b$

解得： $a = \frac{2}{3}$ ， $b = -\frac{8}{3}$ ，

设： M 点横坐标为 m ，则 $M(m, \frac{2}{3}m^2 - \frac{10}{3}m + 4)$ 、 $N(m, \frac{4}{3}m - \frac{8}{3})$ ，

其它点坐标为 $A(2, 0)$ 、 $B(5, 4)$ 、 $C(0, 4)$ ，

则 $AB = BC = 5$ ，则 $\angle CAB = \angle ACB$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形。

A、当 MN 过对称轴的直线时，此时点 M 、 N 的坐标分别为 $(\frac{5}{2}, -\frac{1}{6})$ 、 $(\frac{5}{2}, \frac{2}{3})$ ，

由勾股定理得： $BN = \frac{25}{6}$ ，而 $MN = \frac{5}{6}$ ，

$BN + MN = 5 = AB$ ，

故本选项错误；

B、 $\because BC \parallel x$ 轴 (B 、 C 两点 y 坐标相同)，

$\therefore \angle BAE = \angle CBA$ ，而 $\triangle ABC$ 是等腰三角形不是等边三角形，

$\angle CBA \neq \angle BCA$ ，

$\therefore \angle BAC = \angle BAE$ 不成立，

故本选项错误；

【解析】

【分析】二次根式中被开方数的取值范围：二次根式中的被开方数是非负数.

【详解】解：∵代数式 $\frac{1}{\sqrt{x-3}}$ 有意义，

$$\therefore x-3>0,$$

$$\therefore x>3,$$

∴ x 的取值范围是 $x>3$,

故答案为： $x>3$.

【点睛】本题主要考查了二次根式有意义的条件，如果所给式子中含有分母，则除了保证被开方数为非负数外，还必须保证分母不为零.

13. 清代诗人袁枚的一首诗《苔》中写到：“白日不到处，青春恰自来，苔花如米小，也学牡丹开”，若苔花的花粉直径约为 0.0000084 米，用科学记数法表示为_____米.

【答案】 8.4×10^{-6}

【解析】

【分析】本题考查了科学记数法，熟记科学记数法的定义(将一个数表示成 $a \times 10^n$ 的形式，其中

$1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，这种记数的方法叫做科学记数法)是解题关键. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同.

根据科学记数法的定义即可得.

【详解】解： $0.0000084 = 8.4 \times 10^{-6}$ ，

故答案为： 8.4×10^{-6} .

14. 南宋数学家杨辉在他的著作《杨辉算法》中提出这样一个数学问题：“直田积八百六十四步，只云长阔共六十步，问长多阔几何”. 意思是：一块矩形地的面积为 864 平方步，已知长与宽的和为 60 步，问长比宽多几步？设矩形的长为 x 步，则可列出方程为_____.

【答案】 $x(60-x) = 864$

【解析】

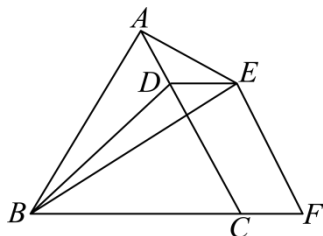
【分析】本题考查古代数学问题，涉及列一元一次方程，读懂题意，设矩形的长为 x 步，找到等量关系列方程即可得到答案.

【详解】解：设矩形的长为 x 步，则宽为 $(60-x)$ 步，

$$\therefore x(60-x)=864,$$

故答案为: $x(60-x)=864$.

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在线段 AC 上, 点 F 在线段 BC 的延长线上, 若 $BF = 5CF$, 四边形 $CDEF$ 是平行四边形, 且 $\triangle BDE$ 与 $\triangle ADE$ 的面积和为 6, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ____.

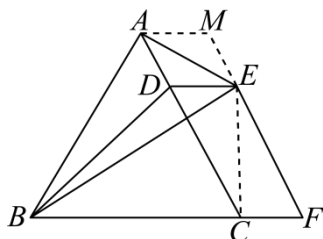


【答案】 24

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的判定与性质以及三角形的面积等知识, 连接 EC , 过 A 作 $AM \parallel BC$ 交 FE 的延长线于点 M , 证四边形 $ACFM$ 是平行四边形, 再证 $S_{\triangle BDE} + S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} S_{\text{平行四边形}ACFM} = 6$, 设平行四边形 $ACFM$ 的边 CF 上的高为 h , 则 $CF \cdot h = 12$, 然后证 $BC = 4CF$, 即可解决问题.

【详解】解: 如图, 连接 EC , 过 A 作 $AM \parallel BC$ 交 FE 的延长线于点 M ,



$\because$ 四边形 $CDEF$ 是平行四边形,

$\therefore DE \parallel CF, EF \parallel CD,$

$\therefore AM \parallel DE \parallel CF, AC \parallel FM,$

$\therefore$ 四边形 $ACFM$ 是平行四边形,

$\because \triangle BDE$ 边 DE 上的高和 $\triangle CDE$ 的边 DE 上的高相同,

$$\therefore S_{\triangle BDE} = S_{\triangle CDE},$$

$$\text{同理: } S_{\triangle ADE} = S_{\triangle AME},$$

$$\therefore S_{\triangle BDE} + S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} S_{\text{平行四边形}ACFM} = 6,$$

$$\therefore S_{\text{平行四边形}ACFM} = 2 \times 6 = 12,$$

设平行四边形 $ACFM$ 的边 CF 上的高为 h ,

则 $CF \cdot h = 12$,

$\because BF = 5CF$,

$\therefore BC = 4CF$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot h = \frac{1}{2} \times 4CF \cdot h = 2 \times 12 = 24,$$

故答案为: 24.

16. 规定: 若 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 y_2 + x_2 y_1$. 例如 $\vec{a} = (1, 3)$, $\vec{b} = (2, 4)$, 则

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 4 + 3 \times 2 = 10$. 已知 $\vec{a} = (x+1, x-2)$, $\vec{b} = (x-3, 4)$, 且 $1 \leq x \leq 2$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的最小值是_____.

【答案】10

【解析】

【分析】根据平面向量的新定义运算法则, 列出关于 x 的二次函数, 根据二次函数最值的求法解答即可.

【详解】解: 由新定义得: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4(x+1) + (x-2)(x-3) = x^2 - x + 10 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{39}{4}$,

$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{39}{4}$ 的图象开口向上, 对称轴为 $x = \frac{1}{2}$

$\because 1 \leq x \leq 2$,

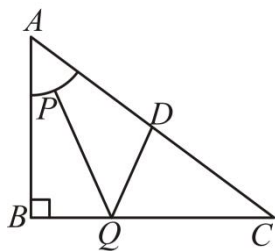
$\therefore$ 当 $x = 1$ 时, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 取最小值, 最小值为: $\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{39}{4} = 10$,

故答案为: 10.

