

宜兴中学、泰兴中学、泰州中学 2023-2024 学年秋学期联合质量检测

数学学科试卷

考试时间：120 分钟

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $M = \{x | -2 < x < 6\}$ ，集合 $N = \{0, 2, 4, 6\}$ ，则 $M \cap N$ 的子集个数为 ()

- A. 3 B. 4 C. 7 D. 8

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -\sin x, & x < 0 \\ \frac{1}{x^2}, & x \geq 0 \end{cases}$ ，则 $f\left[f\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$ 的值为 ()

- A. 4 B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

3. 下表是某次测量中两个变量 x, y 的一组数据，若将 y 表示为关于 x 的函数，则最可能的函数模型是

x	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0.63	1.01	1.26	1.46	1.63	1.77	1.89	1.99

- A. 一次函数模型 B. 二次函数模型 C. 指数函数模型 D. 对数函数模型

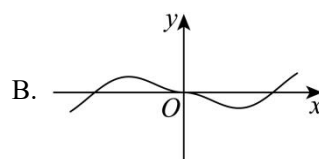
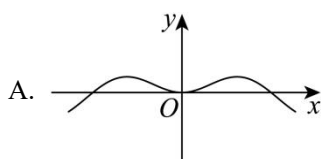
4. 不等式 $x^2 - x - m > 0$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 上恒成立的一个必要不充分条件是 ()

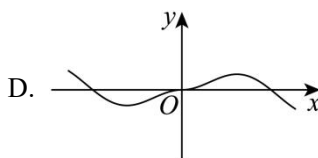
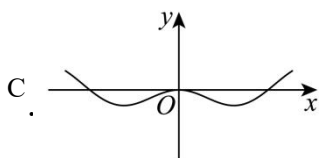
- A. $m \leq -\frac{1}{4}$ B. $m < -\frac{1}{4}$
C. $m < -\frac{1}{2}$ D. $-1 < m < -\frac{1}{2}$

5. 已知 $\sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{1}{2}$ ，则 $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{1 - \tan(-\alpha)}$ 的值为 ()

- A. $-\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $-\frac{3}{16}$ D. $\frac{3}{16}$

6. 函数 $f(x) = \frac{1-2^x}{1+2^x} \cdot \sin x$ ($-4 \leq x \leq 4$) 的图象大致形状是 ()





7. 设 $a = 16^{0.3}$, $b = \log_2 3$, $c = \log_3 4$, 则 ()

A. $a > b > c$

B. $c > b > a$

C. $a > c > b$

D. $b > a > c$

8. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + a, & x < 1 \\ 4(x+a)(x+2a), & x \geq 1 \end{cases}$, 若 $f(x)$ 恰有 2 个零点, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $\left[-2, -\frac{1}{2}\right]$

B. $(-\infty, -2] \cup \left(-1, -\frac{1}{2}\right]$

C. $(-\infty, -1)$

D. $[-2, +\infty)$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，在每小题给出的四个选项号，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9. 下列说法正确的有 ()

A. 已知角 α 的终边经过点 $P(-2, 4)$, 则函数 $\sin \alpha - \cos \alpha$ 的值等于 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

B. 幂函数 $y = x^\alpha$ ($\alpha > 0$) 的图象始终经过点 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$

C. “ $a > 3$ 且 $b > 3$ ”是“ $ab > 9$ ”的充分不必要条件

D. 若函数 $f(x) = \log_3 x$, 则 $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 有 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$

10. 下列函数中最大值为 1 的有 ()

A. $y = x^2 + \frac{1}{4x^2}$

B. $y = x + \frac{1}{x-3}, x < 3$

C. $y = \frac{2e^x}{e^{2x} + 1}, x > 0$

D. $y = 2x\sqrt{1-x^2}, x \in [0, 1]$

11. 质点 P 和 Q 在以坐标原点 O 为圆心，半径为 1 的圆 O 上逆时针作匀速圆周运动，同时出发. P 的角速度大小为 2rad/s , 起点为圆 O 与 x 轴正半轴的交点, Q 的角速度大小为 5rad/s , 起点为角 $-\frac{\pi}{3}$ 的终边与圆 O 的交点, 则当 Q 与 P 重合时, Q 的坐标可以为 ()

