

无锡市第一中学 2023-2024 学年度第一学期阶段性质量检测试卷

高一数学

2023.12

一、单选题（每小题 5 分，共 40 分）

1. 已知集合 $M = \{-1, 1, 2\}$, $N = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 = x\}$, 则 $M \cup N =$ ()

A. $\{1\}$ B. $\{-1, 0\}$ C. $\{-1, 0, 1, 2\}$ D. $\{-1, 0, 2\}$

【答案】C

【解析】

【分析】解方程求得集合 N , 由并集定义可得结果.【详解】 $\because N = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 = x\} = \{0, 1\}$, $\therefore M \cup N = \{-1, 0, 1, 2\}$.

故选: C.

2. “ α 是钝角”是“ α 是第二象限角”的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】根据钝角和第二象限角的定义, 结合充分性、必要性的定义进行判断即可.

【详解】因为 α 是钝角, 所以 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, 因此 α 是第二象限角,当 α 是第二象限角时, 例如 451° 是第二象限角, 但是显然 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ 不成立,所以“ α 是钝角”是“ α 是第二象限角”的充分不必要条件,

故选: A

3. 已知 $\tan \alpha = 3$, 则 $\frac{\sin(\pi - \alpha) + 2\cos(\pi + \alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} =$ ()

A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】利用诱导公式、同角三角函数的基本关系式求得正确答案.

【详解】
$$\frac{\sin(\pi-\alpha)+2\cos(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha-2\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{\tan\alpha-2}{1+\tan\alpha}=\frac{3-2}{1+3}=\frac{1}{4}.$$

故选: B

4. 用二分法求函数 $f(x)=\ln(x+1)+x-1$ 在区间 $[0,1]$ 上的零点,要求精确度为 0.01 时,所需二分区间的次数最少为 ()

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

【答案】 C

【解析】

【分析】根据题意,由二分法中区间长度的变化,分析可得经过 n 次操作后,区间的长度为 $\frac{1}{2^n}$,据此可得 $\frac{1}{2^n} < 0.01$,解可得 n 的取值范围,即可得答案.

【详解】解:开区间 $(0,1)$ 的长度等于 1,每经过一次操作,区间长度变为原来的一半,

经过 n 此操作后,区间长度变为 $\frac{1}{2^n}$,

$\therefore$ 用二分法求函数 $f(x)=\ln(x+1)+x-1$ 在区间 $(0,1)$ 上近似解,

要求精确度为 0.01,

$\therefore \frac{1}{2^n} \leq 0.01$, 解得 $n \geq 7$,

故选: C.

5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} -x^2-ax-9, & x \leq 1 \\ \frac{a}{x}, & x > 1 \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上满足不等式 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$, 则实数 a 的取值范围为

()

- A. $[-5,0)$ B. $(-\infty,-2]$ C. $[-5,-2]$ D. $(-\infty,0)$

【答案】 C

【解析】

【分析】确定函数 $f(x)$ 的单调性,再利用分段函数的单调性列出不等式组,求解即得.

【详解】依题意，函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，于是
$$\begin{cases} -\frac{a}{2} \geq 1 \\ a < 0 \\ -1-a-9 \leq a \end{cases}, \text{解得 } -5 \leq a \leq -2,$$

所以实数 a 的取值范围为 $[-5, -2]$.

故选：C

6. 已知 $a = \log_4 2, b = \log_{0.4} 0.2, c = 0.4^{0.2}$ ，则 ()

- A. $a < c < b$ B. $a < b < c$ C. $b < c < a$ D. $c < a < b$

【答案】A

【解析】

【分析】根据对数函数和指数函数的单调性，结合中间量法即可得解.

【详解】因为 $a = \log_4 2 = \frac{1}{2}, b = \log_{0.4} 0.2 > \log_{0.4} 0.4 = 1, c = 0.4^{0.2} < 0.4^0 = 1$,

$$\text{又 } c = 0.4^{0.2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{5}} > \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{2},$$

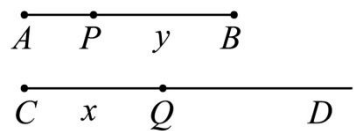
所以 $a < c < b$.

故选：A.

7. 如图，假定 P, Q 两点以相同的初速度（单位：单位/秒），分别同时从 A, C 出发，点 Q 沿射线 CD 做匀速运动， $CQ = x$ ，点 P 沿线段 AB （长度为 10^7 单位）运动，它在任何一点的速度值等于它尚未经过的

距离 ($PB = y$)，那么定义 x 为 y 的纳皮尔对数，函数表达式为 $y = 10^7 \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{x}{10^7}}$ ，则 P 从靠近 A 的第一个五等

分点移动到靠近 B 的三等分点经过的时间约为 () (参考数据： $\ln 2 \approx 0.7, \ln 3 \approx 1.1, \ln 5 \approx 1.6$)



- A. 0.7 秒 B. 0.9 秒 C. 1.1 秒 D. 1.3 秒

【答案】B

【解析】

【分析】 P 运动到靠近 A 的第一个五等分点时， $x_1 = 10^7 \ln \frac{5}{4}$ ； P 运动到靠近 B 的三等分点时， $x_2 = 10^7 \ln 3$ ，

再计算 $\frac{x_2 - x_1}{10^7} = \ln 3 + 2 \ln 2 - \ln 5$ 得到答案.

