2023-2024 学年初三数学中考模拟试题

一、选择题（本大题共 10 小题，每题 3 分，共计 30 分）

1. 2 的相反数是（　　）

A. 2　　B. -2　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

【答案】B

【解析】

【详解】2 的相反数是-2.

故选：B.

2. 下列计算正确的是　　　　（　　）

A. $a^2+a^2=a^4$　　B. $(a^2)^3=a^5$　　C. $a+2=2a$　　D. $(ab)^3=a^3b^3$

【答案】D

【解析】

【详解】试题解析：A. $a^2+a^2=2a^2$，故该选项错误；

B．$(a^2)^3=a^6$，故该选项错误；

C. a 与 2 不能合并，故该选项错误；

D. $(ab)^3=a^3b^3$，故该选项正确.

故选 D.

【点睛】本题考查了同底数幂的乘法与除法，幂的乘方，积的乘方以及简单的混合运算．理清指数的变化是解题的关键

3. 函数 $y=\frac{\sqrt{x-2}}{2}$ 中 x 的取值范围是（　　）

A. $x\leqslant 2$　　B. $x\geqslant 2$　　C. $x<2$　　D. $x>2$

【答案】B

【解析】

【分析】利用二次根式有意义的条件，列不等式计算即可．

【详解】由二次根式有意义的条件知：$x-2\geq 0$，

解得 $x\geq 2$，

故 x 的取值范围为 $x\geq 2$，

故答案为：B．

【点睛】本题考查函数自变量的取值范围和二次根式有意义的条件，二次根式有意义的条件为根号下式子大于等于 0.

4. 如果圆锥的母线长为 5，底面半径为 2，那么这个圆锥的侧面积为（　）

A. 10　　B. 10π　　C. 20　　D. 20π

【答案】B

【解析】

【分析】圆锥的侧面积=底面周长×母线长÷2，据此求解即可.

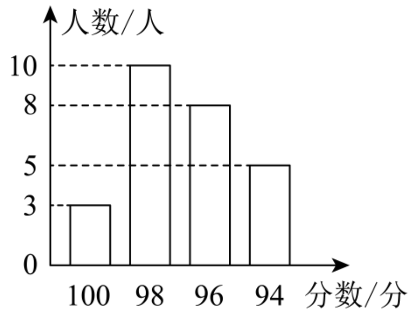
【详解】解：底面圆的半径为 2，则底面周长=4π，

圆锥的侧面积=$\frac{1}{2}$×4π×5=10π.

故选：B.

【点睛】本题考查了圆锥的计算，利用了圆的周长公式和扇形面积公式求解.

5. 为了增强学生预防新冠肺炎的安全意识，某校开展疫情防控知识竞赛．来自不同年级的 26 名参赛同学的得分情况如图所示，这些成绩的众数和中位数分别是（　　　）



A. 98，98　　B. 98，97　　C. 96，98　　D. 96，96

【答案】B

【解析】

【分析】根据众数及中位数的求法可进行求解.

【详解】解：由统计图可知：成绩为 98 分有 10 人，人数最多，所以该组数据的众数是 98；一共有 26 名参赛同学，所以中位数为第 13 和 14 名的平均值，即 $\frac{98+96}{2}=97$；

故选：B.

【点睛】本题主要考查中位数及众数，熟练掌握中位数及众数的求法是解题的关键.

6. 已知有理数 x，y 满足方程组 $\begin{cases}3x-y=3\\2y-x=-4\end{cases}$，则 $2x+y$ 的值为（　　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

【答案】A

【解析】

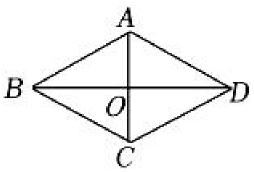
【分析】根据方程组中两个方程的特点，由①+②即可求出$2x+y$的值；

【详解】解：上述两个二元一次方程相加，可得，$2x+y=-1$．

故选：A．

【点睛】本题考查了二元一次方程组的应用，掌握二元一次方程组的解法，把方程组中的方程灵活变形运用“整体思想”是解决问题的关键．

7. 如图，$\Psi ABCD$的对角线AC与BD相交于点O，添加下列条件不能证明$\Psi ABCD$是菱形的是（　　）



A. $\angle ABD=\angle ADB$　　B. $AC\perp BD$　　C. $AB=BC$　　D. $AC=BD$

【答案】D

【解析】

【分析】由菱形的判定、矩形的判定分别对各个选项进行判断即可．

【详解】解：A、$\because \angle ABD=\angle ADB$，

$\therefore AB=AD$，

$\therefore \Psi ABCD$是菱形，故选项不符合题意；

B、$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，$AC\perp BD$，

$\therefore \Psi ABCD$是菱形，故选项不符合题意；

C、$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，$AB=BC$，

$\therefore \Psi ABCD$是菱形，故选项不符合题意，

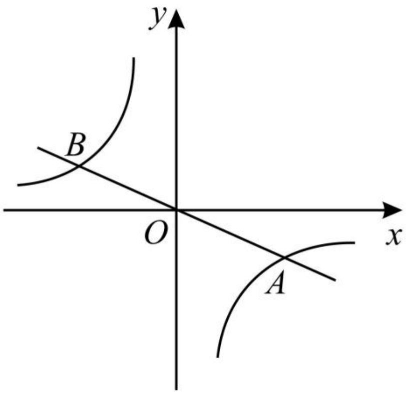
D、$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，$AC=BD$，

$\therefore \Psi ABCD$是矩形，故选项符合题意；

故选：D．

【点睛】本题考查了菱形的判定、矩形的判定，熟练掌握菱形的判定方法是解题的关键．

8. 如图，正比例函数$y=k_1x$与反比例函数$y=\dfrac{k_2}{x}$的图象交于$A(1,m)$、B两点，当$k_1x\le\dfrac{k_2}{x}$时，x的取值范围是（　　）



A. $-1\leq x<0$或$x\geq 1$　　　　B. $x\leq -1$或$0<x\leq 1$

C. $x\leq -1$或$x\geq 1$　　　　D. $-1\leq x<0$或$0<x\leq 1$

【答案】A

【解析】

【分析】先根据反比例函数图像的对称点求出点B的坐标，然后根据$k_1x\leq\frac{k_2}{x}$的解集即为反比例函数在一次函数上方的部分可得答案．

【详解】解析：Θ 正比例函数$y=k_1x$与反比例函数$y=\frac{k_2}{x}$的图像交于$A(1,m)$、B两点，

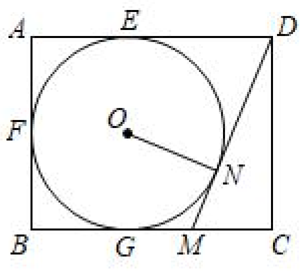
$\therefore B(-1,-m)$，

由图像可知，当$k_1x\leq\frac{k_2}{x}$时，x的取值范围是$-1\leq x<0$或$x\geq 1$，

故选：A．

【点睛】本题考查了一次函数与反比例函数的交点问题，根据反比例函数的对称性得出点B的坐标的坐标是解本题的关键．

9. 如图，在矩形$ABCD$中，$AB=4$，$AD=5$，AD，AB，BC分别与⊙O相切于E，F，G三点，过点D作⊙O的切线交BC于点M，切点为N，则DM的长为（　　）