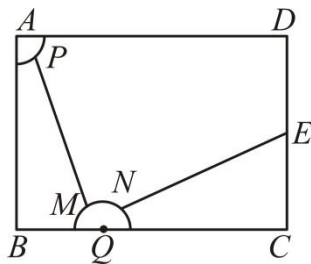
【点睛】本题主要考查了新定义运算和二次函数性质, 解题时准确理解题意, 列出二次函数解析式, 利用配方法求得二次函数的最值是解题的关键.

17. (1) 如图①, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 6$, $BC = 8$, 点 D 是边 AC 的中点. 以点 A 为圆心, 2 为半径在 $\triangle ABC$ 内部画弧, 若点 P 是上述弧上的动点, 点 Q 是边 BC 上的动点, $PQ + QD$ 的最小值是_____

(2) 如图②, 矩形 $ABCD$ 中 $AB = 200\sqrt{3}$, $BC = 300$. E 为 CD 中点, 要在以点 A 为圆心, 10 为半径的圆弧上选一处点 P , 边 BC 上选一处点 Q , M 、 N 是以 Q 为圆心, 10 为半径的半圆的三等分点处, $PM + NE$ 的最小值是_____.



(图①)



(图②)

【答案】 ①. $\sqrt{97} - 2 - 2 + \sqrt{97}$ ②. 570

【解析】

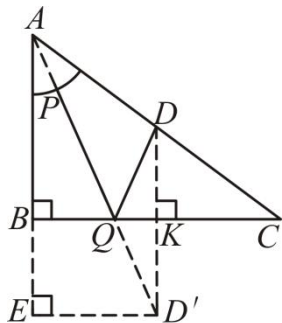
【分析】本题是矩形综合题，考查了矩形的性质，轴对称—最小值问题，相似三角形的性质与判定等，本题综合性较强，巧妙的添加辅助线是解题的关键.

(1) 作点 D 关于 BC 的对称点 D' ，连接 $D'Q$ 、 AP ，过点 D' 作 $D'E \perp AB$ 交 AB 的延长线于 E ，则 $QD = QD'$ ， $DK = D'K$ ，当 A 、 P 、 Q 、 D' 在同一条直线上时， $PQ + QD = AD' - AP$ 取得最小值，由 $DK \parallel AB$ ，可得 $\triangle CDK \sim \triangle CAB$ ，运用相似三角形性质可得 $DK = 3$ ， $CK = 4$ ，再由勾股定理即可求得答案；

(2) 连接 MQ ， NQ ，过点 Q 作 $QK \perp MN$ 于 K ，作点 A 关于直线 MN 的对称点 A' ，将 E 向左平移 10 得到点 E' ，过点 E' 作 $E'L \parallel AB$ ，过点 A' 作 $A'L \perp E'L$ 于 L ，连接 $A'M$ 、 $A'E'$ 、 $E'M$ ，由题意得随着圆心 Q 在 BC 上运动， MN 在平行于 BC 且到 BC 距离为 $5\sqrt{3}$ 的直线上运动，再运用勾股定理可得 $PM + NE$ 最小值即可.

【详解】解：(1) 如图①，作点 D 关于 BC 的对称点 D' ，连接 $D'Q$ 、 AP ，过点 D' 作 $D'E \perp AB$ 交 AB 的延长线于 E ，

则 $QD = QD'$ ， $DK = D'K$ ，



图①

$\therefore PQ + QD = PQ + QD' = AD' - AP + QD'$ ，

当 A 、 P 、 Q 、 D' 在同一条直线上时， $PQ + QD = AD' - AP$ 取得最小值，

⊙ $QK \perp MN$, $QM = 10$,

$$\therefore QK = 5\sqrt{3},$$

∴ 随着圆心 Q 在 BC 上运动, MN 在平行于 BC 且到 BC 距离为 $5\sqrt{3}$ 的直线上运动,

⊙ $EE' \parallel MN$ 且 $EE' = MN = 10$,

∴ 四边形 $EE'MN$ 是平行四边形,

$$\therefore NE = ME',$$

$$\therefore PM + NE = PM + ME' \geq AM - AP + ME' = AM + ME' - 10,$$

⊙ E 是 CD 的中点,

$$\therefore DE = \frac{1}{2}CD = 100\sqrt{3},$$

$$\therefore E'L = AA' - DE = 2(AB - QK) - DE = 2 \times (200\sqrt{3} - 5\sqrt{3}) - 100\sqrt{3} = 290\sqrt{3},$$

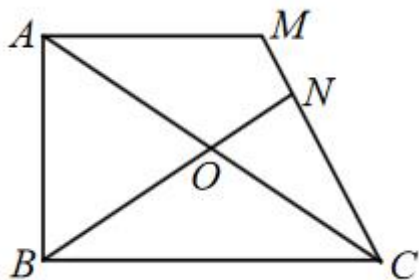
$$A'L = BC - E'E = 300 - 10 = 290,$$

$$\text{在 Rt}\triangle A'E'L \text{ 中, } A'E' = \sqrt{A'L^2 + E'L^2} = \sqrt{290^2 + (290\sqrt{3})^2} = 580,$$

$$\therefore PM + NE \text{ 最小值} = A'E - AP = 580 - 10 = 570,$$

故答案为: 570.

18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, 以 AC 为边在 $\triangle ABC$ 外作等腰三角形 $\triangle AMC$, 满足 $AM = CM$, $AM \parallel BC$, O 是边 AC 的中点, 连结 BO , 作射线 BO 交折线段 $A-M-C$ 于点 N , 若 $MN=2$, $ON=3$, 则 AM 的长为_____.



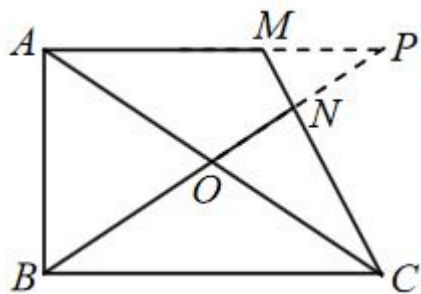
【答案】 $3+\sqrt{19}$ 或 $1+\sqrt{19}$ 或 $1+\sqrt{19}$ 或 $3+\sqrt{19}$

【解析】

【分析】分 N 在 AM 和 CM 上两种情况; 当 N 在 CM 上, 根据直角三角形斜边中线、等腰三角形、平行线的性质, 通过证明 $\triangle AOP \cong \triangle COB$ 、 $\triangle MNP \sim \triangle CNB$ 、 $\triangle MNP \sim \triangle ONC$, 得可化为一元二次方程的分式方程, 通过求解即可得到答案; 当 N 在 AM 上, 结合全等三角形、矩形的性质, 通过勾股定理性质列一元二次方程并求解, 即可完成求解.