【详解】 P, Q 两点的初速度为 10^7 单位/秒. 设 P 运动到靠近 A 的第一个五等分点时, $CQ = x_1$,

$$\text{则 } \frac{4}{5} \times 10^7 = 10^7 \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{x_1}{10^7}}, \text{ 得 } x_1 = 10^7 \ln \frac{5}{4}.$$

设 P 运动到靠近 B 的三等分点时, $CQ = x_2$, 则 $\frac{1}{3} \times 10^7 = 10^7 \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{x_2}{10^7}}$, 得 $x_2 = 10^7 \ln 3$.

$$\text{故所求的时间为 } \frac{x_2 - x_1}{10^7} = \frac{10^7 \ln 3 + 10^7 \ln \frac{4}{5}}{10^7} = \ln 3 + 2 \ln 2 - \ln 5 \approx 0.9 \text{ 秒}.$$

故选: B

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 7 & (x \geq 3) \\ |\log_2(x+1)| & (-1 < x < 3) \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $[f(x)]^2 + mf(x) + m + 3 = 0$ 有 6 个根, 则

m 的取值范围为 ()

A. $(-\infty, 2 - 2\sqrt{3})$

B. $(-2, 2 - 2\sqrt{3})$

C. $\left(-\frac{7}{3}, 0\right)$

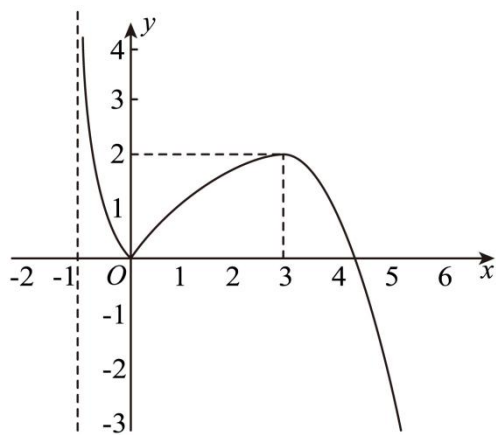
D. $\left(-\frac{7}{3}, -2\right)$

【答案】D

【解析】

【分析】先作出函数 $f(x)$ 的图像, 结合图像可把问题转化为 $t^2 + mt + m + 3 = 0$ 在 $(0, 2)$ 上有两个不同实根 t_1, t_2 , 数形结合即可求得答案.

【详解】作出函数 $f(x)$ 图像如图所示:



令 $t = f(x)$, 则 $[f(x)]^2 + mf(x) + m + 3 = 0$ 可化为 $t^2 + mt + m + 3 = 0$,

若 $[f(x)]^2 + mf(x) + m + 3 = 0$ 有 6 个根, 结合图像可知方程 $t^2 + mt + m + 3 = 0$ 在 $(0, 2)$ 上有 2 个不相等的实根,

不妨设 $0 < t_1 < t_2 < 2$, $g(t) = t^2 + mt + m + 3$,

$$\text{则} \begin{cases} m^2 - 4(m+3) > 0 \\ 0 < -\frac{m}{2} < 2 \\ g(0) = m+3 > 0 \\ g(2) = 4+2m+m+3 > 0 \end{cases}, \text{解得 } -\frac{7}{3} < m < -2,$$

故 m 的取值范围为 $\left(-\frac{7}{3}, -2\right)$.

故选: D.

二、多选题 (每小题 5 分, 共 20 分)

9. 若非空集合 M, N, P 满足: $M \cap N = N$, $M \cup P = P$, 则 ()

- A. $N \cup P = P$ B. $P \subseteq M$ C. $N \cap P = N$ D. $N \cap (\delta_p M) = \emptyset$

【答案】ACD

【解析】

【分析】先根据交集、并集运算的结果得到 $N \subseteq M, M \subseteq P$, 然后再逐项进行判断.

【详解】因为 $M \cap N = N$, $M \cup P = P$, 所以 $N \subseteq M, M \subseteq P$, 所以 $N \subseteq M \subseteq P$,

对于 A: 因为 $N \subseteq P$, 所以 $N \cup P = P$, 故正确;

对于 B: 因为 $M \subseteq P$, 所以 $P \subseteq M$ 不一定成立, 故错误;

对于 C: 因为 $N \subseteq P$, 所以 $N \cap P = N$, 故正确;

对于 D: 因为 $N \subseteq M$, $M \cap (\delta_p M) = \emptyset$, 所以 $N \cap (\delta_p M) = \emptyset$, 故正确;

故选: ACD.