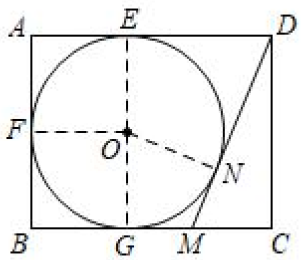


A. $\frac{13}{3}$　　B. $\frac{9}{2}$　　C. $\frac{4\sqrt{13}}{3}$　　D. $2\sqrt{5}$

【答案】A

【解析】

【详解】解：连接 OE，OF，ON，OG，



在矩形 $ABCD$ 中，

∵$\angle A=\angle B=90°$，$CD=AB=4$，

∵AD，AB，BC 分别与⊙O 相切于 E，F，G 三点，

∴$\angle AEO=\angle AFO=\angle OFB=\angle BGO=90°$，

∴四边形 $AFOE$，$FBGO$ 是正方形，

∴$AF=BF=AE=BG=2$，

∴$DE=3$，

∵DM 是⊙O 的切线，

∴$DN=DE=3$，$MN=MG$，

∴$CM=5-2-MN=3-MN$，

在 $R_t\triangle DMC$ 中，$DM^2=CD^2+CM^2$，

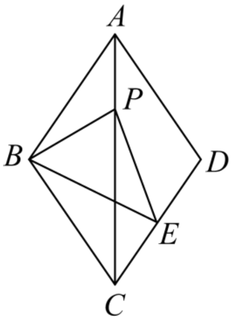
∴（$3+NM$）^{2}=（$3-NM$）$^2+4^2$，

∴$NM=\frac{4}{3}$，

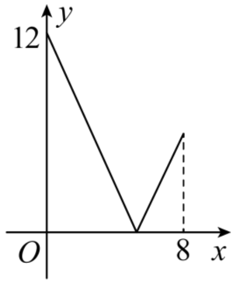
∴$DM=3+\frac{4}{3}=\frac{13}{3}$，

故选 A．

10. 如图（1），点 P 为菱形 $ABCD$ 对角线 AC 上一动点，点 E 为边 CD 上一定点，连接 PB，PE，BE．图（2）是点 P 从点 A 匀速运动到点 C 时，$\triangle PBE$ 的面积 y 随 AP 的长度 x 变化的关系图象（当点 P 在 BE 上时，令 $y=0$），则菱形 $ABCD$ 的周长为（　　）



图(1)



图(2)

A. $8\sqrt{3}$　　B. $8\sqrt{5}$　　C. 20　　D. 24

【答案】C

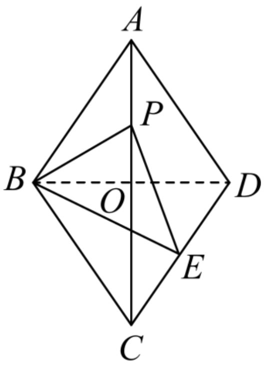
【解析】

【分析】根据图象可知，当 $x=0$ 时，即点 P 与点 A 重合，此时 $S_{\triangle ABE}=12$，进而求出菱形的面积，当 $x=8$ 时，此时点 P 与点 C 重合，即 $AC=8$，连接 BD，利用菱形的性质，求出边长，即可得出结果．

【详解】解：由图象可知：当 $x=0$ 时，即点 P 与点 A 重合，此时 $S_{\triangle ABE}=12$，

$\therefore S_{菱形ABCD}=2S_{\varsigma ABE}=24$，

当 $x=8$ 时，此时点 P 与点 C 重合，即 $AC=8$，连接 BD，交 AC 于点 O，



则：$BD\perp AC, OA=OC=4, OB=OD$，

$\therefore S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=24$，

$\therefore BD=6$，

$\therefore OB=OD=3$，

$\therefore AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=5$，

$\therefore$菱形 $ABCD$ 的周长为 $4\times5=20$；

故选 C．

【点睛】本题考查菱形的性质和动点的函数图象．熟练掌握菱形的性质，从函数图象中有效的获取信息，

是解题的关键．

二、填空题（本大题共 8 小题，每题 3 分，共计 24 分）

11．分解因式 m^2-9 的结果是__________．

【答案】$(m+3)(m-3)$

【解析】

【分析】本题考查用公式法分解因式．直接用平方差公式分解即可．

【详解】解：$m^2-9=m^2-3^2=(m+3)(m-3)$，

故答案为：$(m+3)(m-3)$．

12．马拉松长跑是国际上非常普及的长跑比赛项目，全程距离约 42200 米，将数字 42200 用科学记数法表示为__________．

【答案】4.22×10^4

【解析】

【分析】此题考查了科学记数法的表示方法．科学记数法的表示形式为 $a\times10^n$ 的形式，其中 $1\le|a|<10$，n 为整数；确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位，n 的绝对值与小数点移动的位数相同，当原数绝对值 ≥10 时，n 是正整数，当原数的绝对值 <1 时，n 是负整数．

【详解】解：将数字 42200 用科学记数法表示为 4.22×10^4，

故答案为：4.22×10^4．

13．已知方程 $x^2-5x+2=0$ 的两个解分别为 x_1、x_2，则 x_1+x_2 的值为_____．

【答案】5

【解析】

【分析】本题考查了一元二次方程根与系数的关系；

根据一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根之和等于 $-\dfrac{b}{a}$ 列式计算即可．

【详解】解：∵方程 $x^2-5x+2=0$ 的两个解分别为 x_1、x_2，

$\therefore x_1+x_2=5$，

故答案为：5．

14．已知圆锥的底面半径为 1cm，母线长为 3cm，则这个圆锥的侧面积是______．

【答案】$3\pi\,\mathrm{cm}^2$

【解析】

【分析】由已知可求得圆锥的底面圆的周长，且圆锥的侧面展开图是扇形，则根据公式：$S=\frac{1}{2}\times$扇形弧长$\times$扇形半径，即可求出圆锥的侧面积．

【详解】解：由题意知，圆锥侧面展开图的弧长即圆锥底面的周长为：$2\times\pi\times1=2\pi$(cm)；圆锥侧面展开图的半径即为母线长为3cm，

$\therefore S=\frac{1}{2}\times2\pi\times3=3\pi$ (cm^2)

故答案为：3πcm^2．

【点睛】本题考查了圆锥展开图，圆锥侧面积的计算，掌握扇形弧长与扇形半径乘积的一半的面积公式是解题关键．

15. 已知$a-2b+2=0$，则$4-2a+4b$的值为______．

【答案】8

【解析】

【分析】根据$a-2b+2=0$可得$a-2b=-2$，代入求值即可．

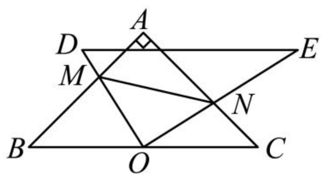
【详解】解：$\because a-2b+2=0$，

$\therefore 4-2a+4b=4-2(a-2b)=4-2\times(-2)=4+4=8$，

故答案为：8．

【点睛】本题考查了代数式求值，运用整体代入的思想解题是关键．

16. 笑笑将一副三角板按如图所示的位置放置，$\triangle DOE$的直角顶点O在边BC的中点处，其中$\angle A=\angle DOE=90^\circ$．$\angle B=45^\circ$，$\angle D=60^\circ$，$\triangle DOE$绕点$O$自由旋转，且$OD$，$OE$分别交$AB$，$AC$于点$M$，$N$当$AN=4$，$NC=2$时，$MN$的长为__________．

