锡北片2023春学期期中考试

初二数学学科

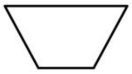
注意事项：

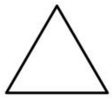
1.考试时间为100分钟，试卷满分120分.

2.所有答案必须填涂到答卷纸上相应位置，答案写在试卷其他部分无效.

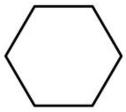
一、选择题（本大题共10小题，每小题3分，共30分.）

1. 在下列图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】D

【解析】

【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的定义判断即可.

【详解】解：A、是轴对称图形，不是中心对称图形，不符合题意；

B、是轴对称图形，但不是中心对称图形，不符合题意；

C、是轴对称图形，不是中心对称图形，不符合题意；

D、是轴对称图形，也是中心对称图形，符合题意.

故选D.

【点睛】本题考查了轴对称图形和中心对称图形的定义，属于基础题型，熟知轴对称图形和中心对称图形的定义是正确判断的关键.

2. 下列事件中，是随机事件的为（　　）

A. 一个三角形的内角和是$180°$

B. 负数大于正数

C. 掷一枚骰子朝上一面的点数为5

D. 明天太阳从西方升起

【答案】C

【解析】

【分析】根据事件的分类进行判断即可.

【详解】解：A．一个三角形的内角和是$180°$，是必然事件，故A不符合题意；

B．负数大于正数，是不可能事件，故 B 不符合题意；

C．掷一枚骰子朝上一面的点数为 5，是随机事件，故 C 符合题意；

D．明天太阳从西方升起，是不可能事件，故 D 不符合题意．

故选：C．

【点睛】本题主要考查了事件的分类，解题的关键是熟练掌握事件分为确定事件和随机事件，确定事件又分为必然事件和不可能事件．

3. 下列各式中，属于分式的是（　　）

A. $\frac{3}{\pi}+3$　　B. $\frac{x-3}{2}$　　C. $-\frac{y}{2}+5$　　D. $\frac{8}{a+2b}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据分式的定义逐项分析即可．

【详解】解：A．分母中不含有字母，不是分式，故本选项不符合题意；

B．分母中不含有字母，不是分式，故本选项不符合题意；

C．分母中不含有字母，不是分式，故本选项不符合题意；

D．分母中含有字母，是分式，故本选项符合题意；

故选：D．

【点睛】本题考查分式的定义，熟练掌握分式的定义是解答本题的关键．判断分式的依据是看分母中是否含有字母，如果含有字母则是分式，如果不含有字母则不是分式．注意π不是字母，是常数，所以分母中含π的代数式不是分式，是整式．

4. 若分式$\frac{2}{x-1}$在实数范围内有意义，则x的取值范围是（　　）

A. $x\neq1$　　B. $x\neq0$　　C. $x\neq-1$　　D. $x>1$

【答案】A

【解析】

【分析】分式有意义的条件是分母不等于零，据此可得x的取值范围．

【详解】解：当分母$x-1\neq0$，即$x\neq1$时，分式$\frac{2}{x-1}$在实数范围内有意义．

故选：A．

【点睛】本题考查分式有意义的条件，从以下三个方面透彻理解分式的概念：（1）分式无意义$\Leftrightarrow$分母为零；（2）分式有意义$\Leftrightarrow$分母不为零；（3）分式值为零$\Leftrightarrow$分子为零且分母不为零．

5. 分式$\frac{1}{3x^2y^2}$，$\frac{1}{4xy^2}$的最简公分母是(　　)

A. $12x^2y^2$　　B. $12x^3y^4$　　C. xy　　D. xy^2

【答案】A

【解析】

【分析】先确定系数的最小公倍数，再确定字母的最高次数，可得答案．

【详解】解：分式$\frac{1}{3x^2y^2}$，$\frac{1}{4xy^2}$的最简公分母是$12x^2y^2$．

故选：A．

【点睛】本题主要考查了分式的最简公分母的判断，掌握判断方法是解题的关键.即取各分母的最小公倍数，再确定字母因式的最高次幂的积，这样的公分母叫做最简公分母．

6. 在一个不透明的口袋中有红球、白球共 60 个，它们除颜色外，其余完全相同．通过大量的摸球试验后，发现摸到红球的频率稳定在20%附近，估算口袋中红球的个数是（　　）

A. 12　　B. 20　　C. 30　　D. 48

【答案】A

【解析】

【分析】根据频率、频数、总数的关系求解即可．

【详解】解：由题意得，$60\times20\%=12$个．

故选 A．

【点睛】本题考查了用频率估计概率，熟练掌握频率=频数÷总数是解答本题的关键．

7. 如果把分式$\frac{x}{x-y}$中的x，y都扩大 3 倍，那么分式的值（　　）

A. 不变　　B. 缩小 3 倍　　C. 缩小 6 倍　　D. 扩大 3 倍

【答案】A

【解析】

【分析】根据分式的分子分母都乘或除以同一个不为零的整式，分式的值不变．

【详解】解：把分式$\frac{x}{x-y}$中的x，y都扩大 3 倍，

则$\frac{3x}{3x-3y}=\frac{3x}{3(x-y)}=\frac{x}{x-y}$，

所以分式的值不变．

故选：A．

【点睛】本题考查了分式的性质，掌握分式的分子分母都乘或除以同一个不为零的整式，分式的值不变是关键．

8. 关于矩形的性质，下面说法错误的是（　　）

A. 矩形的四个角都是直角　　B. 矩形的两条对角线相等

C. 矩形的两条对角线互相垂直平分　　D. 矩形的两组对边分别平行

【答案】C

【解析】

【分析】根据矩形的性质对选项逐一进行判断即可．

【详解】解：A、矩形的四个角都是直角，说法正确，不符合题意；

B、矩形的两组对边分别相等，说法正确，不符合题意；

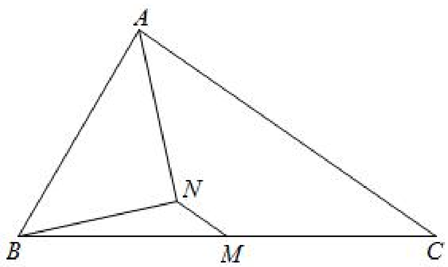
C、矩形的对角线互相平分且相等但不一定垂直，说法错误，符合题意；

D、矩形的两组对边分别平行，说法正确，不符合题意；

故选：C．

【点睛】本题考查了矩形的性质，矩形的性质：①平行四边形的性质矩形都具有；②角：矩形的四个角都是直角；③边：邻边垂直；④对角线：矩形的对角线相等；⑤矩形是轴对称图形，又是中心对称图形．它有2条对称轴，分别是每组对边中点连线所在的直线；对称中心是两条对角线的交点．