10. 下列说法不正确的是 ()

A. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 2]$, 则函数 $f(2x)$ 的定义域为 $[0, 4]$

B. 函数 $y = \frac{1}{x}$ 是减函数

C. 函数 $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ 的图象关于点 $(-2, 1)$ 成中心对称

D. 幂函数 $f(x) = (m^2 - 3m + 3)x^{3m-4}$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数, 则 m 的值为 1 或 2

【答案】ABD

【解析】

【分析】对于 A：根据抽象函数的定义域分析求解；对于 B：根据反比例函数的单调性；对于 C：根据反比例函数的对称性结合函数平移分析判断；对于 D：根据幂函数的定义和性质列式求解。

【详解】对于 A，函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 2]$ ，由 $0 \leq 2x \leq 2$ 得 $0 \leq x \leq 1$ ，

则函数 $f(2x)$ 的定义域为 $[0, 1]$ ，A 错误；

对于 B，函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上是减函数，在整个定义域内不为减函数，B 错误；

对于 C，函数 $y = -\frac{1}{x}$ 的图象的对称中心为 $(0, 0)$ ，

将函数 $y = -\frac{1}{x}$ 的图象先向左平移 2 个单位，再向上平移 1 个单位得到函数 $y = -\frac{1}{x+2} + 1 = \frac{x+1}{x+2}$ 的图象，

所以函数 $y = \frac{x+1}{x+2}$ 的对称中心为 $(-2, 1)$ ，C 正确；

对于 D，因为函数 $f(x) = (m^2 - 3m + 3)x^{3m-4}$ 为幂函数且在 $(0, +\infty)$ 上为减函数，

所以 $\begin{cases} m^2 - 3m + 3 = 1 \\ 3m - 4 < 0 \end{cases}$ ，解得 $m = 1$ ，D 错误。

故选：ABD。

11. 下列结论中，正确的结论有 ()

A. 函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的最小值是 2

B. 如果 $x > 0$ ， $y > 0$ ， $x + 3y + xy = 9$ ，那么 xy 的最大值为 3

C. 函数 $f(x) = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 4}}$ 的最小值为 $\frac{5}{2}$

D. 如果 $a > 0$ ， $b > 0$ ，且 $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{1+b} = 1$ ，那么 $a+b$ 的最小值为 2

【答案】BCD

【解析】

【分析】利用基本不等式对选项逐个判断即可得。

【详解】对 A：当 $x = -1$ 时， $y = -1 - 1 = -2$ ，所以最小值不是 2，故 A 错误；

对 B：由已知可得 $9 - xy = x + 3y \geq 2\sqrt{3xy}$ ，解得 $0 < \sqrt{xy} \leq \sqrt{3}$ ，所以 $0 < xy \leq 3$ ，

当且仅当 $x = 3y$ 时成立，此时 xy 的最大值为 3，故 B 正确；

对 C: 函数 $f(x) = \frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}} = \sqrt{x^2+4} + \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$, 设 $\sqrt{x^2+4} = t$, $t \geq 2$,

$y = t + \frac{1}{t}$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $t = 2$ 时, 取最大值 $\frac{5}{2}$, 故 C 正确;

对 D: $a+b = a+1+b+1-2 = [(a+1)+(b+1)](\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}) - 2$

$$= 1+1-2 + \frac{b+1}{a+1} + \frac{a+1}{b+1} \geq 2\sqrt{\frac{b+1}{a+1} \cdot \frac{a+1}{b+1}} = 2,$$

当且仅当 $a = b$ 时取得最小值为 2, 故 D 正确.

故选: BCD.

12. 若函数 $f(x)$ 在定义域 D 内的某区间 M 上单调递增, 且 $\frac{f(x)}{x}$ 在 M 上也单调递增, 则称 $f(x)$ 在 M 上

是“强增函数”, 则下列说法正确的是 ()

A. 若函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$, 则存在 M 使 $f(x)$ 是“强增函数”

B. 若函数 $f(x) = x^2 + x^3$, 则 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的“强增函数”

C. 若函数 $f(x) = 2^x$, 则存在区间 M , 使 $f(x)$ 在 M 上不是“强增函数”

D. 若函数 $f(x) = x^2 + (a-3)x + a$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上是“强增函数”, 则 $a = 1$

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据对勾函数的单调性结合“强增函数”的定义即可判断 A; 根据“强增函数”的定义举出反例即可判断 B; 根据“强增函数”的定义结合指数函数的单调性举例即可判断 C; 根据“强增函数”的定义结合二次函数和对勾函数的单调性即可判断 D.