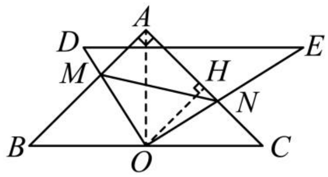


【答案】$2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】如图，连接AO，作$OH\perp AC$于H．首先证明$\triangle OMN$是等腰直角三角形，求出ON即可解决问题．

【详解】解：如图，连接AO．



$\because AB=AC$，$\angle BAC=90°$，$OB=OC$，

$\therefore AO\perp BC$，$\angle BAO=\angle C=45°$，$OA=OB=OC$，

$\because \angle DOE=\angle AOC=90°$，

$\therefore \angle AOM=\angle CON$，

$\therefore \triangle AOM\cong\triangle CON(\text{ASA})$，

$\therefore OM=ON$，

$\because AN=4$，$NC=2$，

$\therefore AC=6$，

$\because \angle AOC=90°$，$OA=OC$，$OH\perp AC$，

$\therefore AH=HC=3$，$OH=AH=CH=3$，

$\therefore HN=AN-AH=4-3=1$，

$\therefore ON=OM=\sqrt{OH^2+HN^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$，

$\therefore MN=\sqrt{2}ON=2\sqrt{5}$，

故答案为：$2\sqrt{5}$．

【点睛】本题考查旋转变换，等腰直角三角形的判定和性质，勾股定理，全等三角形的判定和性质等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题，属于中考常考题型．

17. 已知抛物线 $y=ax^2+4ax+4a+1\left(a\neq 0\right)$ 过点 $A\left(m,3\right)$，$B\left(n,3\right)$ 两点，若线段 AB 的长不大于 4，则代数式 a^2+a+1 的最小值是________．

【答案】$\dfrac{7}{4}$

【解析】

【分析】根据题意得 4a+1≥3，解不等式求得 a≥$\dfrac{1}{2}$，把 x=$\dfrac{1}{2}$ 代入代数式即可求得．

【详解】∵抛物线 y=ax^2+4ax+4a+1（a≠0）过点 A（m，3），B（n，3）两点，

$\therefore \dfrac{m+n}{2}=-\dfrac{4a}{2a}=-2$，顶点为（-2,1）

∴由题意可知 a>0,

∵线段 AB 的长不大于 4，

∴4a+1≥3

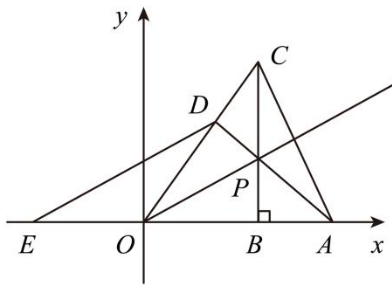
∴a≥$\frac{1}{2}$

∴a^2+a+1 的最小值为：（$\frac{1}{2}$）^{2}+$\frac{1}{2}$+1=$\frac{7}{4}$；

故答案为$\frac{7}{4}$.

【点睛】本题考查了二次函数的性质，二次函数图象上点的坐标特征，根据题意得出 4a+1≥3 是解题的关键.

18. 如图，在平面直角坐标系中，已知 $A\left(4,0\right)$，射线 OT 满足 $\tan\angle TOA=\frac{1}{2}$，点 P 为射线 OT 上的一个动点，过 P 作 $PB\perp x$ 轴于 B，过 A 作 $AC\perp$ 射线 OT 交 BP 延长线于点 C，连接 AP 并延长交 OC 于点 D，过 D 作 DE // 射线 OT 交 x 轴于点 E.



（1）若 $OB=2$，则 C 坐标为____________；

（2） AE 的最大值为____________.

【答案】 ①. $\left(2,4\right)$ ②. $2+2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】(1) 根据正切定义，和题干提到的 $AC\perp OT$，$\tan\angle TOA=\frac{1}{2}$，即可推出 $\tan\angle CAB=2$，$PB\perp x$ 轴，$AB=2$，根据正切定义即可推出 $CB=4$，即求出点 C 的坐标.

（2）根据题意得出 D 点在以 $Q\left(2,0\right)$ 为圆心，2 为半径的圆上运动，当 DE 与| 相切于第一象限时，QD 取得最大值，此时 AE 取得最大值，根据 DE // OT，可得 $\tan\angle DEQ=\frac{1}{2}$，解直角三角形即可求解.

【详解】(1)

解：如图所示

Θ $AC\perp OT$ 于点 M

$\therefore\angle OMA=90^\circ$

Θ $\tan\angle TOA=\frac{1}{2}$

Θ $\tan\angle MOA=\dfrac{AM}{OM}$

Θ $\tan\angle TOA=\tan\angle MOA$

$\therefore \tan\angle MOA=\dfrac{AM}{OM}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \tan\angle MAO=\dfrac{OM}{AM}=2$

Θ $CB\perp x$轴

$\therefore \angle CBA=90^\circ$

Θ $\tan\angle CAB=2$，$\tan\angle CAB=\dfrac{CB}{BA}$

Q $A(4,0)$，$OB=2$

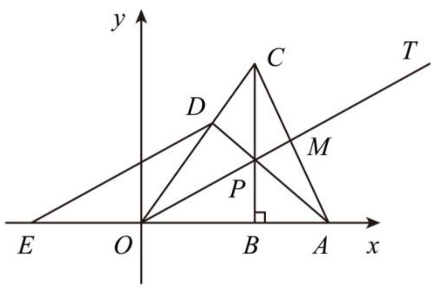
$\therefore BA=2$

$\therefore \dfrac{CB}{2}=2$

$\therefore CB=4$

$\therefore C(2,4)$

故答案为：$(2,4)$

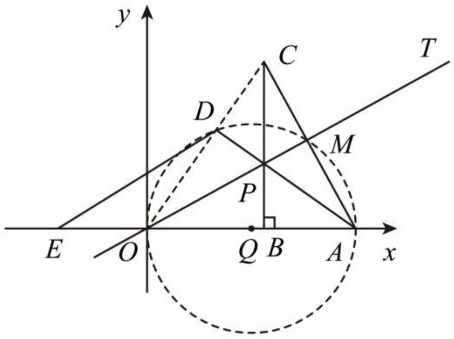


（2）∵ $\angle PDO=90^\circ$，

∴ D 在以 OP 为直径的弧上运动，

∵ $\angle AMO=90^\circ$

∴ D 点在以 $Q(2,0)$ 为圆心，2 为半径的圆上运动，



∴当 DE 与| 相切于第一象限时，QD 取得最大值，此时 AE 取得最大值

如图所示，连接 QD，则 $DQ \perp DE$

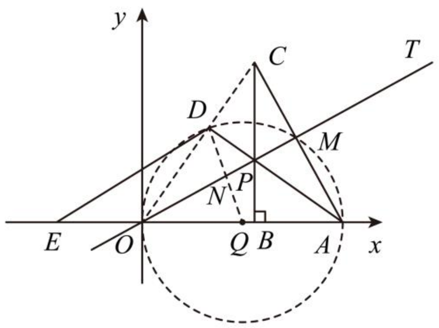
$\because DE \parallel OT$

$\therefore \tan\angle DEQ = \dfrac{1}{2}$

$\therefore ED = 4$

$\therefore QE = 2\sqrt{5}$，

$\therefore AE = 2 + 2\sqrt{5}$



故答案为：$2+2\sqrt{5}$.