【详解】分 N 在 AM 和 CM 上两种情况：

当 N 在 CM 上，分别延长 AM 、 BN ，并交于点 P ，如下图：



$\because \angle ABC = 90^\circ$ ， O 是边 AC 的中点

$\therefore AO = BO = CO$

$\therefore \angle OBC = \angle OCB$

$\because$ 等腰三角形 $\triangle AMC$ ， $AM = CM$

$\therefore \angle MAC = \angle MCA$

$\because AM \parallel BC$ ，

$\therefore \angle MAC = \angle OCB = \angle MCA$

$$\therefore \begin{cases} \angle MAC = \angle OCB \\ AO = CO \\ \angle AOP = \angle COB \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOP \cong \triangle COB$

$\therefore OP = OB = OA = OC$ ， $\angle P = \angle OBC = \angle MCA$

$\because \angle MNP = \angle CNB$

$\therefore \triangle MNP \sim \triangle CNB$ ， $\triangle MNP \sim \triangle ONC$

$$\therefore \frac{MN}{CN} = \frac{NP}{NB}，\frac{MN}{ON} = \frac{NP}{NC}$$

设 $AM = CM = x$

$\because MN = 2$ ， $ON = 3$ ，

$$\therefore \frac{2}{x-2} = \frac{OB-3}{OB+3}，\frac{2}{3} = \frac{OB-3}{x-2}$$

$$\therefore OB = \frac{3x}{x-4}，OB = \frac{2x+5}{3}$$

$$\therefore \frac{3x}{x-4} = \frac{2x+5}{3}$$

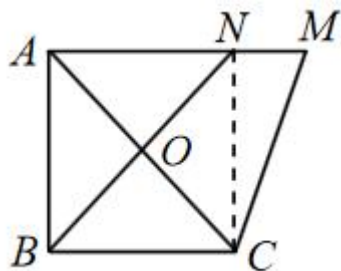
$$\therefore x^2 - 6x - 10 = 0$$

$\therefore x = 3 + \sqrt{19}$ 或 $3 - \sqrt{19}$ （不符合题意，舍去）

经检验, $x = 3 + \sqrt{19}$ 时, $x - 4 \neq 0$

$\therefore x = 3 + \sqrt{19}$ 是原方程的解;

当 N 在 AM 上, 连接 CN , 如下图:



设 $AM = CM = x$

$\because \angle ABC = 90^\circ$, O 是边 AC 的中点

$\therefore AO = BO = CO$

$\because AM \parallel BC$,

$\therefore \angle MAC = \angle OCB$

$$\therefore \begin{cases} \angle MAC = \angle OCB \\ AO = CO \\ \angle AON = \angle COB \end{cases}$$

$\therefore \triangle AON \cong \triangle COB$

$\therefore AN = BC$, $ON = OB$

$\therefore AO = BO = CO = ON = 3$, $AN = AM - MN = x - 2$

$\because \angle ABC = 90^\circ$

$\therefore$ 四边形 $ABCN$ 为矩形

$\therefore \angle ANC = \angle CNM = 90^\circ$

$\therefore CN^2 = AC^2 - AN^2 = CM^2 - MN^2$

$\because AC = AO + CO = 6$

$$\therefore 6^2 - (x - 2)^2 = x^2 - 2^2$$

$$\therefore x^2 - 2x - 18 = 0$$

$\therefore x = 1 + \sqrt{19}$ 或 $1 - \sqrt{19}$ (不符合题意, 舍去)

$\therefore AM$ 的长为: $3 + \sqrt{19}$ 或 $1 + \sqrt{19}$

故答案为： $3+\sqrt{19}$ 或 $1+\sqrt{19}$.

【点睛】 本题考查了直角三角形、等腰三角形、矩形、全等三角形、相似三角形、分式方程、一元二次方程、勾股定理的知识；解题的关键是熟练掌握直角三角形斜边中线、矩形、全等三角形、相似三角形、分式方程、一元二次方程、勾股定理的性质，从而完成求解.

三. 解答题（本大题共 10 小题，共 96 分）

19. （1）计算： $(-1)^3 + \sqrt{2} \tan 45^\circ - \sqrt{8}$ ；

（2）化简： $\frac{a^2-4}{a} \div \left(1 - \frac{2}{a}\right)$.

【答案】（1） $-1-\sqrt{2}$ ；（2） $a+2$

【解析】

【分析】（1）利用乘方、特殊角三角函数值，算术平方根计算各项，即可求解；

（2）利用分式的加法和除法法则直接计算即可求解.

【详解】解：（1） $(-1)^3 + \sqrt{2} \tan 45^\circ - \sqrt{8}$

$$= -1 + \sqrt{2} \times 1 - 2\sqrt{2}$$

$$= -1 + \sqrt{2} - 2\sqrt{2}$$

$$= -1 - \sqrt{2};$$

$$(2) \frac{a^2-4}{a} \div \left(1 - \frac{2}{a}\right)$$

$$= \frac{(a+2)(a-2)}{a} \div \frac{a-2}{a}$$

$$= \frac{(a+2)(a-2)}{a} \cdot \frac{a}{a-2}$$

$$= a+2.$$

【点睛】 本题考查实数的运算、分式的运算，掌握乘方、特殊角三角函数值，算术平方根以及分式的运算法则是解题的关键.

20. 解方程与不等式组：

$$(1) x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$(2) \begin{cases} \frac{x-3}{2} + 3 \geq x+1 \\ 1-3(x-1) < 8-x \end{cases}$$

【答案】(1) $x_1 = -2 + \sqrt{5}$, $x_2 = -2 - \sqrt{5}$

(2) $-2 < x \leq 1$

【解析】

【分析】(1) 根据配方法解一元二次方程即可求解；

(2) 分别求出每一个不等式的解集，根据口诀：同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小找不到确定不等式组的解集.

【小问 1 详解】

解: $x^2 + 4x - 1 = 0$

配方, 得: $x^2 + 4x + 4 = 5$,

$\therefore (x+2)^2 = 5$,

解得: $x_1 = -2 + \sqrt{5}$, $x_2 = -2 - \sqrt{5}$;

【小问 2 详解】

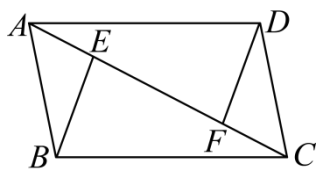
解: 解不等式 $\frac{x-3}{2} + 3 \geq x+1$, 得 $x \leq 1$.

解不等式 $1-3(x-1) < 8-x$, 得 $x > -2$

$\therefore$ 原不等式组的解集是 $-2 < x \leq 1$.

【点睛】本题考查了解一元二次方程, 解一元一次不等式组, 正确掌握解一元二次方程的方法以及一元一次不等式解集确定方法是解题的关键.

21. 如图, 已知 $AB = DC$, $AB \parallel CD$, 且 $AF = CE$.



(1) 求证: $\triangle ABE \cong \triangle CDF$;

(2) 若 $\angle BCE = 30^\circ$, $\angle CBE = 70^\circ$, 求 $\angle CFD$ 的度数.

【答案】(1) 见解析;

(2) 100° .