【详解】对于 A, 由对勾函数的单调性可得函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, -1), (1, +\infty)$ 上为增函数,

而函数 $\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{x^2}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为增函数,

所以存在 M 使 $f(x)$ 是“强增函数”, 如 $M = (-\infty, -1)$, 故 A 正确;

对于 B, 因为 $f(0) = 0, f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$, 所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上不是增函数,

所以 $f(x)$ 不是定义在 $\mathbf{R}$ 上的“强增函数”, 故 B 错误;

对于 C, 函数 $f(x) = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

令 $g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{2^x}{x}$, 因为 $g\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{2}, g(1) = 2$,

所以函数 $g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上不是增函数,

故存在区间 M , 使 $f(x)$ 在 M 上不是“强增函数”, 如 $M = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, 故 C 正确;

对于 D, 若函数 $f(x) = x^2 + (a-3)x + a$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上是“强增函数”,

则函数 $y = f(x), y = \frac{f(x)}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上都是增函数,

由函数 $f(x) = x^2 + (a-3)x + a$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上是增函数,

得 $-\frac{a-3}{2} \leq 1$, 解得 $a \geq 1$,

因为函数 $y = \frac{f(x)}{x} = x + \frac{a}{x} + a - 3$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上是增函数,

当 $a = 0$ 时, $y = \frac{f(x)}{x} = x - 3$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上是增函数, 符合题意,

当 $a < 0$ 时, 因为函数 $y = x, y = \frac{a}{x} + a - 3$ 在 $[1, +\infty)$ 上都是增函数,

所以函数 $y = \frac{f(x)}{x} = x + \frac{a}{x} + a - 3$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上是增函数, 符合题意,

当 $a > 0$ 时, $y = \frac{f(x)}{x} = x + \frac{a}{x} + a - 3$,

由对勾函数得单调性可知函数 $y = \frac{f(x)}{x}$ 在 $[\sqrt{a}, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $\sqrt{a} \leq 1$, 所以 $0 < a \leq 1$,

综上所述, $a \leq 1$,

因为函数 $y = f(x), y = \frac{f(x)}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上都是增函数,

所以 $\begin{cases} a \geq 1 \\ a \leq 1 \end{cases}$, 所以 $a = 1$, 故 D 正确.

故选: ACD.

【点睛】方法点睛：“动轴定区间”型二次函数最值的方法：

- (1) 根据对称轴与区间的位置关系进行分类讨论；
- (2) 根据二次函数的单调性，分别讨论参数在不同取值下的最值，必要时需要结合区间端点对应的函数值进行分析；
- (3) 将分类讨论的结果整合得到最终结果.

三、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

13. 计算 $\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} + \pi^{\lg 1} + \log_2 \frac{2}{3} - \log_4 \frac{16}{9} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $\frac{4}{9}$

【解析】

【分析】直接利用指数对数的运算性质计算即可.

【详解】 $\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} + \pi^{\lg 1} + \log_2 \frac{2}{3} - \log_4 \frac{16}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3 \times \frac{2}{3}} + \pi^0 + \log_2 \frac{2}{3} - \log_2 \frac{4}{3}$
 $= \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1 + \log_2 \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}\right) = \frac{4}{9} + 1 - 1 = \frac{4}{9}.$

故答案为： $\frac{4}{9}.$

14. 已知扇形的面积为 4，圆心角为 2 弧度，则该扇形的弧长为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 4

【解析】

【详解】试题分析：设扇形半径为 r ，弧长为 l ，则 $\begin{cases} \frac{1}{2}lr = 4 \\ \frac{l}{r} = 2 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} l = 4 \\ r = 2 \end{cases}.$

考点：角的概念，弧度的概念.

15. 若函数 $f(x) = \log_2(x^2 - ax + 3a)$ 在区间 $[2, +\infty)$ 上是增函数，则实数 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $(-4, 4]$

【解析】

【分析】令 $t = x^2 - ax + 3a$ ，由题设易知 t 在 $[2, +\infty)$ 上为增函数且恒大于零，根据二次函数的性质列不等式组求 a 的取值范围.

【详解】由题设，令 $t = x^2 - ax + 3a$ ，而 $y = \log_2 t$ 为增函数，

$\therefore$ 要使 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上是增函数，即 $t = x^2 - ax + 3a$ 在 $[2, +\infty)$ 上为增函数且恒大于零，

$$\begin{cases} \frac{a}{2} \leq 2 \\ 4 + a > 0 \end{cases}, \text{ 可得 } -4 < a \leq 4,$$

$\therefore a$ 的取值范围是 $(-4, 4]$.