【点睛】本题主要考查了解直角三角形，切线的性质，综合运用以上知识是解题的关键.

三、解答题（本大题共 10 小题，共计 96 分）

19. （1）计算：$\sqrt{27}-3\cos 30^\circ+\left(1-\pi\right)^0$

（2）化简：$\dfrac{a-1}{a-b}-\dfrac{a+1}{b-a}+\dfrac{2b}{b-a}$

【答案】（1）$\dfrac{3}{2}\sqrt{3}+1$；（2）2

【解析】

【分析】（1）原式利用特殊角的三角函数值，二次根式的性质，以及零指数幂运算法则即可求出值；

（2）运用同分母分式的加减法则进行计算即可.

【详解】解：原式$=3\sqrt{3}-\frac{3}{2}\sqrt{3}+1$

$=\frac{3}{2}\sqrt{3}+1$

原式$=\frac{a-1+(a+1)-2b}{a-b}$

$=\frac{2a-2b}{a-b}$

$=2$

【点睛】此题考查了实数的混合运算及分式的加减，熟练掌握运算法则是解本题的关键．

20．（1）解不等式组$\begin{cases}4(x+1)\le 7x+7\\ \frac{x-1}{2}-\frac{x-4}{4}<1\end{cases}$

（2）已知$M=2x^2-2x+3$，$N=4x^2-3x+4$，请比较M和N的大小．

【答案】（1）$-1\le x<2$；（2）$M<N$

【解析】

【分析】（1）先求出不等式组中每一个不等式的解集，再求出它们的公共部分即可求解．

（2）先作差，将结果利用配方法分解，再比较大小．

【详解】解：（1）由$4(x+1)\le 7x+7$得：$x\ge -1$

由$\frac{x-1}{2}-\frac{x-4}{4}<1$得：$x<2$

$\therefore$不等式组的解集为$-1\le x<2$；

（2）$N-M$

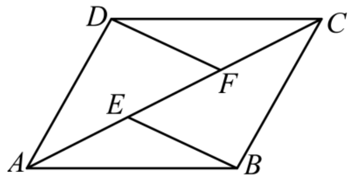
$=2x^2-x+1$

$=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0$

$\therefore M<N$

【点睛】此题考查了解一元一次不等式组以及配方法的应用，熟练掌握运算法则是解本题的关键．

21．如图，在四边形$ABCD$中，点E、F分别是对角线AC上任意两点，且满足$AF=CE$，连接DF，BE，若$DF=BE$，$DF\,/\!/\,BE$．求证：



（1）$\triangle AFD \cong \triangle CEB$；

（2）四边形 $ABCD$ 是平行四边形．

【答案】（1）见详解　　（2）见详解

【解析】

【分析】（1）先由 $DF \parallel BE$ 得到角相等，然后利用全等三角形的判定方法即可证得；

（2）由（1）得 $AD = BC$，证得 $AD \parallel BC$，即可证得；

【小问 1 详解】

解：Θ $DF \parallel BE$，

$\therefore \angle AFD = \angle CEB$，

在 $\triangle AFD$ 与 ςCEB 中，

$$Θ \begin{cases} DF = BE \\ \angle AFD = \angle CEB, \\ AF = CE \end{cases}$$

$\therefore \triangle AFD \cong \triangle CEB$．

【小问 2 详解】

解：Θ $\triangle AFD \cong \triangle CEB$，

$\therefore \angle DAF = \angle BCE$，$AD = BC$，

$\therefore AD \parallel BC$

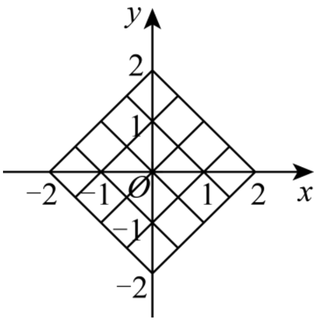
$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形．

【点睛】本题考查了全等三角形的性质与判定、平行四边形的判定等知识点，熟练运用判定方法是解题关键．

22.．在一个不透明的布袋中装有三个小球，小球上分别标有数字﹣1、0、2，它们除了数字不同外，其他都完全相同．

（1）随机地从布袋中摸出一个小球，则摸出的球为标有数字 2 的小球的概率为_____；

（2）小丽先从布袋中随机摸出一个小球，记下数字作为平面直角坐标系内点 M 的横坐标．再将此球放回、搅匀，然后由小华再从布袋中随机摸出一个小球，记下数字作为平面直角坐标系内点 M 的纵坐标，请用树状图或表格列出点 M 所有可能的坐标，并求出点 M 落在如图所示的正方形网格内（包括边界）的概率．



【答案】（1）$\frac{1}{3}$；（2）列表见解析，$\frac{2}{3}$.

【解析】

【详解】试题分析：（1）一共有 3 种等可能的结果总数，摸出标有数字 2 的小球有 1 种可能，因此摸出的球为标有数字 2 的小球的概率为$\frac{1}{3}$；（2）利用列表得出共有 9 种等可能的结果数，再找出点 M 落在如图所示的正方形网格内（包括边界）的结果数，可求得结果.

试题解析：（1）$P_{（摸出的球为标有数字2的小球）}=\frac{1}{3}$；（2）列表如下：

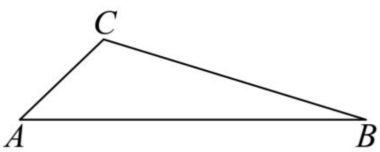
小华 小丽	-1	0	2
-1	（-1，-1）	（-1，0）	（-1，2）
0	（0，-1）	（0，0）	（0，2）
2	（2，-1）	（2，0）	（2，2）

共有 9 种等可能的结果数，其中点 M 落在如图所示的正方形网格内（包括边界）的结果数为 6，

$\therefore P_{（点M落在如图所示的正方形网格内）}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

考点：1 列表或树状图求概率；2 平面直角坐标系.

23. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB$为钝角.



（1）尺规作图：在边AB上确定一点D，使$\angle ADC=2\angle B$（不写作法，保留作图痕迹，并标明字母）；

（2）在（1）的条件下，若$\angle B=15°$，$CD=4$，$AC=\sqrt{7}$，求$\triangle ABC$的面积．

【答案】（1）见解析　（2）$3\sqrt{3}+4$

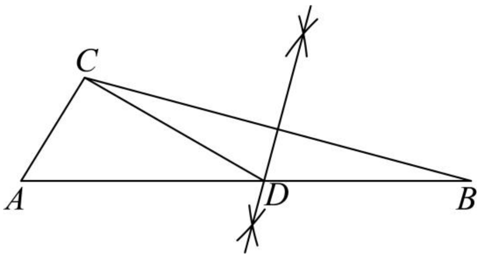
【解析】

【分析】（1）作BC和垂直平分线，交AB于D，即可；

（2）过点C作$CE\perp AB$于点E，利用含30度角的直角三角形的性质以及勾股定理先后求得CE、DE、AE的长，再利用三角形的面积公式即可求解．

【小问1详解】

解：如图，点D为所作；



根据垂直平分平分线的性质，知：$CD=DB$，

$\therefore \angle DCB=\angle B$，

$\therefore \angle ADC=\angle DCB+\angle B=2\angle B$；

【小问2详解】

解：由（1）知$\angle ADC=2\angle B$，$CD=DB$，

过点C作$CE\perp AB$于点E，

$\because \angle B=15°$，

$\therefore \angle ADC=2\angle B=30°$，

$\because CD=4$，

$\therefore CD=DB=4$，$CE=\frac{1}{2}CD=2$，

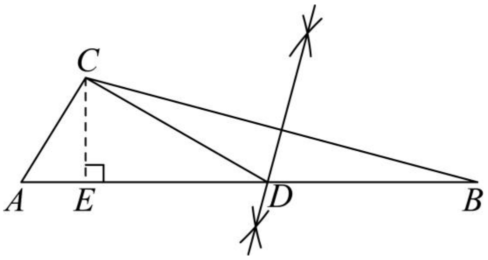
$\therefore DE=\sqrt{CD^2-CE^2}=2\sqrt{3}$，