【解析】

【分析】(1) 由平行线的性质得出 $\angle BAE = \angle FCD$ ，根据 SAS 可得出 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ ；

(2) 求出 $\angle AEB = \angle BCE + \angle CBE = 100^\circ$ ，可得出 $\angle CFD = \angle AEB = 100^\circ$ 。

【小问 1 详解】

证明： $\because AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle BAE = \angle FCD$ ，

$\because AF = CE$ ，

$\therefore AE = CF$ ，

又 $\because AB = CD$ ，

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF$ (SAS)。

【小问 2 详解】

解： $\because \angle BCE = 30^\circ$ ， $\angle CBE = 70^\circ$ ，

$\therefore \angle AEB = \angle BCE + \angle CBE = 30^\circ + 70^\circ = 100^\circ$ ，

$\because \triangle ABE \cong \triangle CDF$ ，

$\therefore \angle CFD = \angle AEB = 100^\circ$ 。

【点睛】本题考查了全等三角形的判定与性质，平行线的性质，三角形的外角和等知识，熟练掌握全等三角形的判定与性质是解题的关键。

22. 甲、乙两人做游戏，他们在一只不透明的袋子中装了五个小球，分别标有数字：1，1，2，2，3，这些小球除编号外都相同。

(1) 搅匀后，甲从中任意摸出一个小球，则这个小球的编号是偶数的概率为_____；

(2) 搅匀后，甲从中任意摸出一个小球，记录小球的编号后放回、搅匀，乙再从中任意摸出一个小球，若摸出两个小球编号之和为偶数甲获胜；否则，乙获胜，请你用画树状图或列表的方法说明谁获胜的概率大。

【答案】(1) $\frac{2}{5}$

(2) 甲获胜的概率大

【解析】

【分析】本题考查简单随机事件的概率计算，利用列表法求等可能事件发生的概率，使用此方法一定注意每一种结果出现的可能性是均等的，即为等可能事件。

(1) 直接利用概率公式求解即可求得答案；

(2) 列表表示所有等可能出现的情况，从中找出符合条件的结果数，进而求出概率。

【小问 1 详解】

解：搅匀后从中任意摸出 1 个球，这个球的编号是 2 的概率为 $\frac{2}{5}$ ；

故答案为： $\frac{2}{5}$ ；

【小问 2 详解】

解：列表如下：

	1	1	2	2	3
1	2	2	3	3	4
1	2	2	3	3	4
2	3	3	4	4	5
2	3	3	4	4	5
3	4	4	5	5	6

所有可能的结果数为 25 个，两次摸到的小球编号和为偶数的结果数为 13 个，

∴两次摸到的小球编号和为偶数的概率为： $\frac{13}{25}$ ，

∴甲获胜的概率为 $\frac{13}{25}$ ，乙获胜的概率为 $1 - \frac{13}{25} = \frac{12}{25}$ ，

∴ $\frac{13}{25} > \frac{12}{25}$ ，

∴甲获胜的概率大.

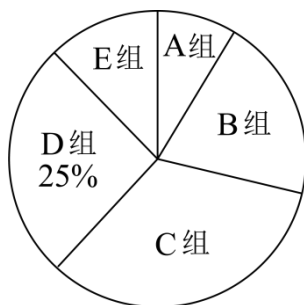
23. 劳动教育是新时代党对教育的新要求，某校为了解学生参加家务劳动的情况，随机抽取了部分学生在某个星期日做家务的时间 t （单位 h ）作为样本，将收集的数据整理后分为 A, B, C, D, E 五个组别，其中 A 组的数据分别为：0.5,0.4,0.4，0.4,0.3，绘制成如下不完整的统计图表.

各组劳动时间的频数分布表

组别	时间/h	频数
A	$0 < t \leq 0.5$	5
B	$0.5 < t \leq 1$	a
C	$1 < t \leq 1.5$	20

D	$1.5 < t \leq 2$	15
E	$t > 2$	8

各组劳动时间的扇形统计图



请根据以上信息解答下列问题

- (1) 本次调查的样本容量为_____，频数分布表中的 a 的值为_____；
- (2) A 组数据的众数为_____h， B 组所在扇形的圆心角的大小为_____；
- (3) 若该校有 1200 名学生，估计该校学生劳动时间超过 1h 的人数

【答案】(1) 60, 12

(2) 0.4, 72°

(3) 860

【解析】

【分析】 本题考查了扇形统计图和频数分布表的信息关联，还考查了众数、样本容量、用样本估计总体等知识，读懂题意，找准扇形统计图和频数分布表的联系，准确计算是解题的关键.

(1) 利用 D 组的频数除以对应的百分比即可得到样本容量，利用样本容量减去 A 、 C 、 D 、 E 组的频数得到 B 组的频数；

(2) 根据众数是一组数据中出现次数最多的数据进行求解，再用 360° 乘以 B 组占样本的百分比即可得到 B 组所在扇形的圆心角的大小；

(3) 用该校所有学生数乘以样本中劳动时间超过 1h 的人数的占比即可估计该校学生劳动时间超过 1h 的人数.

【小问 1 详解】

解：由题意可得，本次调查的样本容量是 $15 \div 25\% = 60$ ，

由题意得 $a = 60 - 5 - 20 - 15 - 8 = 12$ ，

故答案为：60, 12；

【小问 2 详解】

解： $\because A$ 组的数据为：0.5, 0.4, 0.4, 0.4, 0.3，共有 5 个数据，出现次数最多的是 0.4，共出现了 3 次，

∴A 组数据的众数是 0.4；

B 组所在扇形的圆心角的大小是 $360^\circ \times \frac{12}{60} = 72^\circ$ ，

故答案为：0.4， 72° ；

【小问 3 详解】

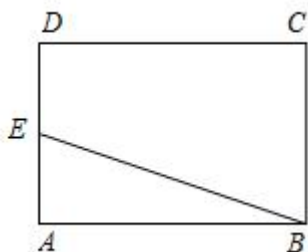
解： $1200 \times \frac{20+15+8}{60} = 860$ （人）.

答：该校学生劳动时间超过 1h 的大约有 860 人.

24. 如图，矩形 $ABCD$ 中， E 为 AD 的中点.

(1) 在 CD 边上求作一点 F ，使得 $\angle CFB = 2\angle ABE$ ；

(2) 在 (1) 中，若 $AB = 9$ ， $BC = 6$ ，求 BF 的长.



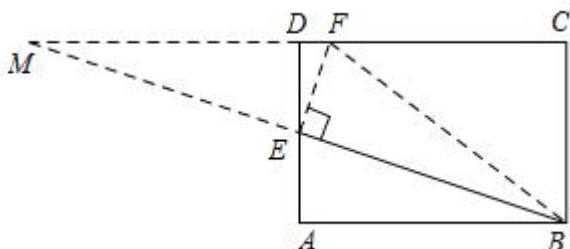
【答案】(1) 见解析；(2) $BF = 10$

【解析】

【分析】(1) 过点 E 作 $EF \perp BE$ 交 CD 于点 F ，延长 BE 和 CD 交于点 M ，利用角角边判定 $\triangle DEM \cong \triangle AEB$ ，得到 $EM = EB$ ，结合 $EF \perp BE$ ，证明 FE 是线段 MB 的垂直平分线，进一步推导得到 $\angle M = \angle FBM$ ，由 $\angle CFB = \angle M + \angle FBM$ ， $\angle ABF = \angle ABE + \angle FBM$ ，即可证明 $\angle CFB = 2\angle ABE$ ，此时点 F 即为所求.