故答案为: $(-4, 4]$

16. 已知 $f(x)$, $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，其中 $f(x)$ 是偶函数， $g(x)$ 是奇函数，且 $f(x) + g(x) = x^2 + ax + 2$ ，

若对于 $\forall x_1, x_2 \in (-2, 1)$ ，都有 $\frac{x_2 g(x_2) - x_1 g(x_1)}{x_2 - x_1} < 1 (x_1 \neq x_2)$ 成立，则实数 a 的取值范围是_____.

【答案】 $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$

【解析】

【分析】根据题意结合函数奇偶性的定义可得 $g(x) = \frac{2ax}{2} = ax$ ，分析可知 $h(x) = xg(x) - x = ax^2 - x$ 在 $(-2, 1)$ 单调递减，分类讨论 a 的正负，结合二次函数性质运算求解.

【详解】因为 $f(x) + g(x) = x^2 + ax + 2$ ，则 $f(-x) + g(-x) = x^2 - ax + 2$ ，

又因为 $f(x)$ 是偶函数， $g(x)$ 是奇函数，则 $f(x) - g(x) = x^2 - ax + 2$ ，

解得: $g(x) = \frac{2ax}{2} = ax$ ，

因为对于 $\forall x_1, x_2 \in (-2, 1)$ ，都有 $\frac{x_2 g(x_2) - x_1 g(x_1)}{x_2 - x_1} < 1 (x_1 \neq x_2)$ ，

整理得 $\frac{[x_2 g(x_2) - x_2] - [x_1 g(x_1) - x_1]}{x_2 - x_1} < 0$ ，

可知 $h(x) = xg(x) - x = ax^2 - x$ 在 $(-2, 1)$ 单调递减，则有：

当 $a = 0$ 时， $h(x) = -x$ 满足题意；

当 $a > 0$ 时， $h(x) = ax^2 - x$ 开口向上，对称轴为 $x = \frac{1}{2a}$ ，

要满足题意，则 $\frac{1}{2a} \geq 1$ ，解得 $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ ；

当 $a < 0$ 时， $h(x) = ax^2 - x$ 开口向下，对称轴为 $x = \frac{1}{2a}$ ，

要满足题意，则 $\frac{1}{2a} \leq -2$ ，解得 $a \in \left[-\frac{1}{4}, 0\right)$ ；

综上所述， a 的取值范围为： $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ 。

故答案为： $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ 。

四、解答题（共 70 分）

17. 设全集 $U = \mathbf{R}$ ， $A = \left\{x \mid y = \log_2 \frac{3-x}{x+1}\right\}$ ， $B = [a-1, a+6]$ 。

(1) 当 $a=1$ 时，求 $A \cap B$ ， $(\complement_U A) \cup B$ ；

(2) 若“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充分不必要条件，求实数 a 的取值范围。

【答案】 (1) $A \cap B = \{x \mid 0 \leq x < 3\}$ ； $(\complement_U A) \cup B = \{x \mid x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 0\}$

(2) $\{a \mid -3 \leq a \leq 0\}$

【解析】

【分析】 (1) 解不等式 $\frac{3-x}{x+1} > 0$ 可得集合 A ，将 $a=1$ 代入解出集合 B ，根据集合基本运算即可求得结果；

(2) 根据题意可得集合 A 是集合 B 的真子集，根据集合间的基本关系即可求得实数 a 的取值范围。

【小问 1 详解】

令 $\frac{3-x}{x+1} > 0$ 可得 $(x-3)(x+1) < 0$ ，解得 $-1 < x < 3$ ，

所以 $A = \{x \mid -1 < x < 3\}$ ， $\complement_U A = \{x \mid x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 3\}$

当 $a=1$ 时， $B = [0, 7]$ ，

所以 $A \cap B = \{x \mid 0 \leq x < 3\}$ ，

$(\complement_U A) \cup B = \{x \mid x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 0\}$ 。

【小问 2 详解】

由“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充分不必要条件可得，集合 A 是集合 B 的真子集，

又 $A = \{x \mid -1 < x < 3\}$ ， $B = [a-1, a+6]$ ，

所以 $\begin{cases} a-1 \leq -1 \\ a+6 \geq 3 \end{cases}$ ，解得 $-3 \leq a \leq 0$ ，

故实数 a 的取值范围为 $\{a | -3 \leq a \leq 0\}$.

18. 已知 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 是关于 x 的方程 $x^2 - ax + a = 0 (a \in \mathbb{R})$ 的两个根.

(1) 求实数 a 的值,

(2) 求 $\frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin \theta - \cos \theta} + \frac{\sin \theta + \cos \theta}{1 - \tan^2 \theta}$ 的值.

【答案】(1) $a = 1 - \sqrt{2}$;

(2) $1 - \sqrt{2}$.