$\because AC=\sqrt{7}$，

$\therefore AE=\sqrt{AC^2-CE^2}=\sqrt{3}$，

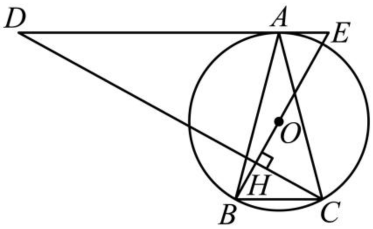
$\therefore AB=AE+ED+DB=\sqrt{3}+2\sqrt{3}+4=3\sqrt{3}+4$，

$\therefore \triangle ABC$的面积$=\frac{1}{2}\times AB\times CE=\frac{1}{2}\times 2\times\left(3\sqrt{3}+4\right)=3\sqrt{3}+4$　．



【点睛】本题考查了基本作图以及线段垂直平分线的性质、含 30 度角的直角三角形的性质、勾股定理等，充分发挥基本图形的作用，利用线段垂直平分线的性质求解.

24. $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，$AB=AC$，过点 A 作 $AE\parallel BC$，交射线 BO 于点 E，过点 C 作 $CH\perp BE$ 于点 H，交直线 AE 于点 D.



（1）求证：DE 是 $\odot O$ 的切线.

（2）已知 $BC=4\sqrt{5}$，$\tan\angle D=\dfrac{1}{2}$，求 DE 的长度.

【答案】（1）见详解　　（2）$25+6\sqrt{5}$

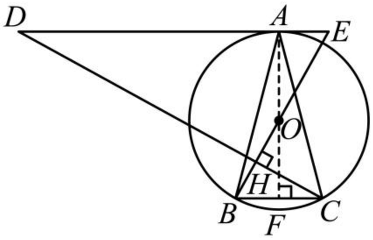
【解析】

【分析】（1）过点 A 作 $AF\perp BC$，垂足为 F，则 AF 是 BC 的垂直平分线，且 AF 过圆心 O，由平行得到 $\angle EAO=90^\circ$，即可判定为切线；

（2）连接 OC，由平行得 $\angle D=\angle DCB$，由垂直得 $\angle BHC=\angle OHC=\angle DHE$，设 $BH=x$，得 $CH=2x$，利用勾股定理求得 BH 和 CH，以及 $\odot O$ 的半径，即可得到 OH，进一步得到 $\angle D=\angle AOE$，利用正切值求得 AE，则有 OE 和 EH，再次利用正切值即可求得 DE.

【小问 1 详解】

证明：过点 A 作 $AF\perp BC$，垂足为 F，如图，



$\because AB=AC$，$AF\perp BC$，

$\therefore AF$ 是 BC 的垂直平分线，

∴ AF 过圆心 O，

∵ $AE \parallel BC$，

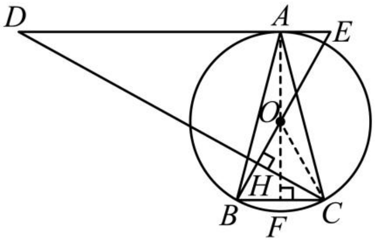
∴ $\angle EAO = \angle AFB = 90°$，

∵ OA是圆 O的半径，

∴DE是$\odot O$ 的切线；

【小问 2 详解】

连接OC，如图，



∵ $AE \parallel BC$，

∴ $\angle D = \angle DCB$，

∴ $\tan\angle DCB = \tan\angle D = \frac{1}{2}$，

∵ $CH \perp BE$，

∴ $\angle BHC = \angle OHC = \angle DHE = 90°$，

在$\mathrm{Rt}\triangle BHC$ 中， $\tan\angle DCB = \frac{BH}{CH} = \frac{1}{2}$，

∴设 $BH = x$，则 $CH = 2x$，

∵ $BH^2 + CH^2 = BC^2$，

∴ $x^2 + (2x)^2 = \left(4\sqrt{5}\right)^2$，

∴ $x = 4$ 或 $x = -4$（舍去），

∴ $BH = 4$， $CH = 8$，

设$\odot O$ 的半径为 r，

在$\mathrm{Rt}\triangle OHC$ 中， $OH^2 + CH^2 = OC^2$，

∴ $(r-4)^2 + 8^2 = r^2$，

∴ $r = 10$，

∴ $OC = OA = OB = 10$，

∴ $OH = OB - BH = 6$，

∵ $\angle DHE = \angle EAO = 90°$，

$\therefore \angle E+\angle AOE=90^\circ$，$\angle E+\angle D=90^\circ$，

$\therefore \angle D=\angle AOE$，

$\therefore \tan\angle AOE=\tan\angle D=\dfrac{1}{2}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOE$ 中，$AE=AO\cdot\tan\angle AOE=10\times\dfrac{1}{2}=5$，

$\therefore OE=\sqrt{AE^2+AO^2}=5\sqrt{5}$，

$\therefore EH=OE+OH=5\sqrt{5}+6$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle DHE$ 中，$\tan\angle D=\dfrac{EH}{DH}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore DE=\sqrt{5}EH=25+6\sqrt{5}$．

【点睛】本题主要考查圆和三角形的有关知识，涉及等腰三角形的性质、平行线的性质、圆的切线判定、解直角三角形和勾股定理，解题的关键是熟练利用正切值和作辅助线．

25. 1 是一种儿童可折叠滑板车，该滑板车完全展开后示意图如图 2 所示，由车架 $AB-CE-EF$ 和两个大小相同的车轮组成车轮半径为 8 cm，已知 $BC=58\text{cm}$，$CD=30\text{cm}$，$DE=12\text{cm}$，$EF=68\text{cm}$，$\cos\angle ACD=\dfrac{4}{5}$，当 A，E，F 在同一水平高度上时，$\angle CEF=135^\circ$．