9. 如图，在$\triangle ABC$中，点M是BC边上的中点，AN平分$\angle BAC$，$BN\perp AN$于点N，若$AC=12$，$MN=2$，则AB的长为（　　）



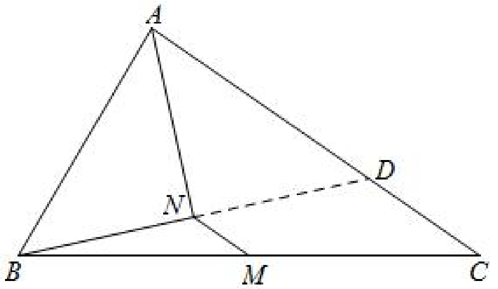
A. 4　　B. 6　　C. 7　　D. 8

【答案】D

【解析】

【分析】延长BN交AC于D，先证$\Delta ABN\cong\Delta ADN(ASA)$得出$BN=DN$，$AB=AD$，结合已知条件得到$MN$为$\Delta BCD$的中位线，根据中位线的性质得$MN=\dfrac{1}{2}CD$，即可求解．

【详解】延长BN交AC于D



$\because AN$ 平分 $\angle BAC$， $BN \perp AN$

$\therefore \angle BAN = \angle DAN, \angle ANB = \angle AND = 90°$

又$\because AN = AN$

$\therefore \Delta ABN \cong \Delta ADN(ASA)$

$\therefore BN = DN$ ， $AB = AD$

$\because$ 点 M 是 BC 边上的中点

$\therefore MN$ 为ΔBCD 的中位线

$\therefore MN = \dfrac{1}{2}CD$

$\because MN = 2$

$\therefore CD = 4$

$\because AC = 12$

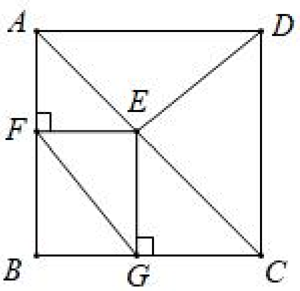
$\therefore AD = AC - CD = 12 - 4 = 8$

$\therefore AB = 8$

故选：D．

【点睛】本题考查的是三角形中位线定理、全等三角形的判定和性质，掌握三角形的中位线平行于第三边，且等于第三边的一半是解题的关键．

10. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，$AB = 6$，E 为对角线 AC 上与 A，C 不重合的一个动点，过点 E 作 $EF \perp AB$ 于点 F，$EG \perp BC$ 于点 G，连接 DE，FG，下列结论：① $DE = FG$；② DE ˆ FG；③ $\angle BFG = \angle ADE$；④ FG 的最小值为 4．其中正确结论的个数有（　）



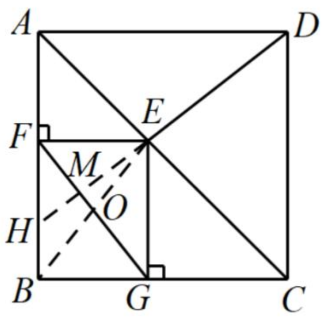
A. 1 个　　　　B. 2 个　　　　C. 3 个　　　　D. 4 个

【答案】C

【解析】

【分析】①连接 BE，易知四边形 $EFBG$ 为矩形，可得 $BE=FG$，证明$\triangle AEB\cong\triangle AED$ 可得 $DE=BE$，所以 $DE=FG$；②由 $OF=OB$ 可得$\angle OBF=\angle OFB$，由$\angle OBF=\angle ADE$ 可得$\angle OFB=\angle ADE$，由四边形 $ABCD$ 为正方形可得$\angle BAD=90°$，即$\angle AHD+\angle ADH=90°$，所以$\angle AHD+\angle OFH=90°$，即$\angle FMH=90°$，可得 $DE\perp FG$；③由②中的结论可得$\angle BFG=\angle ADE$；④由 $FG=BE=DE$，点 E 为 AC 上一动点，可知当 $DE\perp AC$ 时，DE 最小，即 FG 最小，求出最小值为$3\sqrt{2}$，可得 FG 的最小值为$3\sqrt{2}$.

【详解】解：①连接 BE，交 FG 于点 O，如图，



∵$EF\perp AB$，$EG\perp BC$，

∴$\angle EFB=\angle EGB=90°$，

∵$\angle ABC=90°$，

∴四边形 $EFBG$ 为矩形，

∴$FG=BE$，$OB=OF=OE=OG$，

∵四边形 $ABCD$ 为正方形，

∴$AB=AD$，$\angle BAC=\angle DAC=45°$，

在$\triangle ABE$ 和$\triangle ADE$ 中，$\begin{cases} AE=AE \\ \angle BAC=\angle DAC \\ AB=AD \end{cases}$，