(2) 由矩形性质求得相关边长度，在 $Rt\triangle EFB$ 中，由勾股定理得： $EF^2 + BE^2 = BF^2$ ，将对应数值代入求解即可.

【详解】解：(1) 如图，过点 E 作 $EF \perp BE$ 交 CD 于点 F ，点 F 即为所求；



延长 BE 和 CD 交于点 M ，

∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore CD \parallel AB,$$

$$\therefore \angle M = \angle ABE, \quad \angle CFB = \angle ABF,$$

⊙ E 为 AD 的中点.

$$\therefore DE = AE,$$

在 $\triangle DEM$ 和 $\triangle AEB$ 中,

$$\begin{cases} \angle M = \angle EBA \\ \angle MED = \angle BEA, \\ DE = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DEM \cong \triangle AEB (AAS),$$

$$\therefore EM = EB,$$

⊙ $EF \perp BE$,

$\therefore FE$ 是线段 MB 的垂直平分线,

$$\therefore FM = FB,$$

$$\therefore \angle M = \angle FBM,$$

$$\ominus \angle CFB = \angle M + \angle FBM, \quad \angle ABF = \angle ABE + \angle FBM,$$

$$\therefore \angle CFB = 2\angle ABE;$$

(2) ⊙ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore CD = AB = 9, \quad AD = BC = 6,$$

$$\therefore DE = AE = 3,$$

$$\ominus EF^2 + BE^2 = BF^2,$$

$$\therefore (3^2 + DF^2) + (3^2 + 9^2) = (9 - DF)^2 + 6^2,$$

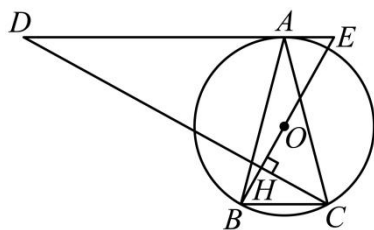
解得 $DF = 1$,

$$\therefore CF = CD - DF = 9 - 1 = 8,$$

$$\therefore BF = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10.$$

【点睛】本题考查勾股定理，矩形性质，三角形全等的判定等知识点，根据知识点解题是关键.

25. ΓO 是 $\triangle ABC$ 的外接圆， $AB=AC$ ，过点 A 作 $AE \parallel BC$ ，交射线 BO 于点 E ，过点 C 作 $CH \perp BE$ 于点 H ，交直线 AE 于点 D .



(1) 求证: DE 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 已知 $BC=4\sqrt{5}$, $\tan \angle D=\frac{1}{2}$, 求 DE 的长度.

【答案】(1) 见详解 (2) $25+6\sqrt{5}$

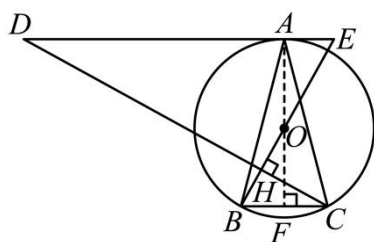
【解析】

【分析】(1) 过点 A 作 $AF \perp BC$, 垂足为 F , 则 AF 是 BC 的垂直平分线, 且 AF 过圆心 O , 由平行得到 $\angle EAO = 90^\circ$, 即可判定为切线;

(2) 连接 OC , 由平行得 $\angle D = \angle DCB$, 由垂直得 $\angle BHC = \angle OHC = \angle DHE$, 设 $BH = x$, 得 $CH = 2x$, 利用勾股定理求得 BH 和 CH , 以及 $\odot O$ 的半径, 即可得到 OH , 进一步得到 $\angle D = \angle AOE$, 利用正切值求得 AE , 则有 OE 和 EH , 再次利用正切值即可求得 DE .

【小问 1 详解】

证明: 过点 A 作 $AF \perp BC$, 垂足为 F , 如图,



$\because AB = AC$, $AF \perp BC$,

$\therefore AF$ 是 BC 的垂直平分线,

$\therefore AF$ 过圆心 O ,

$\because AE \parallel BC$,

$\therefore \angle EAO = \angle AFB = 90^\circ$,

$\because OA$ 是圆 O 的半径,

$\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线;

【小问 2 详解】

连接 OC , 如图,

$$\therefore EH = OE + OH = 5\sqrt{5} + 6,$$

$$\text{在 Rt}\triangle DHE \text{ 中, } \tan \angle D = \frac{EH}{DH} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore DE = \sqrt{5}EH = 25 + 6\sqrt{5}.$$

【点睛】本题主要考查圆和三角形的有关知识，涉及等腰三角形的性质、平行线的性质、圆的切线判定、解直角三角形和勾股定理，解题的关键是熟练利用正切值和作辅助线.

26. 1 是一种儿童可折叠滑板车，该滑板车完全展开后示意图如图 2 所示，由车架 $AB-CE-EF$ 和两个大小相同的车轮组成车轮半径为 8 cm，已知 $BC = 58\text{cm}$ ， $CD = 30\text{cm}$ ， $DE = 12\text{cm}$ ， $EF = 68\text{cm}$ ，

$$\cos \angle ACD = \frac{4}{5}, \text{ 当 } A, E, F \text{ 在同一水平高度上时, } \angle CEF = 135^\circ.$$



图1

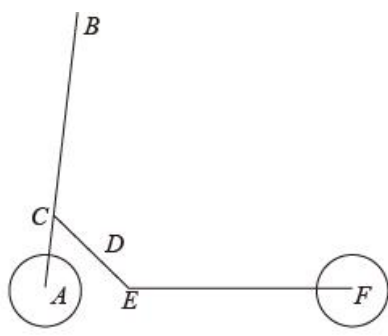


图2

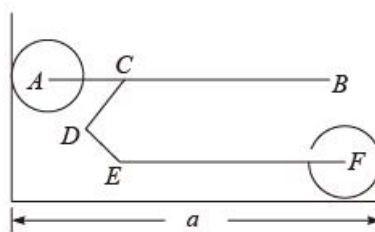


图3

(1) 求 AC 的长;

(2) 为方便存放，将车架前部分绕着点 D 旋转至 $AB \parallel EF$ ，按如图 3 所示方式放入收纳箱，试问该滑板车折叠后能否放进长 $a = 100\text{cm}$ 的收纳箱（收纳箱的宽度和高度足够大），请说明理由（参考数据：

$$\sqrt{2} \approx 1.4).$$

【答案】(1) 30cm

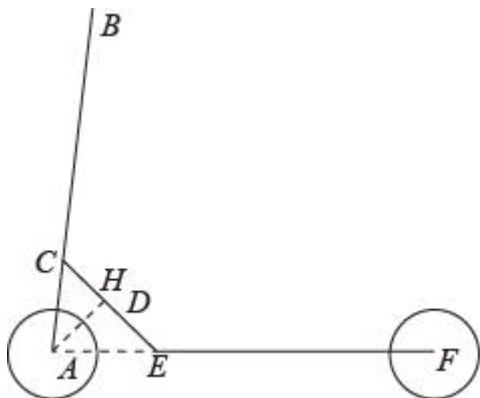
(2) 该滑板车折叠后能放进长 $a = 100\text{cm}$ 的收纳箱，理由见解析