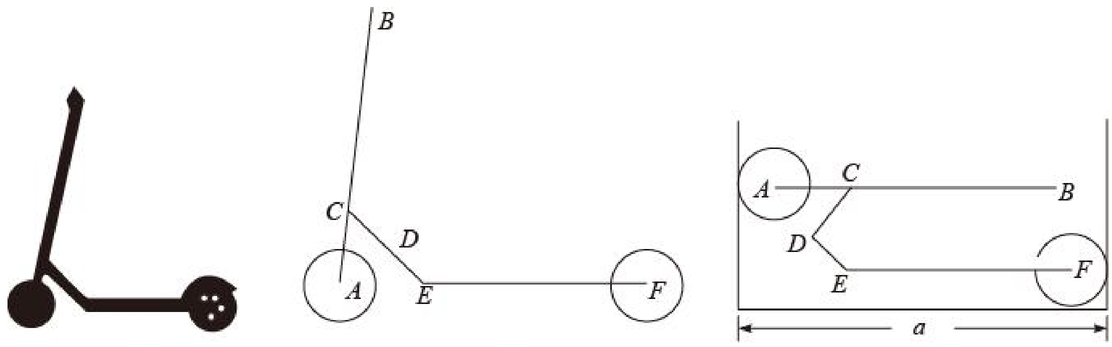


图1　　图2　　图3

（1）求 AC 的长；

（2）为方便存放，将车架前部分绕着点 D 旋转至 $AB\parallel EF$，按如图 3 所示方式放入收纳箱，试问该滑板车折叠后能否放进长 $a=100\text{cm}$ 的收纳箱（收纳箱的宽度和高度足够大），请说明理由（参考数据：$\sqrt{2}\approx1.4$）．

【答案】（1）30cm

（2）该滑板车折叠后能放进长 $a=100\text{cm}$ 的收纳箱，理由见解析

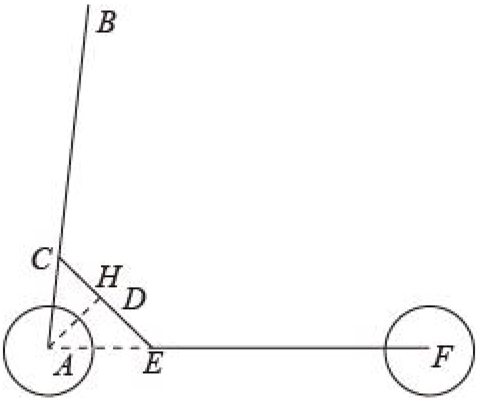
【解析】

【分析】（1）根据题意作辅助线构造直角三角形，再根据 $\cos\angle ACD=\dfrac{4}{5}$，设 $CH=4x, AC=5x$，再由

勾股定理得 $AH=3x$，可得 ΔADE 是等腰直角三角形，再利用线段之间的关系即可求解；

（2）过点 A 作 $AM\perp EF$ 交其延长线于点 M，过点 D 作 $DN\perp EF$ 交其延长线于点 N，并延长 ND，交 AB 于点 P，先证明四边形 $AMNP$ 是矩形，再由解直角三角形求 PC、NE 的长度，再根据题意求出折叠后的总长度进行比较即可．

【小问 1 详解】



过点 A 作 $AH\perp CE$，

$\Theta\ \cos\angle ACD=\dfrac{4}{5}=\dfrac{CH}{AC}$，可设 $CH=4x, AC=5x$，

由勾股定理得 $AH=3x$，

$\Theta\ \angle CEF=135°$，

$\therefore \angle AED=180°-135°=45°$，

$\therefore \Delta ADE$ 是等腰直角三角形，

$\therefore AH=HE$，

$\Theta\ CD=30$，$DE=12$，

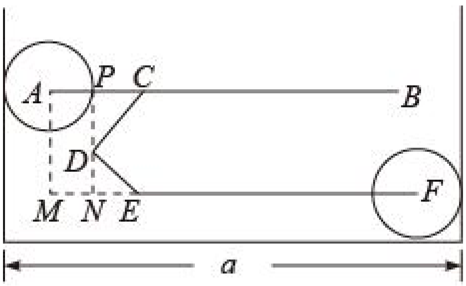
$\therefore CE=CD+DE=42$，

$\therefore HE=CE-CH=42-4x=3x$，

解得 $x=6$，

$\therefore AC=30\text{cm}$；

【小问 2 详解】



过点 A 作 $AM\perp EF$ 交其延长线于点 M，过点 D 作 $DN\perp EF$ 交其延长线于点 N，并延长 ND，交 AB 于点

P，

$\because AB \parallel EF$，

$\therefore \angle M = \angle PNM = \angle NPA = 90°$

$\therefore$ 四边形 $AMNP$ 是矩形，

$\therefore AP = MN$，

$\because CD = 30$，$DE = 12$，$\cos\angle ACD = \frac{4}{5}$，$\angle DEN = 45°, AC = 30$，

$\therefore PC = CD \cdot \cos\angle ACD = 24, EN = ED \cdot \cos\angle DEN = 6\sqrt{2}$，

$\therefore MN = AP = AC - CP = 30 - 24 = 6$，

$\therefore ME = MN + NE = 6 + 6\sqrt{2}$，

$\because EF = 68$，

$\therefore$ 滑板车折叠后总长度为 $8\times 2 + 6 + 6\sqrt{2} + 68 \approx 98.4 < 100$，

所以，该滑板车折叠后能放进长 $a = 100\text{cm}$ 的收纳箱．

【点睛】本题考查了解直角三角形的应用及翻折变换，熟练掌握知识点并能够准确理解题意是解题的关键．

26. 在平面直角坐标系中为，抛物线 $y = -x^2 + bx + c$（b、c 为常数）的对称轴为直线 $x = 1$，与 y 轴交点坐标为 $(0,3)$．

（1）求此抛物线对应的函数表达式；

（2）点 A、点 B 均在这个抛物线上（点 A 在点 B 的左侧），点 A 的横坐标为 m，点 B 的横坐标为 $4-m$． 将此抛物线上 A、B 两点之间的部分（含 A、B 两点）记为图象 G．

①当点 A 在 x 轴上方，图象 G 的最高与最低点的纵坐标差为 6 时，求 m 的值；

②设点 $D(1,n)$，点 $E(1,1-n)$，将线段 DE 绕点 D 逆时针旋转 $90°$后得到线段 DF，连接 EF，当 $\triangle DEF$（不含内部）和二次函数在 $x \geq 0$ 范围上的图像有且仅有一个公共点时，求 n 的取值范围．

【答案】（1）$y = -x^2 + 2x + 3$；

（2）①$3-\sqrt{6}$；②$n = \frac{3+\sqrt{57}}{8}$ 或 $n < -\frac{13}{4}$；

【解析】

【分析】本题考查待定系数法求解析式及二次函数最值、与线段交点问题：

（1）将对称轴及点(0,3)代入求解即可得到答案；

（2）①先求出二次函数与 x 轴交点，分点 A 在对称轴左边，对称轴右边两类讨论，根据最高与最低点的距

离列式即可得到答案；②当点 $D(1,n)$ 在点 $E(1,1-n)$ 上方，用含 n 的代数式表示出点 $F(2n,n)$，当点 $F(2n,n)$ 在抛物线 $y=-x^2+2x+3$ 上时，ςDEF（不含内部）和二次函数在 $x\geq0$ 范围上的图像有且仅有一个公共点，当点 $D(1,n)$ 在点 $E(1,1-n)$ 下方，根据 $E(1,1-n)$，$F(2n,n)$ 得出 EF 解析式，与抛物线解析式联立，求出 $\Delta=0$ 时对应的 n 的值，当 $n<-\dfrac{13}{4}$ 时，ςDEF（不含内部）和二次函数在 $x\geq0$ 范围上的图像有且仅有一个公共点.