∴$\triangle ABE\cong\triangle ADE$（SAS），

∴$BE=DE$，

∴$DE=FG$，①正确；

②延长 DE，交 FG 于 M，交 FB 于点 H，

∵$\triangle ABE\cong\triangle ADE$，

∴$\angle ABE=\angle ADE$，

∵$OB=OF$，

∴$\angle OFB=\angle ABE$，

∴$\angle OFB=\angle ADE$，

∵$\angle BAD=90°$，

∴$\angle ADE+\angle AHD=90°$，

∴$\angle OFB+\angle AHD=90°$，

∴$\angle FMH=90°$，

∴$DE\perp FG$，②正确；

③由②知：$\angle OFB=\angle ADE$，

即$\angle BFG=\angle ADE$，③正确；

④∵$FG=BE=DE$，点 E 为 AC 上一动点，

∴根据垂线段最短，当 $DE\perp AC$ 时，DE 最小，即 FG 最小，

∵$AD=CD=6$，$\angle ADC=90°$，

∴ $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=6\sqrt{2}$，

∴$DE=\frac{1}{2}AC=3\sqrt{2}$．

∴FG 的最小值为$3\sqrt{2}$，④错误，

综上，正确的结论为：①②③．

故选：C．

【点睛】本题考查了正方形的性质，垂线段最短，全等三角形的判定与性质，矩形的判定与性质，等边对等角，勾股定理等知识，根据图形特点通过添加辅助线构造全等三角形是解题的关键，也是解决此类问题常用的方法．

二、选择题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分．）

11. 为调查神舟十四号飞船各设备的运行情况，应采用______的方式．（填“普查”或“抽样调查”）

【答案】普查

【解析】

【分析】根据全面调查的定义：在一个调查中对全体对象都进行了调查，像这样考察全体对象的调查叫做全面调查；抽样调查调查是这样一种方法，它只抽取一部分对象进行调查，然后根据调查数据推断全体对象的情况．据此判断即可．

【详解】解：为调查神舟十四号飞船各设备的运行情况，应采用普查的方式．

故答案为：普查．

【点睛】本题考查了抽查和普查的适用范围，熟练掌握普查和抽查的定义以及适用范围是解本题的关键．

12. 若分式$\dfrac{x-2}{x+1}$的值为0，则x的值是______.

【答案】2

【解析】

【分析】根据分式值为零的条件：分子为零，分母不为零即可求解.

【详解】依题意可得x-2=0，x+1≠0

∴x=2

故答案为：2.

【点睛】此题主要考查分式值为零的条件，解题的关键是熟知分式的值为零的条件.

13. 计算：$\dfrac{3a}{a+2}-\dfrac{a}{a+2}=$____________.

【答案】$\dfrac{2a}{a+2}$

【解析】

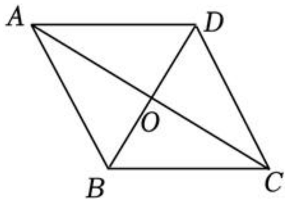
【分析】分式分母相同，直接加减，最后约分.

【详解】解：$\dfrac{3a}{a+2}-\dfrac{a}{a+2}=\dfrac{3a-a}{a+2}=\dfrac{2a}{a+2}$

故答案为：$\dfrac{2a}{a+2}$.

【点睛】本题考查了分式的加减，掌握同分母分式的加减法法则是解决本题的关键.

14. 如图，在菱形$ABCD$中，对角线AC与BD相交于点O，$AC=7$，$BD=4$，则菱形$ABCD$的面积为 _______.



【答案】14

【解析】

【分析】直接根据菱形的面积等于对角线乘积的一半即可得到答案.

【详解】解：∵在菱形$ABCD$中，对角线AC与BD相交于点O，$AC=7$，$BD=4$，

∴ $S_{菱形ABCD}=\dfrac{1}{2}\times AC\cdot BD=\dfrac{1}{2}\times 7\times 4=14$，

故答案为：14.

【点睛】本题主要考查了菱形的面积的计算，熟练掌握菱形的面积等于对角线乘积的一半是解题的关键.

15. 若 $xy=2$， $x-y=1$，则 $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=$________.

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】将原式化简，代入式子值即可得到答案；

【详解】解：由题意可得，

原式 $=\frac{x-y}{xy}$，

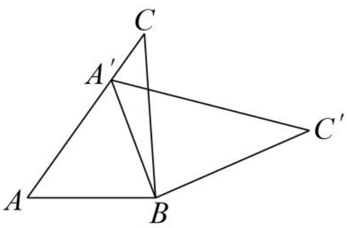
$\because xy=2$， $x-y=1$，

$\therefore$ 原式 $=\frac{x-y}{xy}=\frac{1}{2}$，

故答案为：$\frac{1}{2}$；

【点睛】本题主要考查分式通分，解题的关键是化简原式整体代入.

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A=56°$，将 $\triangle ABC$ 绕点 B 旋转得到 $\triangle A'BC'$，且点 A' 落在 AC 边上，则 $\angle CA'C'=$______°.



【答案】68

【解析】

【分析】根据旋转的性质得到 $AB=A'B$， $\angle A=\angle BA'C'=56°$，根据等边对等角得到 $\angle BA'A=56°$，利用三角形内角和求出 $\angle ABA'=68°$，再利用三角形外角的性质可得结果.

【详解】解：由旋转可知： $AB=A'B$， $\angle A=\angle BA'C'=56°$，

$\therefore \angle A=\angle BA'A=56°$，

$\therefore \angle ABA'=180°-2\times\angle A=68°$，

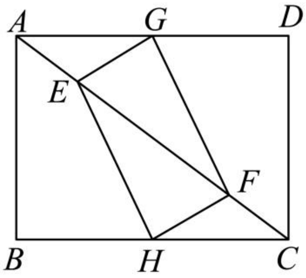
$\therefore \angle CA'C'=\angle CA'B-\angle BA'C'=\angle A+\angle ABA'-\angle BA'C'=68°$，

故答案为：68.

【点睛】本题考查了旋转的性质，等腰三角形的性质，熟练掌握旋转的性质是解题的关键.

17. 在矩形 $ABCD$ 中， $AB=6$，$BC=8$， E、F 是对角线 AC 上的两个动点，分别从 A、C 同时出发相向

而行，速度均为每秒 1 个单位长度，运动时间为 t 秒，其中 $0 \le t \le 10$，G，H 分别是 AD，BC 中点，当四边形 $EGFH$ 为矩形时，t 的值为_______.