【解析】

【分析】(1) 根据题意作辅助线构造直角三角形，再根据 $\cos \angle ACD = \frac{4}{5}$ ，设 $CH = 4x$ ， $AC = 5x$ ，再由勾股定理得 $AH = 3x$ ，可得 $\triangle ADE$ 是等腰直角三角形，再利用线段之间的关系即可求解；

(2) 过点 A 作 $AM \perp EF$ 交其延长线于点 M ，过点 D 作 $DN \perp EF$ 交其延长线于点 N ，并延长 ND ，交 AB 于点 P ，先证明四边形 $AMNP$ 是矩形，再由解直角三角形求 PC 、 NE 的长度，再根据题意求出折叠后的总长度进行比较即可.

【小问 1 详解】



过点 A 作 $AH \perp CE$,

$$\Theta \cos \angle ACD = \frac{4}{5} = \frac{CH}{AC}, \text{ 可设 } CH = 4x, AC = 5x,$$

由勾股定理得 $AH = 3x$,

$$\Theta \angle CEF = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle AED = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle ADE$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore AH = HE,$$

$$\Theta CD = 30, DE = 12,$$

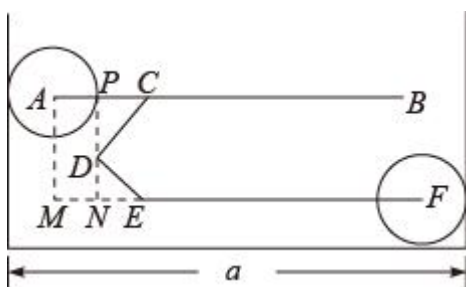
$$\therefore CE = CD + DE = 42,$$

$$\therefore HE = CE - CH = 42 - 4x = 3x,$$

解得 $x = 6$,

$$\therefore AC = 30\text{cm};$$

【小问 2 详解】



过点 A 作 $AM \perp EF$ 交其延长线于点 M , 过点 D 作 $DN \perp EF$ 交其延长线于点 N , 并延长 ND , 交 AB 于点 P ,

$$\text{Q } AB \parallel EF,$$

$$\therefore \angle M = \angle PNM = \angle NPA = 90^\circ$$

$\therefore$ 四边形 $AMNP$ 是矩形,

$$\therefore AP = MN,$$

$$\ominus CD = 30, DE = 12, \cos \angle ACD = \frac{4}{5}, \angle DEN = 45^\circ, AC = 30,$$

$$\therefore PC = CD \cdot \cos \angle ACD = 24, EN = ED \cdot \cos \angle DEN = 6\sqrt{2},$$

$$\therefore MN = AP = AC - CP = 30 - 24 = 6,$$

$$\therefore ME = MN + NE = 6 + 6\sqrt{2},$$

$$\text{Q } EF = 68,$$

$$\therefore \text{滑板车折叠后总长度为 } 8 \times 2 + 6 + 6\sqrt{2} + 68 \approx 98.4 < 100,$$

所以，该滑板车折叠后能放进长 $a = 100\text{cm}$ 的收纳箱.

【点睛】本题考查了解直角三角形的应用及翻折变换，熟练掌握知识点并能够准确理解题意是解题的关键.

27. 在平面直角坐标系中为，抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ (b 、 c 为常数) 的对称轴为直线 $x = 1$ ，与 y 轴交点坐标为 $(0, 3)$.

(1) 求此抛物线对应的函数表达式;

(2) 点 A 、点 B 均在这个抛物线上 (点 A 在点 B 的左侧)，点 A 的横坐标为 m ，点 B 的横坐标为 $4 - m$. 将此抛物线上 A, B 两点之间的部分 (含 A, B 两点) 记为图象 G .

①当点 A 在 x 轴上方，图象 G 的最高与最低点的纵坐标差为 6 时，求 m 的值;

②设点 $D(1, n)$ ，点 $E(1, 1 - n)$ ，将线段 DE 绕点 D 逆时针旋转 90° 后得到线段 DF ，连接 EF ，当 ζDEF (不含内部) 和二次函数在 $x \geq 0$ 范围上的图像有且仅有一个公共点时，求 n 的取值范围.

【答案】(1) $y = -x^2 + 2x + 3$;

$$(2) \text{① } 3 - \sqrt{6}; \text{② } n = \frac{3 + \sqrt{57}}{8} \text{ 或 } n < -\frac{13}{4};$$

【解析】

【分析】本题考查待定系数法求解析式及二次函数最值、与线段交点问题:

(1) 将对称轴及点 $(0, 3)$ 代入求解即可得到答案;

(2) ①先求出二次函数与 x 轴交点，分点 A 在对称轴左边，对称轴右边两类讨论，根据最高与最低点的距离列式即可得到答案; ②当点 $D(1, n)$ 在点 $E(1, 1 - n)$ 上方，用含 n 的代数式表示出点 $F(2n, n)$ ，当点 $F(2n, n)$ 在抛物线 $y = -x^2 + 2x + 3$ 上时， ζDEF (不含内部) 和二次函数在 $x \geq 0$ 范围上的图像有且仅有一个公共点，当点 $D(1, n)$ 在点 $E(1, 1 - n)$ 下方，根据 $E(1, 1 - n)$ ， $F(2n, n)$ 得出 EF 解析式，与抛物线解

析式联立，求出 $\Delta = 0$ 时对应的 n 的值，当 $n < -\frac{13}{4}$ 时， ζ_{DEF} （不含内部）和二次函数在 $x \geq 0$ 范围上的图像有且仅有一个公共点.

【小问 1 详解】

解：∵ 抛物线的对称轴为直线 $x = 1$ ，与 y 轴交点坐标为 $(0, 3)$ ，

$$\therefore -\frac{b}{2 \times (-1)} = 1, \quad c = 3,$$

解得： $b = 2, \quad c = 3$ ，

$$\therefore y = -x^2 + 2x + 3;$$

【小问 2 详解】

解：①当 $y = 0$ 时，

$$0 = -x^2 + 2x + 3, \quad \text{解得： } x_1 = 3, \quad x_2 = -1,$$

当点 A 在对称轴左边时，即 $-1 < m \leq 1$ 时，

$$\therefore a = -1 < 0,$$

∴ 此时最高点为对称轴所在点，最低点为 B 点，

∴ 最高与最低点的纵坐标差为 6，

$$\therefore -1^2 + 2 \times 1 + 3 - [-(4-m)^2 + 2(4-m) + 3] = 6,$$

$$\text{解得： } m_1 = 3 + \sqrt{6} \quad (\text{不符合题意舍去}), \quad m_2 = 3 - \sqrt{6};$$