【小问 1 详解】

解：∵抛物线的对称轴为直线 $x=1$，与 y 轴交点坐标为(0,3)，

$\therefore -\dfrac{b}{2\times(-1)}=1$，$c=3$，

解得：$b=2$，$c=3$，

$\therefore y=-x^2+2x+3$；

【小问 2 详解】

解：①当 $y=0$ 时，

$0=-x^2+2x+3$，解得：$x_1=3$，$x_2=-1$，

当点 A 在对称轴左边时，即 $-1<m\leq1$ 时，

∵ $a=-1<0$，

∴此时最高点为对称轴所在点，最低点为 B 点，

∵最高与最低点的纵坐标差为 6，

$\therefore -1^2+2\times1+3-\left[-(4-m)^2+2(4-m)+3\right]=6$，

解得：$m_1=3+\sqrt{6}$（不符合题意舍去），$m_2=3-\sqrt{6}$；

当点 A 在对称轴右边时，即 $1<m<3$，

∵ $a=-1<0$，

∴此时最高点为 A 点，最低点为 B 点，

∵最高与最低点的纵坐标差为 6，

$\therefore -m^2+2\times m+3-\left[-(4-m)^2+2(4-m)+3\right]=6$，

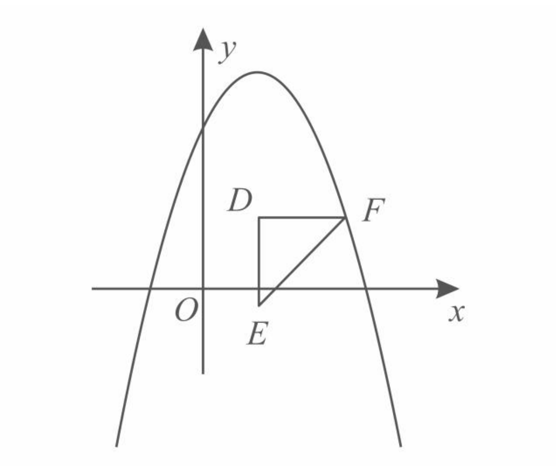
解得：$m=\dfrac{1}{2}$（不符合题意舍去）；

综上所述：$m=3-\sqrt{6}$；

②当点$D(1,n)$在点$E(1,1-n)$上方，$n>1-n$，即：$n>\frac{1}{2}$时，

$DF=n-(1-n)=2n-1$，点$F(1+(2n-1),n)$，即$F(2n,n)$，

当点$F(2n,n)$在抛物线$y=-x^2+2x+3$上时，ςDEF（不含内部）和二次函数在$x\geq 0$范围上的图像有且仅有一个公共点，



$\therefore n=-(2n)^2+2\times(2n)+3$，解得：$n=\frac{3+\sqrt{57}}{8}$，$n=\frac{3-\sqrt{57}}{8}$（舍），

当点$D(1,n)$在点$E(1,1-n)$下方，$n<1-n$，即：$n<\frac{1}{2}$时，

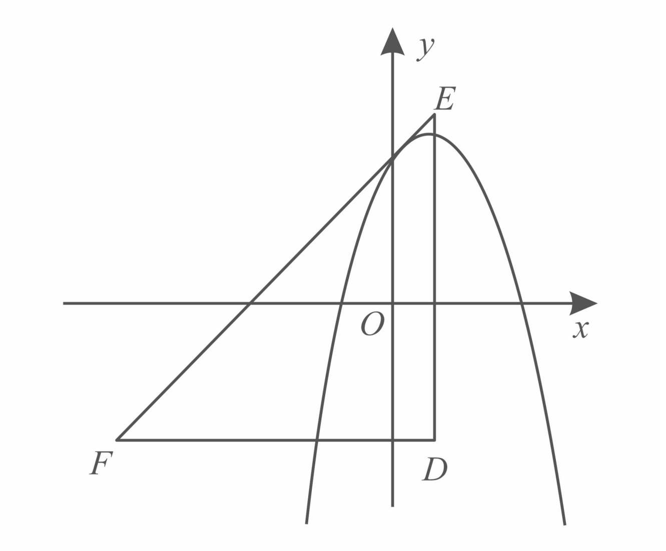
$DF=(1-n)-n=1-2n$，点$F(1-(1-2n),n)$，即$F(2n,n)$，

设EF解析式为：$y=kx+m$，则：$\begin{cases}1-n=k\cdot 1+m\\ n=k\cdot 2n+m\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=1\\ m=-n\end{cases}$，

$\therefore EF$解析式为：$y=x-n$，与抛物线解析式联立：

$\begin{cases}y=x-n\\ y=-x^2+2x+3\end{cases}$，整理得：$x^2-x-3-n=0$，

当直线EF与抛物线只有一个交点时，$\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-3-n)=0$，解得：$n=-\frac{13}{4}$，



当 $n<-\dfrac{13}{4}$ 时，$\triangle DEF$（不含内部）和二次函数在 $x\geq 0$ 范围上的图像有且仅有一个公共点，

$\therefore n$ 的取值范围是 $n=\dfrac{3+\sqrt{57}}{8}$ 或 $n<-\dfrac{13}{4}$，

故答案为：$n=\dfrac{3+\sqrt{57}}{8}$ 或 $n<-\dfrac{13}{4}$．

27. 如图 1，四边形 $ABCD$ 中 $AD\parallel BC$，$\angle B=90^{\circ}$，$\tan C=\dfrac{4}{3}$，$CD=10$．

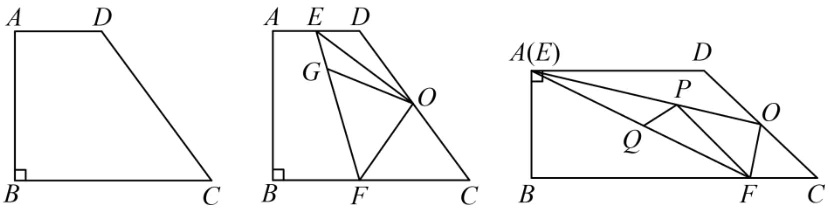


图1　　　图2　　　图3

（1）线段 $AB=$____；

（2）如图 2，点 O 是 CD 的中点，E、F 分别是 AD、BC 上的点，将 $\triangle DEO$ 沿着 EO 翻折得 $\triangle GEO$，将 $\triangle COF$ 沿着 FO 翻折使 CO 与 GO 重合．

①当点 E 从点 D 运动到点 A 时，点 G 走过的路径长为 $\dfrac{5}{2}\pi$，求 AD 的长；

②在①的条件下，若 E 与 A 重合（如图 3），Q 为 EF 中点，P 为 OE 上一动点，将 $\triangle FPQ$ 沿 PQ 翻折得到 $\triangle F'PQ$，若 $\triangle F'PQ$ 与 $\triangle APF$ 的重合部分面积是 $\triangle APF$ 面积的 $\dfrac{1}{4}$，求 AP 的长．