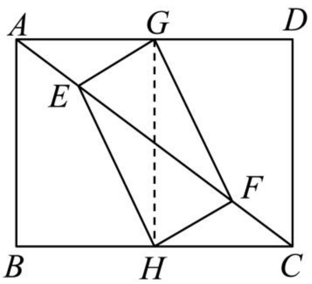


【答案】2 或 8

【解析】

【分析】分两种情况，一种是四边形 $EGFH$ 为矩形，另一种是 $FGEH$ 为矩形，利用 $EF = GH$ 即可求解.

【详解】解：连接 HG，



，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，$AB = 6, BC = 8$，

$\therefore AD = BC, AD // BC$，$\angle B = 90^\circ$，$AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$，

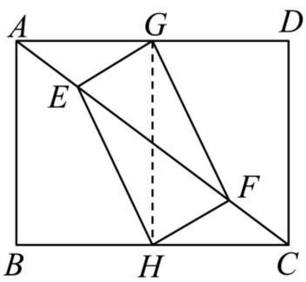
$\because G, H$ 分别是 AD, BC 中点，

$\therefore AG = BH$，$AG // BH$，

$\therefore$ 四边形 $ABHG$ 是矩形，

$\therefore AB = GH = 6$，

如图，当四边形 $EGFH$ 是矩形时，



，

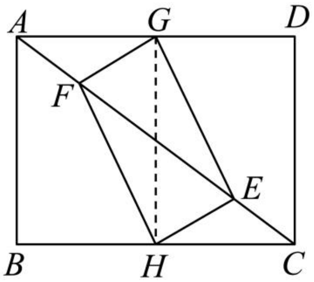
$\therefore EF = GH = 6$，

$\because AE = CF = t$，

$\therefore EF = 10 - 2t = 6$，

$\therefore t=2$；

如图，当四边形 $FGEH$ 是矩形时，



，

$\because EF=GH=6$， $AE=CF=t$，

$\therefore EF=t+t-10=2t-10=6$，

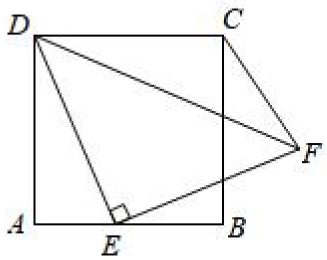
$\therefore t=8$；

综上所述，四边形 $EGFH$ 为矩形时， $t=2$ 或 $t=8$．

故答案为：2 或 8

【点睛】本题主要考查了矩形的判定与性质，熟练掌握矩形的判定与性质，添加恰当的辅助线是解题的关键．

18. 如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 4，点 E 是 AB 边上一动点，连接 ED，将 ED 绕点 E 顺时针旋转 90° 到 EF，连接 DF，CF，则 $DF+CF$ 的最小值是_____．

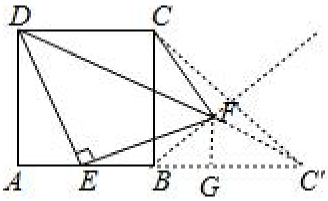


【答案】$4\sqrt{5}$

【解析】

【分析】连接 BF，过点 F 作 $FG\perp AB$ 交 AB 延长线于点 G，通过证明 $\Delta AED\cong\Delta GFE$，确定 F 点在 BF 的射线上运动；作点 C 关于 BF 的对称点 C'，由三角形全等得到 $\angle CBF=45°$，从而确定 C' 点在 AB 的延长线上；当 D、F、C' 三点共线时，$DF+CF=DC'$ 最小，在 $\mathrm{Rt}\Delta ADC'$ 中，$AD=4$，$AC'=8$，求出 $DC'=4\sqrt{5}$ 即可．

【详解】解：连接 BF，过点 F 作 $FG\perp AB$ 交 AB 延长线于点 G，



$\because EF\perp DE$，

$\therefore \angle AED+\angle FEG=90^\circ$ ，

$\because \angle AED+\angle EDA=90^\circ$ ，

$\therefore \angle EDA=\angle FEG$，

在$\triangle AED$和$\triangle GFE$中，

$$\begin{cases}\angle A=\angle FGE\\ \angle EDA=\angle FEG\\ DE=EF\end{cases}$$

$\therefore \Delta AED\cong\Delta GFE$，

$\therefore FG=AE$，

$\therefore F$点在射线BF上运动，

作点C关于BF的对称点C'，

$\because EG=DA$， $FG=AE$，

$\therefore AE=BG$，

$\therefore BG=FG$，

$\therefore \angle FBG=45^\circ$，

$\therefore \angle CBF=45^\circ$，

$\therefore C'$点在AB的延长线上，

当D、F、C'三点共线时，$DF+CF=DC'$最小，

在$\mathrm{Rt}\Delta ADC'$中，$AD=4$，$AC'=AB+BC'=AB+BC=8$，

$\therefore DC'=4\sqrt{5}$，

$\therefore DF+CF$的最小值为$4\sqrt{5}$.

故答案为：$4\sqrt{5}$.

【点睛】本题考查了旋转的性质，正方形的性质，全等三角形的判定与性质，轴对称求最短路径．能够将线段的和通过轴对称转化为共线线段是解题的关键．

三、解答题（本大题共9题，共66分．解答需要写出必要的文字说明或演算步骤）

19. 约分：

（1）$\dfrac{24ab^3}{4ab^2}$

（2）$\dfrac{(a-2b)^2}{a^2-4b^2}$

【答案】（1）$6b$

（2）$\dfrac{a-2b}{a+2b}$

【解析】

【分析】（1）找出分子分母的公因式，并给分子、分母同时除以公因式即可得出约分结果；

（2）先对分母、分子因式分解，再找出公因式即可．

【小问1详解】

解：$\dfrac{24ab^3}{4ab^2}=6b$；

【小问2详解】

解：$\dfrac{(a-2b)^2}{a^2-4b^2}=\dfrac{(a-2b)^2}{(a+2b)(a-2b)}=\dfrac{a-2b}{a+2b}$．