当点 A 在对称轴右边时，即 $1 < m < 3$ ，

$$\therefore a = -1 < 0,$$

∴ 此时最高点为 A 点，最低点为 B 点，

∴ 最高与最低点的纵坐标差为 6，

$$\therefore -m^2 + 2 \times m + 3 - [-(4-m)^2 + 2(4-m) + 3] = 6,$$

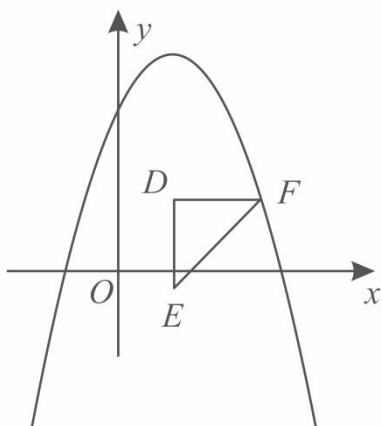
$$\text{解得： } m = \frac{1}{2} \quad (\text{不符合题意舍去});$$

综上所述： $m = 3 - \sqrt{6}$ ；

②当点 $D(1, n)$ 在点 $E(1, 1-n)$ 上方， $n > 1-n$ ，即： $n > \frac{1}{2}$ 时，

$$DF = n - (1-n) = 2n-1, \quad \text{点 } F(1+(2n-1), n), \quad \text{即 } F(2n, n),$$

当点 $F(2n, n)$ 在抛物线 $y = -x^2 + 2x + 3$ 上时， $\triangle DEF$ （不含内部）和二次函数在 $x \geq 0$ 范围上的图像有且仅有一个公共点，



$$\therefore n = -(2n)^2 + 2 \times (2n) + 3, \text{ 解得: } n = \frac{3 + \sqrt{57}}{8}, n = \frac{3 - \sqrt{57}}{8} \text{ (舍)},$$

当点 $D(1, n)$ 在点 $E(1, 1-n)$ 下方， $n < 1-n$ ，即： $n < \frac{1}{2}$ 时，

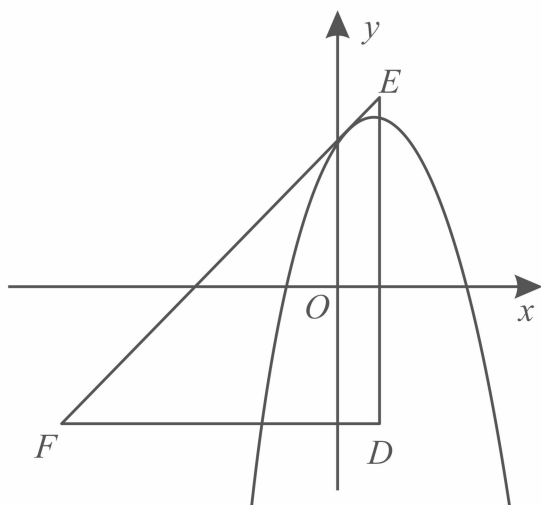
$$DF = (1-n) - n = 1-2n, \text{ 点 } F(1-(1-2n), n), \text{ 即 } F(2n, n),$$

$$\text{设 } EF \text{ 解析式为: } y = kx + m, \text{ 则: } \begin{cases} 1-n = k \cdot 1 + m \\ n = k \cdot 2n + m \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = 1 \\ m = -n \end{cases},$$

$\therefore EF$ 解析式为： $y = x - n$ ，与抛物线解析式联立：

$$\begin{cases} y = x - n \\ y = -x^2 + 2x + 3 \end{cases}, \text{ 整理得: } x^2 - x - 3 - n = 0,$$

当直线 EF 与抛物线只有一个交点时， $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-3-n) = 0$ ，解得： $n = -\frac{13}{4}$ ，



当 $n < -\frac{13}{4}$ 时, ζDEF (不含内部) 和二次函数在 $x \geq 0$ 范围上的图像有且仅有一个公共点,

$\therefore n$ 的取值范围是 $n = \frac{3+\sqrt{57}}{8}$ 或 $n < -\frac{13}{4}$,

故答案为: $n = \frac{3+\sqrt{57}}{8}$ 或 $n < -\frac{13}{4}$.

28. 如图 1, 四边形 $ABCD$ 中 $AD \parallel BC$, $\angle B = 90^\circ$, $\tan C = \frac{4}{3}$, $CD = 10$.

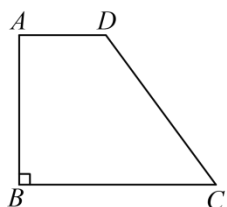


图1

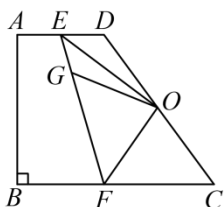


图2

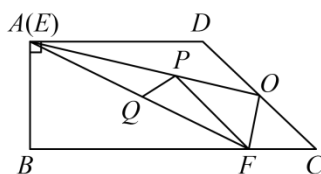


图3

(1) 线段 $AB =$ _____;

(2) 如图 2, 点 O 是 CD 的中点, E 、 F 分别是 AD 、 BC 上的点, 将 ζDEO 沿着 EO 翻折得 ζGEO , 将 ζCOF 沿着 FO 翻折使 CO 与 GO 重合.

①当点 E 从点 D 运动到点 A 时, 点 G 走过的路径长为 $\frac{5}{2}\pi$, 求 AD 的长;

②在①的条件下, 若 E 与 A 重合 (如图 3), Q 为 EF 中点, P 为 OE 上一动点, 将 ζFPQ 沿 PQ 翻折得到 $\zeta F'PQ$, 若 $\zeta F'PQ$ 与 ζAPF 的重合部分面积是 ζAPF 面积的 $\frac{1}{4}$, 求 AP 的长.

【答案】(1) 8 (2) ①25, ② $20\sqrt{2} - \frac{80\sqrt{3}}{7}$ 或 $\frac{100}{7}$

【解析】

【分析】(1) 作 $DG \perp BC$ 于 G , 解直角三角形 CDG 求得结果;

(2) ①作 $AH \perp CD$, 交 CD 的延长线于点 H , 可得出点 G 的轨迹是以 O 为圆心, 5 为半径的弧, 根据弧长公式求得 $\angle DOG = 90^\circ$, 进而得出 $\angle AOD = 45^\circ$, 解 ζAOD 求得结果; ②先解三角形 AOD 和 COF 求得 AO 和 OF , 进而根据勾股定理得出 AF 的值, 分两种情形: 当 QF' 交 AP 于 R 时, 取 OA 的中点 X , 连接 QX , 可得出点 R 是 AP 的中点, $\angle PQF = \angle PQF'$, 根据角平分线的性质得出 $\frac{QR}{AQ} = \frac{AP}{AR} = 2$, 从而求得 RQ 的值, 根据勾股定理得出 RX 的值, 进一步得出结果; 当 PF' 交 AQ 于 R 时, 同理可得: R 是 AQ 的中点, $\frac{PF}{PR} = \frac{FQ}{RQ} = 2$, 进而推出四边形 $APQF'$ 是平行四边形, 进一步得出结果.

