

2023-2024 学年度秋学期 12 月学情调研试卷

高一数学

总分：150 时间 120 分钟

一、单选题（本大题共 8 小题，共 40.0 分.在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 已知角 $\alpha = 2023^\circ$ ，则 α 的终边在（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】C

【解析】

【分析】利用角终边相同公式得到 α 的终边与 223° 的终边相同，从而得到 α 的终边所在象限.

【详解】因为 $\alpha = 2023^\circ = 360^\circ \times 5 + 223^\circ$ ，而 $180^\circ < 223^\circ < 270^\circ$ ，

所以 α 的终边在第三象限.

故选：C.

2. 函数 $f(x) = \sqrt{3x-2} + \frac{1}{x-1}$ 的定义域为（ ）

- A. $\left\{x \mid x > \frac{1}{3} \text{ 且 } x \neq 1\right\}$ B. $\left\{x \mid x < \frac{2}{3} \text{ 或 } x > 1\right\}$
C. $\left\{x \mid \frac{2}{3} \leq x \leq 1\right\}$ D. $\left\{x \mid x \geq \frac{2}{3} \text{ 且 } x \neq 1\right\}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据根号下大于等于 0 和分母不等于 0 可列不等式组，解出即可.

【详解】由题意得 $\begin{cases} 3x-2 \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$ ，解得 $x \geq \frac{2}{3}$ 且 $x \neq 1$ ，即定义域为 $\left\{x \mid x \geq \frac{2}{3} \text{ 且 } x \neq 1\right\}$ ，

故选：D.

3. “ $2^x > 4$ ”是“ $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$ ”的（ ）

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】由 $2^x > 4 \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$ ，但由 $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$ ，当 $x < 0$ 时， $2^x < 4$ ，故“ $2^x > 4$ ”是“ $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$ ”的充分不必要条件。

【详解】 $2^x > 4 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$ ，所以“ $2^x > 4$ ”是“ $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$ ”的充分条件；

又 $\frac{1}{x} < \frac{1}{2} \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ ，当 $x \in (-\infty, 0)$ 时， $2^x < 4$ ，所以“ $2^x > 4$ ”是“ $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$ ”的不必要条件；

故选：A

4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 3-2x, & x \geq -1 \\ x-4, & x < -1 \end{cases}$ ，若 $f(x) = 1$ ，则 $x =$ ()

A. 5

B. 1或-5

C. 1

D. 1或5

【答案】C

【解析】

【分析】分别在 $x \geq -1$ 和 $x < -1$ 的情况下令 $f(x) = 1$ ，解方程可求得结果。

【详解】当 $x \geq -1$ 时， $f(x) = 3 - 2x = 1$ ，解得： $x = 1$ ；

当 $x < -1$ 时， $f(x) = x - 4 = 1$ ，解得： $x = 5$ （舍）；

综上所述： $x = 1$ 。

故选：C。

5. 已知 $0 < x < 1$ ，若 $a = \log_2 x$, $b = 2^x$, $c = x^2$ ，则 a, b, c 的大小关系为 ()

A. $a < b < c$

B. $a < c < b$

C. $c < a < b$

D. $c < b < a$

【答案】B

【解析】

【分析】根据指数函数对数函数及幂函数的性质，分别求出 a, b, c 的范围，即可判断 a, b, c 的大小关系。

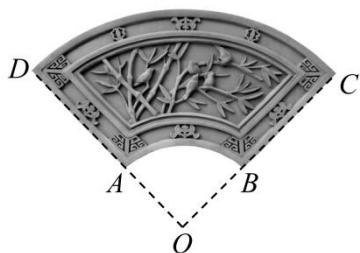
【详解】当 $0 < x < 1$ 时， $\log_2 x < 0$, $2^x > 1$, $0 < x^2 < 1$ ，

故 $a < c < b$ ，

故选：B。

6. 砖雕是我国古建筑雕刻中的重要艺术形式，传统砖雕精致细腻、气韵生动、极富书卷气。如图所示，一扇环形砖雕，可视为将扇形 OCD 截去同心扇形 OAB 所得图形，已知

$OA = 0.2\text{m}$, $AD = 0.3\text{m}$, $\angle AOB = 100^\circ$, 则该扇环形砖雕的面积为 () m^2 .



- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{12}$ C. $\frac{7\pi}{60}$ D. $\frac{7\pi}{120}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据扇形的面积公式即可求解.

【详解】由 $100^\circ = \frac{5\pi}{9}$ 以及扇形的面积公式可

$$\text{得: } S_{\text{扇环}ABCD} = S_{\text{扇}COD} - S_{\text{扇}AOB} = \frac{1}{2}OD^2 \times \frac{5\pi}{9} - \frac{1}{2}OA^2 \times \frac{5\pi}{9} = \frac{1}{2} \times \frac{5\pi}{9} (0.5^2 - 0.2^2) = \frac{7\pi}{120},$$

故选: D

7. 设 a 为实数, 若关于 x 的不等式 $x^2 - ax + 7 \geq 0$ 在区间 $(2, 7)$ 上有实数解, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 8)$ B. $(-\infty, 8]$ C. $(-\infty, 2\sqrt{7})$ D. $(-\infty, \frac{11}{2})$

【答案】A

【解析】

【分析】参变分离, 再根据对勾函数的性质, 结合能成立问题求最值即可.

【详解】由题意, 因为 $x \in (2, 7)$, 故 $a \leq x + \frac{7}{x}$ 在区间 $(2, 7)$ 上有实数解, 则 $a < \left(x + \frac{7}{x}\right)_{\max}$, 又 $g(x) = x + \frac{7}{x}$

在 $(2, \sqrt{7})$ 上单调递减, 在 $(\sqrt{7}, 7)$ 上单调递增, 且 $g(2) = 2 + \frac{7}{2} = \frac{11}{2}$, $g(7) = 7 + \frac{7}{7} = 8 > g(2)$, 故

$\left(x + \frac{7}{x}\right) < 8$. 故 $a \leq x + \frac{7}{x}$ 在区间 $(2, 7)$ 上有实数解则 $a < 8$.

故选: A

8. 设 m 是不为 0 的实数, 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 3^x - 1, & x \leq 2 \\ x^2 - 10x + 24, & x > 2 \end{cases}$, 若函数 $F(x) = 2(f(x))^2 - mf(x)$ 有 7

个零点, 则 m 的取值范围是 ()

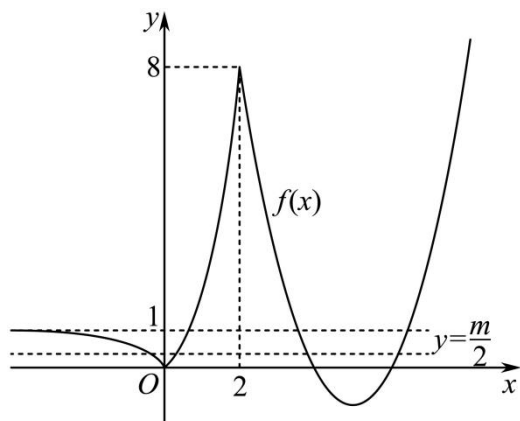
- A. $(-2, 0) \cup (0, 16)$ B. $(0, 16)$ C. $(0, 2)$ D. $(-2, 0) \cup (0, +\infty)$

【答案】C

【解析】

【分析】作出 $f(x)$ 的图象，然后由 $F(x)=0$ ，得 $f(x)=0$ 或 $2f(x)-m=0$ ，由图象可知 $f(x)$ 有 3 个零点，所以 $2f(x)-m=0$ 就有 4 个零点，再结合图象可求出结果.

【详解】 $f(x)$ 的图象如图所示



由 $F(x)=f(x)(2f(x)-m)=0$ ，得 $f(x)=0$ 或 $2f(x)-m=0$ ，

当 $f(x)=0$ 时， $f(x)$ 有 3 个零点，

当 $2f(x)-m=0$ 时， $f(x)=\frac{m}{2}$ ，即 $y=f(x)$ 与 $y=\frac{m}{2}$ 有 4 个交点，

所以 $0 < \frac{m}{2} < 1$ ，解得 $0 < m < 2$ ，

故选：C

二、多项选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，错选得 0 分，漏选得 2 分）

9. 下列不等式中正确的有（ ）

A. 若 $a > b$ ，则 $ac^2 > bc^2$

B. 若 $ab > 0$ ，则 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

C. 若 $a > |b|$ ，则 $a > b$

D. 若 $a > b > c$ ，则 $\frac{1}{b-c} > \frac{1}{a}$

【答案】BC

【解析】

【分析】利用特殊值法可判断 AD 选项；利用基本不等式可判断 B 选项；利用不等式的性质可判断 C 选项.