【点睛】本题主要考查约分，解题的关键是找出分子分母的公因式．

20. 计算：

（1）$\dfrac{3}{x}-\dfrac{5}{x^2}$

（2）$\dfrac{b}{a+b}+\dfrac{ab}{b^2-a^2}$

【答案】（1）$\dfrac{3x-5}{x^2}$

（2）$\dfrac{b^2}{(b+a)(b-a)}$

【解析】

【分析】（1）先通分，再算减法即可得到答案；

（2）先通分，再算加法即可得到答案．

【小问1详解】

解：$\dfrac{3}{x}-\dfrac{5}{x^2}$

$=\dfrac{3x}{x^2}-\dfrac{5}{x^2}$

$=\dfrac{3x-5}{x^2}$；

【小问2详解】

解：$\dfrac{b}{a+b}+\dfrac{ab}{b^2-a^2}$

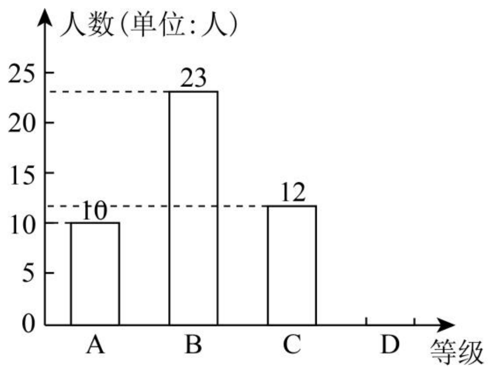
$=\dfrac{b(b-a)}{(b+a)(b-a)}+\dfrac{ab}{(b+a)(b-a)}$

$=\dfrac{b^2-ab+ab}{(b+a)(b-a)}$

$=\dfrac{b^2}{(b+a)(b-a)}$.

【点睛】本题主要考查了分式的加减法，将异分母化为同分母是解题的关键.

21. 某中学对全校八年级学生进行体育测试，为了解测试结果，随机抽取部分学生的成绩进行分析，设测试成绩为x分，将成绩分为A，B，C，D四个等级，A级：$85\le x\le 100$；B级：$75\le x\le 85$；C级：$60\le x\le 75$；D级：$x<60$，根据统计结果绘制了如下两幅不完整的统计图，



请根据统计图，解答下列问题：

（1）这次调查中共抽查的学生人数为______；

（2）请补全条形统计图；

（3）“D级”部分的扇形圆心角度数为______；

（4）若该校七年级学生有300人，请你估计此次测试中，达到“A级”的学生约有多少人？

【答案】（1）50　　（2）见解析

（3）$36°$

（4）60

【解析】

【分析】（1）利用“C级”学生人数除以所占百分比求出总人数即可；

（2）先求出“D级”学生人数，补全条形图即可；

（3）用$360°\times$“D级”学生人数所占的比例，进行求解即可；

（4）利用总体乘以样本中达到“A级”的学生所占的比例，进行求解即可.

【小问 1 详解】

解：$12 \div 24\% = 50$（人）；

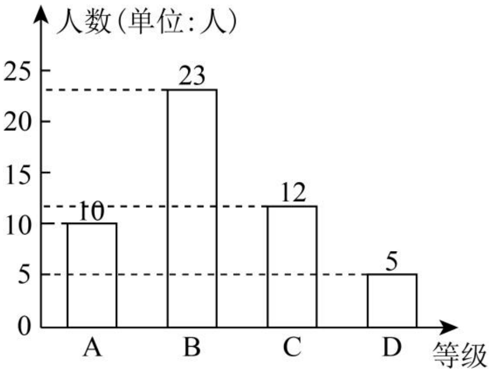
∴在这次调查中共抽查的学生人数为50，

故答案为：50；

【小问 2 详解】

解：“D级”学生人数为：$50-10-23-12=5$（人）；

补全条形图如下：



【小问 3 详解】

$360° \times \frac{5}{50} = 36°$；

∴“D级”部分的扇形圆心角度数为$36°$，

故答案为：36°；

【小问 4 详解】

$300 \times \frac{10}{50} \times 100\% = 60$（人）；

答：估计此次测试中，达到“A 级”的学生约有 60 多少人．

【点睛】本题考查扇形统计图和条形统计图的综合应用．从统计图中有效的获取信息，利用频数除以百分比，求出总数，是解题的关键．

22. $\triangle ABC$ 在坐标系中的位置如图 1 所示，其中每个小正方形的边长为 1 个单位长度．

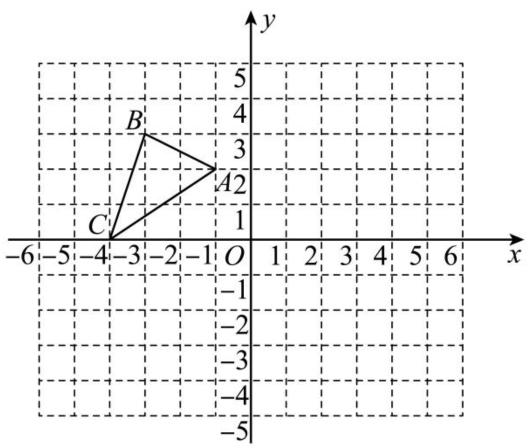


图1

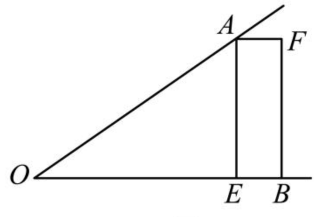


图2

（1）按要求作图：①画出$\triangle ABC$关于原点O的中心对称图形$\triangle A_1B_1C_1$；

②画出将$\triangle ABC$绕点A逆时针旋转90°得到$\triangle AB_2C_2$；

（2）如图2，已知$\angle AOB$，$OA=OB$，点E在OB边上，四边形$AEBF$是矩形．请你只用无刻度的直尺在图中画出$\angle AOB$的平分线（请保留画图痕迹）．