【解析】

【分析】(1) 计算 $\Delta = a^2 - 4a \geq 0$, 根据韦达定理得到 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = a^2 - 2a = 1$, 解得答案;

(2) 根据三角恒等变换化简得到原式为 $\sin \theta + \cos \theta$, 代入数据计算即可.

【小问 1 详解】

$\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 是关于 x 的方程 $x^2 - ax + a = 0 (a \in \mathbb{R})$ 的两个根,

$\Delta = a^2 - 4a \geq 0$, 解得 $a \geq 4$ 或 $a \leq 0$, 则 $\sin \theta + \cos \theta = a$, $\sin \theta \cos \theta = a$,

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)^2 - 2 \sin \theta \cos \theta = a^2 - 2a = 1$,

解得 $a = 1 - \sqrt{2}$ 或 $a = 1 + \sqrt{2}$ (舍), 故 $a = 1 - \sqrt{2}$;

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin \theta - \cos \theta} + \frac{\sin \theta + \cos \theta}{1 - \tan^2 \theta} &= \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta - \cos \theta} - \frac{(\sin \theta + \cos \theta) \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta - \cos \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = \frac{(\sin \theta - \cos \theta)(\sin \theta + \cos \theta)}{\sin \theta - \cos \theta} \\ &= \sin \theta + \cos \theta = a = 1 - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

19. 已知函数 $f(x) = ax^2 - (a+4)x + 4$.

(1) 解关于 x 的不等式 $f(x) < 0$;

(2) 若不等式 $f(x) < 0$ 有且仅有唯一整数解, 求实数 a 的取值范围.

【答案】(1) 答案见解析

(2) $\frac{4}{3} \leq a < 2$.

【解析】

【分析】(1) 由题得 $(x-1)(ax-4) < 0$ ，再对 a 进行分类讨论，利用一元二次不等式的解法，即可求出结果；

(2) 结合 (1) 中结果，得出符合条件的解集为 $\{x | 1 < x < \frac{4}{a}\}$ ，再结合条件，即可求出结果.

【小问 1 详解】

因为 $f(x) = ax^2 - (a+4)x + 4 = (x-1)(ax-4) < 0$,

所以当 $a = 0$ 时，解得 $x > 1$ ；

当 $a < 0$ 时，解得 $x < \frac{4}{a}$ 或 $x > 1$ ；

当 $0 < a < 4$ 时，解得 $1 < x < \frac{4}{a}$ ；

当 $a = 4$ 时，不等式无解；

当 $a > 4$ 时，解得 $\frac{4}{a} < x < 1$ ；

综上所述，当 $a = 0$ 时，不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $\{x | x > 1\}$ ；

当 $a < 0$ 时，不等式的解集为 $\{x | x < \frac{4}{a} \text{ 或 } x > 1\}$ ；

当 $0 < a < 4$ 时，不等式的解集为 $\{x | 1 < x < \frac{4}{a}\}$ ；

当 $a = 4$ 时，不等式的解集为 $\emptyset$ ；

当 $a > 4$ 时，不等式的解集为 $\{x | \frac{4}{a} < x < 1\}$ 。

【小问 2 详解】

由 (1) 知，当 $a \leq 0$ 或 $a \geq 4$ 时不符合题意；

当 $0 < a < 4$ 时，解集为 $\{x | 1 < x < \frac{4}{a}\}$ ，则 $2 < \frac{4}{a} \leq 3$ ，解得 $\frac{4}{3} \leq a < 2$ ，

所以 $\frac{4}{3} \leq a < 2$ 。

20. 杭州亚运会田径比赛 10 月 5 日迎来收官，在最后两个竞技项目男女马拉松比赛中，中国选手何杰以 2 小时 13 分 02 秒夺得男子组冠军，这是中国队亚运史上首枚男子马拉松金牌. 人类长跑运动一般分为两个阶段，第一阶段为前 1 小时的稳定阶段，第二阶段为疲劳阶段. 现一 60kg 的复健马拉松运动员进行 4 小时长跑训练，假设其稳定阶段作速度为 $v_1 = 30\text{km/h}$ 的匀速运动，该阶段每千克体重消耗体力 $\Delta Q_1 = t_1 \times 2v_1$ (t_1 表示该阶段所用时间)，疲劳阶段由于体力消耗过大变为 $v_2 = 30 - 10t_2$ 的减速运动 (t_2 表示该阶段所

用时间) .疲劳阶段速度降低, 体力得到一定恢复, 该阶段每千克体重消耗体力 $\Delta Q_2 = \frac{t_2 \times 2v_2}{t_2 + 1}$, 已知该运

动员初始体力为 $Q_0 = 10000 \text{ kJ}$, 不考虑其他因素, 所用时间为 t (单位: h), 请回答下列问题:

(1) 请写出该运动员剩余体力 Q 关于时间 t 的函数 $Q(t)$;

(2) 该运动员在 4 小时内何时体力达到最低值, 最低值为多少?