【答案】（1）8　　（2）①25，② $20\sqrt{2}-\dfrac{80\sqrt{3}}{7}$ 或 $\dfrac{100}{7}$

【解析】

【分析】（1）作 $DG\perp BC$ 于 G，解直角三角形 CDG 求得结果；

（2）①作 $AH \perp CD$，交CD的延长线于点 H，可得出点 G 的轨迹是以 O 为圆心，5 为半径的弧，根据弧长公式求得 $\angle DOG = 90°$，进而得出 $\angle AOD = 45°$，解ςAOD求得结果；②先解三角形 AOD 和 COF 求得 AO 和 OF，进而根据勾股定理得出 AF 的值，分两种情形：当 QF'交 AP 于 R 时，取 OA 的中点 X，连接 QX，可得出点 R 是 AP 的中点，$\angle PQF = \angle PQF'$，根据角平分线的性质得出 $\frac{QR}{AQ} = \frac{AP}{AR} = 2$，从而求得 RQ 的值，根据勾股定理得出 RX 的值，进一步得出结果；当 PF' 交 AQ 于 R 时，同理可得：R 是 AQ 的中点，$\frac{PF}{PR} = \frac{FQ}{RQ} = 2$，进而推出四边形 $APQF'$ 是平行四边形，进一步得出结果．

【小问 1 详解】

解：如图 1，

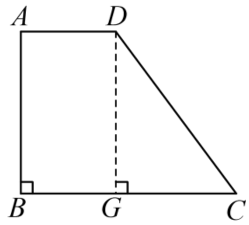


图1

作 $DG \perp BC$ 于 G，

$\therefore \angle DGB = 90°$，

$\because AD \parallel BC$，$\angle B = 90°$，

$\therefore \angle A = 180° - \angle B = 90°$，

$\therefore$四边形 $ABGD$ 是矩形，

$\therefore AB = DG$，

$\because \tan C = \frac{4}{3}$，

$\therefore \sin C = \frac{4}{5}$，

$\therefore AB = DG = CD \cdot \sin C = 10 \times \frac{4}{5} = 8$，

故答案为：8；

【小问 2 详解】

解：①如图 2，

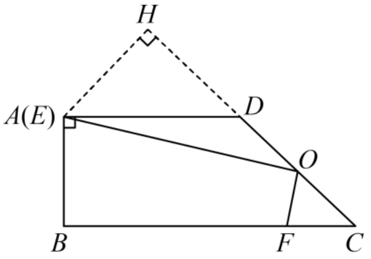


图2

作 $AH \perp CD$，交CD的延长线于点 H，

$\because AD // BC$，

$\therefore \angle ADH = \angle C$，

$\therefore \dfrac{AH}{DH} = \tan \angle ADH = \dfrac{4}{3}$，

设 $AH = 4a$， $DH = 3a$，则 $AD = 5a$，

$\because \varsigma DEO$沿着 EO 翻折得ςGEO，

$\therefore OG = OD$， $\angle DOE = \angle GOE$，

$\therefore$点 G 的轨迹是以 O 为圆心，5 为半径的弧，

$\therefore \dfrac{n \cdot \pi \cdot 5}{180} = \dfrac{5\pi}{2}$，

$\therefore n = 90°$，

$\therefore \angle AOE = 45°$，

$\therefore \dfrac{AH}{OH} = \tan \angle AOD = 1$，

$\therefore OH = AH = 4a$，

由 $OH - DH = OD$ 得，

$4a - 3a = 5$，

$\therefore a = 5$，

$\therefore OH = 4a = 20$， $AD = 5a = 25$；

②$\because$将ςDEO沿着 EO 翻折得ςGEO，将ςCOF 沿着 FO 翻折使 CO 与 GO 重合，

$\therefore \angle DOE = \angle GOE$， $\angle COF = \angle GOF$，

$\therefore \angle EOF = 90°$，

$\because \angle AOD = 45°$，

$\therefore \angle COF = 45°$，

如图 3，

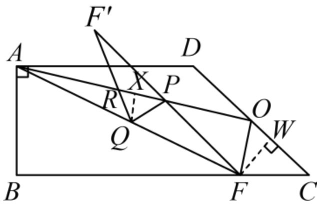


图3

作 $FW \perp CD$ 于 W，设 QF' 交 AP 于 R，

$\therefore \tan C = \dfrac{FW}{CW} = \dfrac{4}{3}$，

设 $FW = 4x$，$CW = 3x$，

$\because \tan\angle COF = \dfrac{FW}{OW} = 1$，

$\therefore OW = FW = 4x$，

由 $OW + CW = OC$ 得，

$4x + 3x = 5$，

$\therefore x = \dfrac{5}{7}$，

$\therefore FW = OW = 4x = \dfrac{20}{7}$，

$\therefore OF = \sqrt{2}OW = \dfrac{20}{7}\sqrt{2}$　，

由①知：　$AO = \sqrt{2}AH = 20\sqrt{2}$，

$\therefore AF = \sqrt{OA^2 + OF^2} = \sqrt{\left(20\sqrt{2}\right)^2 + \left(\dfrac{20\sqrt{2}}{7}\right)^2} = \dfrac{200}{7}$，

当 QF' 交 AP 于 R 时，取 OA 的中点 X，连接 QX，

$\because Q$ 是 AF 的中点，

$\therefore QX \parallel OF$，

$\therefore QX = \dfrac{1}{2}OF = \dfrac{10\sqrt{2}}{7}$，$\angle AXQ = \angle AOF = 90°$，$S_{\triangle APQ} = S_{\triangle PQF} = \dfrac{1}{2}S_{\triangle APF}$，

$\because S_{\triangle PQR} = \dfrac{1}{4}S_{\triangle APF}$，

$\therefore S_{\triangle PQR} = \dfrac{1}{2}S_{\triangle APQ}$，

$\therefore$点 R 是 AP 的中点，

由折叠得：$\angle PQF = \angle PQF'$，

$\therefore \dfrac{QR}{AQ}=\dfrac{AP}{AR}=2$，

$\therefore RQ=\dfrac{1}{2}AQ=\dfrac{50}{7}$，

$\therefore \mathrm{RX}=\sqrt{RQ^2-OX^2}=\sqrt{\left(\dfrac{50}{7}\right)^2-\left(\dfrac{10\sqrt{2}}{7}\right)^2}=\dfrac{10\sqrt{23}}{7}$，

$\therefore AR=AX-RX=10\sqrt{2}-\dfrac{10\sqrt{23}}{7}$，

$\therefore AP=2AR=20\sqrt{2}-\dfrac{20\sqrt{23}}{7}$，

如图 4，

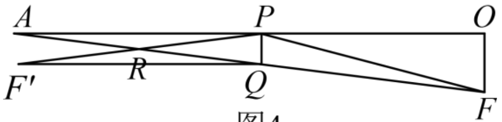


图4

当 PF' 交 AQ 于 R 时，

同理可得：R 是 AQ 的中点，$\dfrac{PF}{PR}=\dfrac{FQ}{RQ}=2$，

$\therefore PF'=PF=2PR$，

∴R 是 PF' 的中点，

∴四边形 $APQF'$ 是平行四边形，

$\therefore AP=QF'=QF=\dfrac{1}{2}AF=\dfrac{100}{7}$，

综上所述：$AP=20\sqrt{2}-\dfrac{80\sqrt{3}}{7}$ 或 $\dfrac{100}{7}$.

【点睛】本题考查了解直角三角形，角平分线的性质，轴对称的性质，弧长公式等知识，解决问题的关键是分类讨论和较强计算能力.