【答案】（1）①作图见解析，②作图见解析

（2）作图见解析

【解析】

【分析】（1）①如图1，根据中心对称图形的性质可知A_1、B_1、C_1的点坐标，在坐标系中描点，然后依次连接即可；

②如图1，根据旋转的性质，A为旋转中心，作图即可；

（2）如图2，根据矩形的性质，连接对角线，根据等腰三角形三线合一的性质，连接O与矩形对角线的交点即可．

【小问1详解】

解：①如图1中，$\triangle A_1B_1C_1$即为所求作．

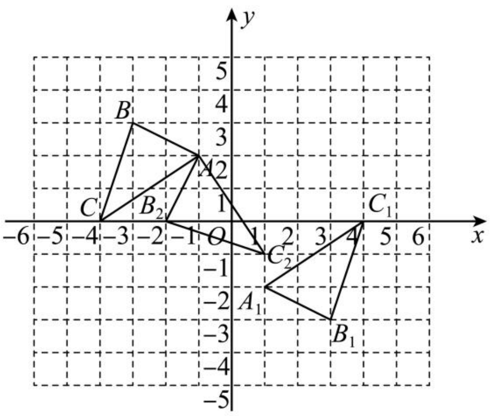


图1

②如图1中，$\triangle AB_2C_2$即为所求作．

【小问2详解】

解：如图2，射线OK即为所求作．

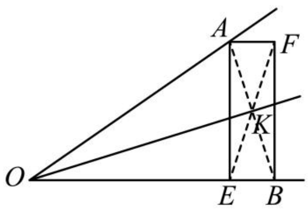
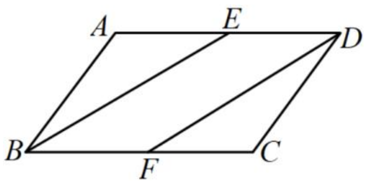


图2

【点睛】本题考查了中心对称图形的性质与作图，旋转的性质，矩形的性质，等腰三角形的性质等知识．解题的关键在于对知识的熟练掌握．

23. 如图，在▱$ABCD$中，点E、F分别是AD、BC边的中点，求证：$BE // DF$.



【答案】见解析

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质可得$AD // BC$，$AD = BC$，在根据中点的定义，得出$DE = BF$，即可证明四边形$BFDE$是平行四边形，即可求证.

【详解】证明：∵四边形$ABCD$是平行四边形，

∴$AD // BC$，$AD = BC$，

∵点E、F分别是▱$ABCD$边AD、BC的中点，

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AD, BF = \frac{1}{2}BC$$

∴$DE = BF$，

∴四边形$BFDE$是平行四边形，

∴$BE // DF$.

【点睛】本题主要考查了平行四边形的性质和判定，中点的定义，解题的关键是熟练掌握一组对边平行且相等的四边形是平行四边形，平行四边形对边平行且相等.

24. 已知$A = \frac{x+4}{x+2} - \frac{x+2}{x}$，$B = 2x^2 + 4x + 2$.

（1）化简A；

（2）求出当$B = 0$时A的值.

【答案】（1）$-\frac{4}{x^2+2x}$

（2）4

【解析】

【分析】（1）根据分式的混合运算顺序和运算法则可化简A；

（2）根据因式分解将B变形，得出x的值，代入化简后的A的代数式计算可得.

【小问1详解】

解：$A = \frac{x+4}{x+2} - \frac{x+2}{x}$

$=\dfrac{x^2+4x-x^2-4-4x}{x(x+2)}$

$=-\dfrac{4}{x^2+2x}$；

【小问 2 详解】

$B=2x^2+4x+2=2(x^2+2x+1)=2(x+1)^2$，

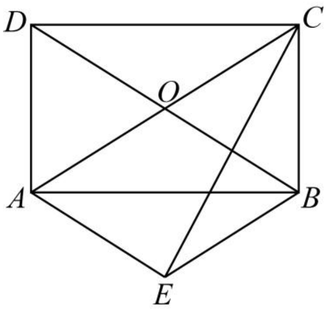
当$B=0$时，$(x+1)^2=0$，

$\therefore x=-1$，

则$A=-\dfrac{4}{x^2+2x}=-\dfrac{4}{(-1)^2+2\times(-1)}=4$.

【点睛】本题主要考查分式的化简求值，解题的关键是熟练掌握分式的混合运算顺序和运算法则及因式分解的能力.

25. 如图，已知$\triangle OAB$中，$OA=OB$，分别延长AO、BO到点C、D．使得$OC=AO$，$OD=BO$，连接AD、DC、CB.



（1）求证：四边形$ABCD$是矩形；

（2）以OA、OB为一组邻边作$\square AOBE$，连接CE，若$CE\perp BD$，求$\angle AOB$的度数.

【答案】（1）见解析　（2）$120°$

【解析】

【分析】（1）由$OC=AO$，$OD=BO$，得四边形$ABCD$是平行四边形，结合$AO=BO$，可证$AC=BD$，根据矩形的判定定理，可证得结论；

（2）连接OE，设EC与BD交于F，由四边形$AEBO$是平行四边形可得$AE\parallel BO$，结合$EC\perp BD$可得，$\angle AEC=\angle CFD=90°$，在$Rt\triangle AEC$中，根据直接三角形斜边的中线的性质，可得$EO=AO$，结合$OA=OB$，得$AE=OA=OE$，$\angle OAE=60°$，从而即可求得答案.