【详解】对于 A 选项，当 $c=0$ 时， $ac^2=bc^2$ ，A 错；

对于 B 选项, $ab > 0$, 则 $\frac{a}{b} > 0$, $\frac{b}{a} > 0$, 由基本不等式可得 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2$,

当且仅当 $a = b \neq 0$ 时, 等号成立, B 对;

对于 C 选项, 因为 $a > |b| \geq b$, 则 $a > b$, C 对;

对于 D 选项, 取 $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$, 则 $\frac{1}{b-c} = \frac{1}{a}$, D 错.

故选: BC.

10. 下列选项正确的是 ()

A. $\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \cos\alpha$

B. $\frac{1}{12}\pi \text{rad} = 15^\circ$

C. 若一扇形弧长为 2, 圆心角为 60° , 则该扇形的面积为 $\frac{6}{\pi}$

D. 若 α 终边上有一点 $P(-4, -3)$, 则 $\sin\alpha = \frac{4}{5}$

【答案】BC

【解析】

【分析】由诱导公式可得 A 错误; 利用弧度值与角度制互化可知 B 正确; 根据扇形弧长及面积公式可知 C 正确; 由三角函数定义可得 D 错误.

【详解】对于 A, 由诱导公式可知 $\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha$, 即 A 错误;

对于 B, 由弧度值与角度制互化可得 $\frac{1}{12}\pi \text{rad} = \left(\frac{\pi}{12} \times \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 15^\circ$, 即 B 正确;

对于 C, 易知扇形半径为 $r = \frac{2}{\frac{\pi}{3}} = \frac{6}{\pi}$, 所以扇形面积为 $\frac{1}{2} \times 2 \times \frac{6}{\pi} = \frac{6}{\pi}$, 即 C 正确;

对于 D, 若 α 终边上有一点 $P(-4, -3)$, 利用三角函数定义可知 $\sin\alpha = \frac{-3}{\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}} = -\frac{3}{5}$, 所以 D 错

误.

故选: BC

11. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 则下列结论正确的是 ()

A. $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减

B. $f(x)$ 最多一个零点

C. $f(\log_{0.5} 3) > f(\log_2 5)$

D. 若实数 a 满足 $f(2^a) > f(-\sqrt{2})$, 则 $a < \frac{1}{2}$

【答案】ACD

【解析】

【分析】A. 由偶函数在对称区间上的单调性判断; B. 举例判断; C. 由偶函数得到 $f(\log_{0.5} 3) = f(\log_2 3)$, 再利用单调性判断; D. 由偶函数得到 $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2})$, 再利用单调性求解判断;

【详解】因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故 A 正确;

如 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} |x|$, 令 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} |x| = 0$, 得 $x = 1$ 或 $x = -1$, 函数有 2 个零点, 故 B 错误;

由偶函数得到 $f(\log_{0.5} 3) = f(\log_2 3)$,

因为 $\log_2 3 < \log_2 5$, 所以 $f(\log_2 3) > f(\log_2 5)$, 故 C 正确;

若实数 a 满足 $f(2^a) > f(-\sqrt{2})$, 即 $f(2^a) > f(\sqrt{2})$, 则 $2^a < \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, 解得 $a < \frac{1}{2}$, 故 D 正确;

故选: ACD

12. 已知 $\theta \in (0, \pi)$, $\sin \theta - \cos \theta = \frac{17}{13}$, 则下列结论正确的是 ()

A. $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

B. $\cos \theta = -\frac{12}{13}$

C. $\tan \theta = -\frac{5}{12}$

D. $\frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = -\frac{60}{169}$

【答案】AD

【解析】

【分析】对于 A, 由已知等式可判断 $\cos \theta < 0$, 从而可判断出 θ 的范围, 对于 BC, 由已知条件结合 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 可求出 $\sin \theta, \cos \theta$, 从而可求出 $\tan \theta$ 的值, 对于 D, 将 $\tan \theta$ 的值代入计算即可.