【答案】(1) $Q(t) = \begin{cases} 10000 - 3600t, & 0 < t \leq 1 \\ 400 + 1200t + \frac{4800}{t}, & 1 < t \leq 4 \end{cases}$

(2) $t = 2$ 时有最小值, 最小值为 5200 kJ .

【解析】

【分析】(1) 先写出速度 v 关于时间 t 的函数, 进而求出剩余体力 Q 关于时间 t 的函数;

(2) 分 $0 < t \leq 1$ 和 $1 < t \leq 4$ 两种情况, 结合函数单调性, 结合基本不等式, 求出最值.

【小问 1 详解】

由题可先写出速度 v 关于时间 t 的函数 $v(t) = \begin{cases} 30, & 0 < t \leq 1 \\ 30 - 10(t-1), & 1 < t \leq 4 \end{cases}$,

代入 ΔQ_1 与 ΔQ_2 公式可得 $Q(t) = \begin{cases} 10000 - 60 \cdot t \cdot 2 \times 30, & 0 < t \leq 1 \\ 6400 - \frac{60(t-1) \cdot 2[30 - 10(t-1)]}{t-1+1}, & 1 < t \leq 4 \end{cases}$

解得 $Q(t) = \begin{cases} 10000 - 3600t, & 0 < t \leq 1 \\ 400 + 1200t + \frac{4800}{t}, & 1 < t \leq 4 \end{cases}$;

【小问 2 详解】

①稳定阶段中 $Q(t)$ 单调递减, 此过程中 $Q(t)$ 最小值 $Q(t)_{\min} = Q(1) = 6400 \text{ kJ}$;

②疲劳阶段 $Q(t) = 400 + 1200t + \frac{4800}{t} (1 < t \leq 4)$,

则有 $Q(t) = 400 + 1200t + \frac{4800}{t} \geq 400 + 2\sqrt{1200 \times 4800} = 5200 \text{ kJ}$,

当且仅当 $1200t = \frac{4800}{t}$, 即 $t = 2$ 时, “=”成立,

所以疲劳阶段中体力最低值为 5200 kJ ,

由于 $5200 < 6400$, 因此, 在 $t = 2 \text{ h}$ 时, 运动员体力有最小值 5200 kJ .

21. 设函数 $f(x) = k \cdot 2^x - 2^{-x}$ 是定义 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

(1) 求 k 的值;

(2) 若不等式 $f(x) > a \cdot 2^x - 1$ 有解, 求实数 a 的取值范围;

(3) 设 $g(x) = 4^x + 4^{-x} - 4f(x)$, 求 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最小值.

【答案】(1) $k=1$

(2) $a < \frac{5}{4}$

(3) -2

【解析】

【分析】(1) 借助奇函数的性质计算即可得;

(2) $f(x) > a \cdot 2^x - 1$ 有解, 即 $a < \left[-\left(\frac{1}{2^x}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^x}\right) + 1 \right]_{\max}$, 求出 $\left[-\left(\frac{1}{2^x}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^x}\right) + 1 \right]_{\max}$ 即可得;

(3) 使用换元法, 令 $t = 2^x - 2^{-x}$, 结合函数性质即可得.

【小问 1 详解】

因为 $f(x) = k \cdot 2^x - 2^{-x}$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

所以 $f(0) = 0$, 所以 $k - 1 = 0$, 解得 $k = 1$, $f(x) = 2^x - 2^{-x}$,

当 $k = 1$ 时, $f(-x) = 2^{-x} - 2^x = -f(x)$, 则 $f(x)$ 为奇函数,

故 $k = 1$;

【小问 2 详解】

$f(x) > a \cdot 2^x - 1$ 有解, 即 $a < -\left(\frac{1}{2^x}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^x}\right) + 1$ 有解,

所以 $a < \left[-\left(\frac{1}{2^x}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^x}\right) + 1 \right]_{\max}$,

因为 $-\left(\frac{1}{2^x}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^x}\right) + 1 = -\left(\frac{1}{2^x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \leq \frac{5}{4}$, ($x = 1$ 时, 等号成立),

所以 $a < \frac{5}{4}$;

【小问 3 详解】

$g(x) = 4^x + 4^{-x} - 4f(x)$, 即 $g(x) = 4^x + 4^{-x} - 4(2^x - 2^{-x})$,

可令 $t = 2^x - 2^{-x}$, 可得函数 t 在 $[1, +\infty)$ 递增, 即 $t > \frac{3}{2}$,

$t^2 = 4^x + 4^{-x} - 2$, 可得函数 $h(t) = t^2 - 4t + 2$, $t > \frac{3}{2}$,

由 $g(t)$ 的对称轴为 $t = 2 > \frac{3}{2}$, 可得 $t = 2$ 时, $g(t)$ 取得最小值 -2 ,

此时 $2 = 2^x - 2^{-x}$, 解得 $x = \log_2(1 + \sqrt{2})$,

则 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最小值为 -2 , 此时 $x = \log_2(1 + \sqrt{2})$.