【小问 1 详解】

证明：$\because OC=AO$，$OD=BO$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AO=\frac{1}{2}AC$，$BO=\frac{1}{2}BD$，

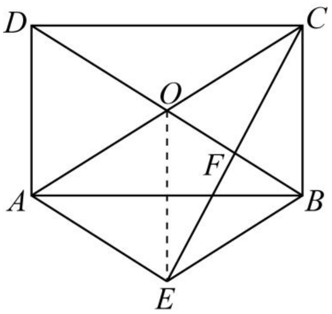
$\because AO=BO$，

$\therefore AC=BD$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形；

【小问 2 详解】

解：连接 OE，设 EC 与 BD 交于 F，



$\because EC\perp BD$，

$\therefore \angle CFD=90^{\circ}$，

$\because$ 四边形 $AEBO$ 是平行四边形，

$\therefore AE/\!/BO$，

$\therefore \angle AEC=\angle CFD=90^{\circ}$，

即 $\triangle AEC$ 是直角三角形，

$\because EO$ 是 $Rt\triangle AEC$ 中 AC 边上的中线，

$\therefore EO=AO$，

$\because$ 四边形 $AEBO$ 是平行四边形，

$\therefore OB=AE$，

$\because OA=OB$，

$\therefore AE=OA=OE$，

$\therefore \triangle AEO$ 是等边三角形，

$\therefore \angle OAE=60^{\circ}$，

$\because \angle OAE+\angle AOB=180^{\circ}$，

$\therefore \angle AOB=120^{\circ}$.

【点睛】本题主要考查了矩形的性质、直角三角形斜边中线的性质，熟练掌握矩形的性质、直角三角形斜边中线的性质是解题的关键.

26. 在长方形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90^\circ$ ，$AB=CD=5$，$BC=AD=4$.

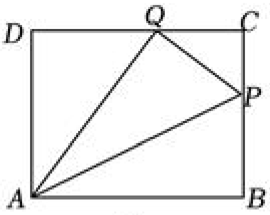


图 1

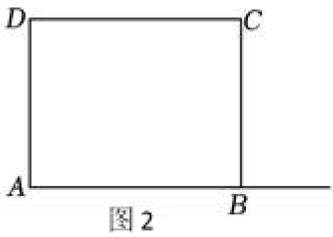


图 2

（1）如图 1，P 为 BC 边上一点，将 $\vartriangle ABP$ 沿直线 AP 翻折至 $\triangle APQ$ 的位置，其中点 Q 是点 B 的对称点，

当点 Q 落在 CD 边上时，请你直接写出 DQ 的长为______.

（2）如图 2，点 M 是射线 AB 上的一个动点，将 $\triangle ADM$ 沿 DM 翻折，其中点 A 的对称点为 A'，当 A'，

M ，C 三点在同一直线上时，请直接写出 AM 的长.

【答案】（1）3　　（2）2 或 8

【解析】

【分析】（1）利用翻折变换的性质以及勾股定理求解即可；

（2）分“当点 M 在线段 AB 上时”和“当点 M 在 AB 的延长线上时”两种情况讨论，利用勾股定理求解即可.

【小问 1 详解】

解：$\because$ $\vartriangle ABP$ 沿直线 AP 翻折至 $\triangle APQ$，

$\therefore AQ=AB=5$，

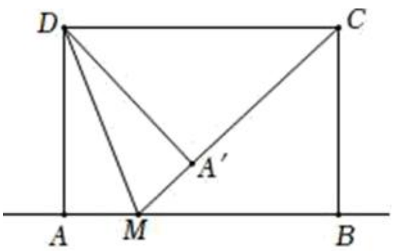
在 Rt$\triangle ADQ$ 中，Ð$D=90^\circ$ ，$AD=4$，

由勾股定理得：$DQ=\sqrt{AQ^2-AD^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

故答案为：3；

【小问 2 详解】

解：如图，当点 M 在线段 AB 上时，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AB // CD$，

$\therefore \angle CDM = \angle AMD$，

$\because \angle AMD = \angle A'MD$，

$\therefore \angle CDM = \angle CMD$，

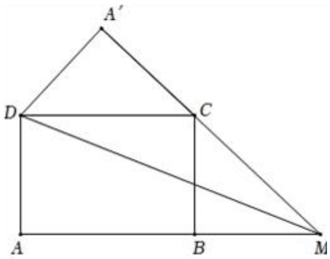
$\therefore CD = CM = 5$，

$\because \angle CBM = 90^\circ$，

$\therefore BM = \sqrt{CM^2 - BC^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$，

$\therefore AM = AB - BM = 5 - 3 = 2$；

如图，当点 M 在 AB 的延长线上时，同法可证 $CD = CM = 5$，



$\because \angle CBM = 90^\circ$，$CB = 4$，

$\therefore BM = \sqrt{CM^2 - CB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$，

$\therefore AM = AB + BM = 5 + 3 = 8$.

综上所述，满足条件的 AM 的长为 2 或 8.

【点睛】本题考查了矩形的性质，翻折变换的性质，勾股定理，等腰三角形的判定和性质，熟练掌握知识点，运用分类讨论的思想解决问题是解题的关键.

27. 知识再现：已知，如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，点 M、N 分别在边 BC、CD 上，连接 AM、AN、MN，$\angle MAN$＝45°，延长 CB 至 G 使 BG＝DN，连接 AG，根据三角形全等的知识，我们可以证明 MN＝BM+DN.

知识探究：（1）在如图中，作 $AH \perp MN$，垂足为点 H，猜想 AH 与 AB 有什么数量关系？并证明；

知识应用：（2）如图，已知 $\angle BAC$＝45°，$AD \perp BC$ 于点 D，且 BD＝2，AD＝6，则 CD 的长为_____；

知识拓展：（3）如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，E 是边 BC 的中点，F 为边 CD 上一点，$\angle FEC$＝2$\angle BAE$，AB=24，求 DF 的长.