A. $\left(\cos \frac{2\pi}{9}, \sin \frac{2\pi}{9}\right)$

B. $\left(\cos \frac{\pi}{9}, -\sin \frac{\pi}{9}\right)$

C. $\left(-\cos \frac{5\pi}{9}, -\sin \frac{5\pi}{9}\right)$

D. $\left(-\cos \frac{\pi}{9}, \sin \frac{\pi}{9}\right)$

12. 已知 x_0 是函数 $f(x) = e^x + 2x - 4$ 的零点 (其中 $e = 2.71828 \dots$ 为自然对数的底数), 则下列说法正确的有 ()

A. $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

B. $\ln(4 - 2x_0) = x_0$

C. $x_0^{2-x_0} > 1$

D. $2x_0 + 1 - e^{-x_0} > 0$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知某扇形的周长为 9, 圆心角为 1rad , 则该扇形的面积是_____.

14. 若 $\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \theta\right) = -\frac{2}{3}, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值为_____.

15. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且 $f(x) = -f(x-2)$, 当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) = 3^x - 2$, 则 $f(\log_3 36) =$ _____.

16. 不等式 $x^2 - x - 2 < \ln(x+2) - 2\ln x$ 的解集为_____.

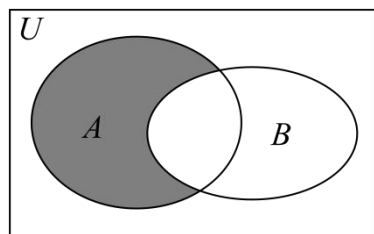
四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 计算:

(1) $0.125^{\frac{1}{3}} + \sqrt{(-2)^6} + \pi^0 + \sin \frac{2023}{6} \pi$;

(2) 设 $2^a = 3^b = 18$, 求 $\frac{2a+b}{ab}$.

18. 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 8 \leq 0\}, B = \left\{x | \frac{x-2}{x+6} \geq 0\right\}$.



(1) 求图中阴影部分表示的集合;

(2) 已知集合 $C = \{x | 10 - a < x < 2a + 1\}$, 若 $(\complement_U B) \cap C = \emptyset$, 求 a 的取值范围.

19. 已知角 α 满足 $\cos \alpha + 3\sin \alpha = 0$.

(1) 若 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, 求 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 的值;

(2) 若角 β 的终边与角 α 的终边关于 x 轴对称, 求 $\frac{\sin \beta - 3 \cos \beta}{2 \sin \beta + \cos \beta}$ 的值.

20. 据烈一辆城际列车满载时为 550 人, 人均票价为 4 元, 十分适合城市间的运营. 城际铁路运营公司通过一段时间的营业发现, 每辆列车的单程营业额 Y (元) 与发车时间间隔 t (分钟) 相关; 当间隔时间到达或超过 12 分钟后, 列车均为满载状态; 当 $8 \leq t \leq 12$ 时, 单程营业额 Y 与 $4t - \frac{60}{t} + 12$ 成正比; 当 $5 \leq t \leq 8$ 时, 单程营业额会在 $t = 8$ 时的基础上减少, 减少的数量为 $40(8 - t)^2$.

(1) 求当 $5 \leq t \leq 12$ 时, 单程营业额 Y 关于发车间隔时间 t 的函数表达式;

(2) 由于工作日和节假日的日运营时长不同, 据统计每辆车日均 $\frac{120}{t}$ 次单程运营. 为体现节能减排, 发车间隔时间 $t \in [8, 12]$, 则当发车时间间隔为多少分钟时, 每辆列车的日均营业总额 R 最大? 求出该最大值.

21. 已知函数 $f(x) = \log_3(9^x + 1) + kx$ 为偶函数.

(1) 求实数 k 的值;

(2) 设 $g(x) = \log_3(a \cdot 3^x + a)$ ($a \neq 0$), 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有 2 个不同的公共点, 求实数 a 的取值范围.

22. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

(1) 利用函数单调性的定义, 证明: $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是增函数;

(2) 已知 $F(x) = 4f^2(x) - 4mf(x) + 9$, 其中 m 是大于 1 的实数, 当 $x \in [0, \ln m]$ 时, $F(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围;

(3) 当 $a \geq 0$, 判断 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 与 $af(x) + (1 - a)$ 的大小, 并注明你的结论.