22. 若函数 $y = f(x)$ 对定义域内的每一个值 x_1 , 在其定义域内都存在唯一的 x_2 , 使 $f(x_1) + f(x_2) = 1$ 成立, 则称该函数为“和一函数”.

(1) 判断定义在区间 $[1, +\infty)$ 上的函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 是否为“和一函数”, 并说明理由;

(2) 若函数 $g(x) = \log_4 x$ 在定义域 $[a, b]$ 上是“和一函数”.

①求 ab 的值;

②求 $2b - a$ 的取值范围.

【答案】(1) 不是“和一函数”; 理由见解析

(2) ① $ab = 4$; ② $(2, +\infty)$.

【解析】

【分析】(1) 举出反例即可;

(2) ①根据函数单调性得到 $g(x) \in [\log_4 a, \log_4 b]$, 对任意 $x_1 \in [a, b]$, $g(x_1) \in [\log_4 a, \log_4 b]$, 存在 $x_2 \in [a, b]$, 使 $g(x_1) + g(x_2) = 1$ 成立, 则 $g(x_2) = 1 - g(x_1) \in [1 - \log_4 b, 1 - \log_4 a]$, 根据集合包含关系得到 $\log_4 a + \log_4 b = 1$, 则 $ab = 4$, ②表达出 $2b - a = \frac{8}{a} - a$, $0 < a < 2$, 由对勾函数单调性得到取值范围.

【小问 1 详解】

在区间 $[1, +\infty)$ 上的函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 不是“和一函数”, 理由如下:

$\because f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $x \in [1, +\infty)$ 上是减函数,

$\therefore f(x) \in (0, 1]$,

当 $f(1) = 1$ 时, 对任意 $x \in [1, +\infty)$, $f(1) + f(x) \neq 1$, 不符合“和一函数”的定义,

故在区间 $[1, +\infty)$ 上的函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 不是“和一函数”;

【小问 2 详解】

① $\because g(x)$ 在 $[a, b]$ 上是增函数,

$$\therefore g(x) \in [\log_4 a, \log_4 b],$$

$$\therefore \text{值域 } B = [\log_4 a, \log_4 b],$$

又 $g(x) = \log_4 x$ 在定义域 $[a, b] (a > 0)$ 上是“和一函数”，

$\therefore$ 对任意 $x_1 \in [a, b]$, $g(x_1) \in [\log_4 a, \log_4 b]$, 存在 $x_2 \in [a, b]$, 使 $g(x_1) + g(x_2) = 1$ 成立,

$$\text{则 } g(x_2) = 1 - g(x_1) \in [1 - \log_4 b, 1 - \log_4 a],$$

$$A = [1 - \log_4 b, 1 - \log_4 a], \text{ 则 } B \subseteq A,$$

$$\text{则 } \begin{cases} 1 - \log_4 b \leq \log_4 a \\ 1 - \log_4 a \geq \log_4 b \end{cases}, \text{ 即 } 1 \leq \log_4 a + \log_4 b \leq 1,$$

$$\therefore \log_4 a + \log_4 b = 1, \text{ 则 } ab = 4,$$

$$\textcircled{2} ab = 4, \text{ 即 } b = \frac{4}{a},$$

$$\therefore b > a > 0,$$

$$\therefore \frac{4}{a} > a > 0, \text{ 解得 } 0 < a < 2,$$

$$\text{则 } 2b - a = \frac{8}{a} - a,$$

$$\text{令 } h(a) = \frac{8}{a} - a, \quad a \in (0, 2),$$

$$\therefore y = \frac{8}{a} \text{ 在 } (0, 2) \text{ 上是减函数, } y = -a \text{ 在 } (0, 2) \text{ 上是减函数,}$$

$$\therefore h(a) \text{ 在 } (0, 2) \text{ 上是减函数, 则 } h(a) > h(2) = 2,$$

$$\therefore 2b - a > 2,$$

故 $2b - a$ 的取值范围为 $(2, +\infty)$.

【点睛】 方法点睛：函数新定义问题的方法和技巧：

- (1) 可通过举例子的方式，将抽象的定义转化为具体的简单的应用，从而加深对信息的理解；
- (2) 可用自己的语言转述新信息所表达的内容，如果能清晰描述，那么说明对此信息理解的较为透彻；
- (3) 发现新信息与所学知识的联系，并从描述中体会信息的本质特征与规律；
- (4) 如果新信息是课本知识的推广，则关注此信息与课本中概念的不同之处，以及什么情况下可以使用书上的概念.