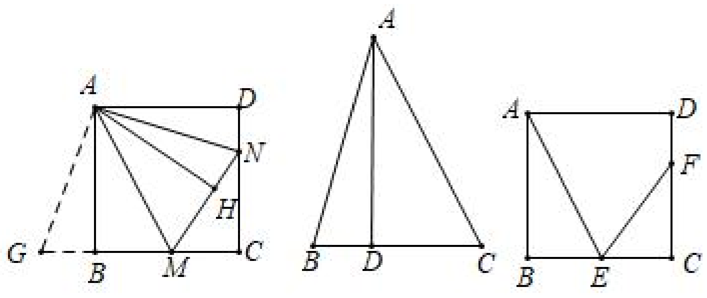


图1　　　图2　　　图3

【答案】（1）$AB=AH$， 证明见解析；（2）3；（3）8．

【解析】

【分析】（1）先证△ABG≌△ADN，再证△GAM≌△NAM，根据 GM 和 NM 是对应边，得到 $AB=AH$（全等三角形对应边上的高相等）；

（2）作△ABD 关于直线 AB 的对称△ABE，作△ACD 关于直线 AC 的对称△ACF，延长 EB、FC 交于点 G，则四边形 $AEGF$ 是矩形，又 $AE=AD=AF$，所以四边形 $AEGF$ 是正方形，设设 $CD=x$，则 $BG=6-2=4$；$CG=6-x$；$BC=2+x$，在 Rt△BGC 中，$4^2+(6-x)^2=(x+2)^2$，得 $x=3$，所以 CD 的长为 3．

（3）过点 A 作 $AM\perp EF$ 交 EF 于点 M,证明△ABE≌△AME，得到 $BE=ME=12$, $AB=AM=AD$, 再证明 $\mathrm{Rt}\triangle ADF\cong\mathrm{Rt}\triangle AMF$,设 $DF=x$，得到 $EF=12+x$；$FC=24-x$；$EC=12$，在 Rt△EFC 中,$12^2+(24-x)^2=(x+12)^2$，解方程即可.

【详解】（1）$AB=AH$，

证明：如图 1

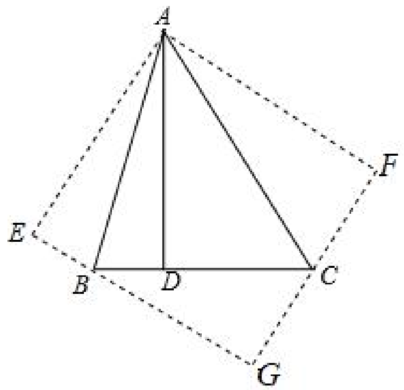


图 1

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $\angle ABC=\angle D=90^\circ$，

∴ $\angle ABG=180^\circ-\angle ABC=90^\circ$，

又∵$AB=AD$，

∵在△ABG和△ADN中，

$$\begin{cases}AB=AD\\ \angle ABG=\angle ADN\\ BG=DN,\end{cases}$$

∴△ABG≌△ADN(SAS)，

∴ $\angle BAG=\angle DAN$，$AG=AN$，

∵ $\angle BAD=90^\circ$， $\angle MAN=45^\circ$，

∴ $\angle DAN+\angle BAM=90^\circ-\angle MAN=45^\circ$，

∴ $\angle BAG+\angle BAM=45^\circ$，

即 $\angle GAM=45^\circ$，

∵在△GAM和△NAM中，

$$\begin{cases}AG=AN\\ \angle GAM=\angle NAM\\ AM=AM,\end{cases}$$

∴△GAM≌△NAM(SAS)，

又∵GM 和 NM 是对应边，

∴AB=AH(全等三角形对应边上的高相等)；

（2）作△ABD 关于直线 AB 的对称△ABE，作△ACD 关于直线 AC 的对称△ACF，

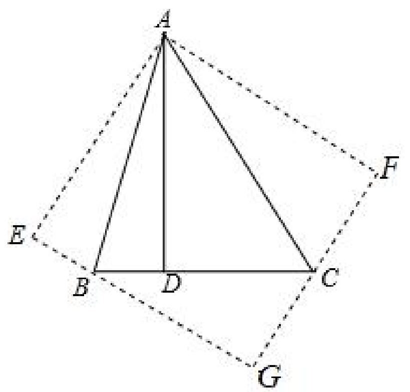


图 2

∵AD 是△ABC 的高，

∴ $\angle ADB=\angle ADC=90^\circ$，

∴ $\angle E=\angle F=90^\circ$，

又∵ $\angle BAC=45^\circ$，

∴ $\angle EAF=90^\circ$，

延长 EB、FC 交于点 G，则四边形 $AEGF$ 是矩形，

又∵$AE=AD=AF$

∴四边形 $AEGF$ 是正方形，

由（1）、（2）知：$EB=DB=2$，$AE=AF=AD=EG=6$，

设 $CD=x$，

∴$BG=6-2=4$；$CG=6-x$；$BC=2+x$，

在 $Rt\triangle BGC$ 中,$4^2+\left(6-x\right)^2=(x+2)^2$,

解得 $x=3$,

故 CD 的长为 3.

（3）如图 3，过点 A 作 $AM\perp EF$ 交 EF 于点 M,

$\angle AEB=90°-\angle 1, \angle FEC=2\angle 1, \angle AEM=180°-\angle AEB-\angle FEC=90°-\angle 1$,

$\therefore \angle AEB=\angle AEM$,

在$\triangle ABE$ 和$\triangle AME$ 中，

$$\begin{cases}\angle ABE=\angle AME=90° \\ \angle AEB=\angle AEF \\ AE=AE,\end{cases}$$

∴$\triangle ABE\cong\triangle AME$(AAS)，

$\therefore BE=ME=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}AB=12,\quad AB=AM=AD$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle ADF$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle AMF$ 中，

$$\begin{cases}AD=AM \\ AF=AF,\end{cases}$$

$\mathrm{Rt}\triangle ADF\cong\mathrm{Rt}\triangle AMF$，

$\therefore MF=DF$,

设 $DF=x$，

∴$EF=12+x$，$FC=24-x$，$EC=12$，

在 $Rt\triangle EFC$ 中,$12^2+\left(24-x\right)^2=(x+12)^2$，

解得 $x=8$，

故 DF 的长为 8.

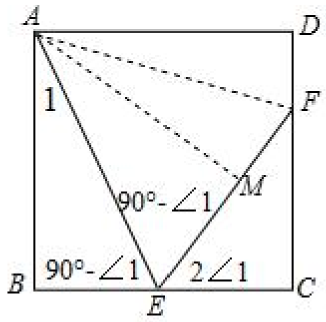


图3

【点睛】考查正方形的判定与性质，全等三角形的判定与性质，勾股定理，翻折变换（折叠问题），作出辅助线是解题的关键.