求得 RQ 的值, 根据勾股定理得出 RX 的值, 进一步得出结果; 当 PF' 交 AQ 于 R 时, 同理可得: R 是 AQ 的中点, $\frac{PF}{PR} = \frac{FQ}{RQ} = 2$, 进而推出四边形 $APQF'$ 是平行四边形, 进一步得出结果.

求得 RQ 的值, 根据勾股定理得出 RX 的值, 进一步得出结果; 当 PF' 交 AQ 于 R 时, 同理可得: R 是 AQ 的中点, $\frac{PF}{PR} = \frac{FQ}{RQ} = 2$, 进而推出四边形 $APQF'$ 是平行四边形, 进一步得出结果.

【小问 1 详解】

解：如图 1，

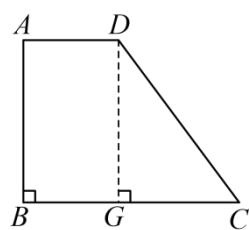


图1

作 $DG \perp BC$ 于 G ,

$$\therefore \angle DGB = 90^\circ,$$

$$\because AD \parallel BC, \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 180^\circ - \angle B = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABGD$ 是矩形,

$$\therefore AB = DG,$$

$$\because \tan C = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \sin C = \frac{4}{5},$$

$$\therefore AB = DG = CD \cdot \sin C = 10 \times \frac{4}{5} = 8,$$

故答案为：8；

【小问 2 详解】

解：①如图 2，

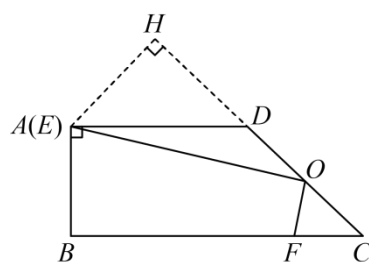


图2

作 $AH \perp CD$ ，交 CD 的延长线于点 H ，

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADH = \angle C,$$

$$\therefore \frac{AH}{DH} = \tan \angle ADH = \frac{4}{3},$$

设 $AH = 4a$ ， $DH = 3a$ ，则 $AD = 5a$ ，

$\because \triangle DEO$ 沿着 EO 翻折得 $\triangle GEO$ ，

$$\therefore OG = OD, \angle DOE = \angle GOE,$$

∴点 G 的轨迹是以 O 为圆心，5 为半径的弧，

$$\therefore \frac{n \cdot \pi \cdot 5}{180} = \frac{5\pi}{2},$$

$$\therefore n = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOE = 45^\circ,$$

$$\therefore \frac{AH}{OH} = \tan \angle AOD = 1,$$

$$\therefore OH = AH = 4a,$$

由 $OH - DH = OD$ 得，

$$4a - 3a = 5,$$

$$\therefore a = 5,$$

$$\therefore OH = 4a = 20, \quad AD = 5a = 25;$$

②∵将 $\triangle DEO$ 沿着 EO 翻折得 $\triangle GEO$ ，将 $\triangle COF$ 沿着 FO 翻折使 CO 与 GO 重合，

$$\therefore \angle DOE = \angle GOE, \quad \angle COF = \angle GOF,$$

$$\therefore \angle EOF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle COF = 45^\circ,$$

如图 3，

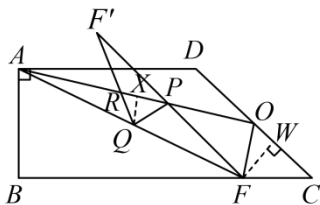


图3

作 $FW \perp CD$ 于 W ，设 QF' 交 AP 于 R ，

$$\therefore \tan C = \frac{FW}{CW} = \frac{4}{3},$$

$$\text{设 } FW = 4x, \quad CW = 3x,$$

$$\therefore \tan \angle COF = \frac{FW}{OW} = 1,$$

$$\therefore OW = FW = 4x,$$

由 $OW + CW = OC$ 得，

$$4x + 3x = 5,$$

$$\therefore x = \frac{5}{7},$$

$$\therefore FW = OW = 4x = \frac{20}{7},$$

$$\therefore OF = \sqrt{2}OW = \frac{20}{7}\sqrt{2},$$

$$\text{由①知: } AO = \sqrt{2}AH = 20\sqrt{2},$$

$$\therefore AF = \sqrt{OA^2 + OF^2} = \sqrt{(20\sqrt{2})^2 + \left(\frac{20\sqrt{2}}{7}\right)^2} = \frac{200}{7},$$

当 QF' 交 AP 于 R 时, 取 OA 的中点 X , 连接 QX ,

$\because Q$ 是 AF 的中点,

$$\therefore QX \parallel OF,$$

$$\therefore QX = \frac{1}{2}OF = \frac{10\sqrt{2}}{7}, \quad \angle AXQ = \angle AOF = 90^\circ, \quad S_{\triangle APQ} = S_{\triangle PQF} = \frac{1}{2}S_{\triangle APF},$$

$$\therefore S_{\triangle PQR} = \frac{1}{4}S_{\triangle APF},$$

$$\therefore S_{\triangle PQR} = \frac{1}{2}S_{\triangle APQ},$$

$\therefore$ 点 R 是 AP 的中点,

由折叠得: $\angle PQF = \angle PQF'$,

$$\therefore \frac{QR}{AQ} = \frac{AP}{AR} = 2,$$

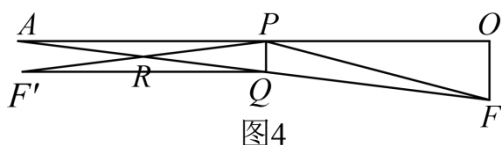
$$\therefore RQ = \frac{1}{2}AQ = \frac{50}{7},$$

$$\therefore RX = \sqrt{RQ^2 - OX^2} = \sqrt{\left(\frac{50}{7}\right)^2 - \left(\frac{10\sqrt{2}}{7}\right)^2} = \frac{10\sqrt{23}}{7},$$

$$\therefore AR = AX - RX = 10\sqrt{2} - \frac{10\sqrt{23}}{7},$$

$$\therefore AP = 2AR = 20\sqrt{2} - \frac{20\sqrt{23}}{7},$$

如图 4,



当 PF' 交 AQ 于 R 时,

同理可得： R 是 AQ 的中点， $\frac{PF}{PR} = \frac{FQ}{RQ} = 2$ ，

$$\therefore PF' = PF = 2PR,$$

$\therefore R$ 是 PF' 的中点，

$\therefore$ 四边形 $APQF'$ 是平行四边形，

$$\therefore AP = QF' = QF = \frac{1}{2}AF = \frac{100}{7},$$

综上所述： $AP = 20\sqrt{2} - \frac{80\sqrt{3}}{7}$ 或 $\frac{100}{7}$.

【点睛】 本题考查了解直角三角形，角平分线的性质，轴对称的性质，弧长公式等知识，解决问题的关键是分类讨论和较强计算能力.