【详解】对于 A, 由题设 $\cos \theta = \sin \theta - \frac{17}{13} < 1 - \frac{17}{13} = -\frac{4}{13} < 0 \Rightarrow \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 故 A 正确;

对于 BC, 因为 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, $\sin \theta - \cos \theta = \frac{17}{13}$,

所以 $\cos^2 \theta + \left(\cos \theta + \frac{17}{13}\right)^2 = 1$, 化简得 $169 \cos^2 \theta + 221 \cos \theta + 60 = 0$,

解得 $\cos \theta = -\frac{5}{13}$ 或 $\cos \theta = -\frac{12}{13}$,

当 $\cos \theta = -\frac{5}{13}$ 时, $\sin \theta = \frac{17}{13} + \cos \theta = \frac{17}{13} - \frac{5}{13} = \frac{12}{13}$, 则 $\tan \theta = -\frac{12}{5}$

当 $\cos \theta = -\frac{12}{13}$ 时, $\sin \theta = \frac{17}{13} + \cos \theta = \frac{17}{13} - \frac{12}{13} = \frac{5}{13}$, 则 $\tan \theta = -\frac{5}{12}$,

所以 B, C 错误;

对于 D, 由前面的解析可知, 当 $\tan \theta = -\frac{12}{5}$ 时, $\frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{-\frac{12}{5}}{1 + \left(-\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{-\frac{12}{5}}{\frac{169}{25}} = -\frac{60}{169}$,

当 $\tan \theta = -\frac{5}{12}$ 时, $\frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{-\frac{5}{12}}{1 + \left(-\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{-\frac{5}{12}}{\frac{169}{144}} = -\frac{60}{169}$,

综上 $\frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = -\frac{60}{169}$, 所以 D 正确,

故选: AD.

三、填空题: (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 函数 $f(x) = \log_a(x-3) + 1$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 恒过定点_____.

【答案】(4,1)

【解析】

【分析】令 $x = 4$ 即可得到定点坐标.

【详解】当 $x = 4$ 时, $y = 1$, 故恒过定点为(4,1),

故答案为: (4,1).

14. 已知 $\tan \alpha = 2$, 则 $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】化弦为切齐次化计算即可.

【详解】 $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 1}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 1} = \frac{\tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 1} = \frac{2 - 1}{2 + 1} = \frac{1}{3}$.

故答案为: $\frac{1}{3}$

15. 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{1}{2}$, 则 $\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\alpha\right)=$ _____.

【答案】 $-\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 利用整体法与诱导公式将 $\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\alpha\right)$ 转化为 $-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$, 从而得解.

【详解】 因为 $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{1}{2}$,

所以 $\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\alpha\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=-\frac{1}{2}$.

故答案为: $-\frac{1}{2}$.

16. 已知函数 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+1}-\ln|x|$, 则满足不等式 $f(\log_2 x)<\frac{1}{9}$ 的 x 的取值范围是_____.

【答案】 $\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$

【解析】

【分析】 先判断函数的奇偶性和单调性, 然后利用奇偶性的性质和单调性解不等式即可.

【详解】 函数的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$,

因为 $f(-x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{(-x)^2+1}-\ln|-x|=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+1}-\ln|x|=f(x)$,

所以 $f(x)$ 为偶函数,

当 $x>0$ 时, $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+1}-\ln x$,

因为 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+1}$ 和 $y=-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上均单调递减,

所以 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+1}-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,

因为 $f(1) = \frac{1}{9}$,

所以 $f(\log_2 x) < \frac{1}{9}$, 可化为 $f(\log_2 x) < f(1)$,

所以 $f(\log_2 x) = f(|\log_2 x|) < f(1)$,

所以 $|\log_2 x| > 1$, 则 $\log_2 x < -1$ 或 $\log_2 x > 1$,

所以 $0 < x < \frac{1}{2}$ 或 $x > 2$,

所以不等式的解集为 $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$,

故答案为: $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$.

四、解答题 (本大题共 6 个大题, 共 70 分, 应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

17. 已知 α 是第三象限角, 且 $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$.

(1) 求 $\tan \alpha$ 的值;

$$(2) \frac{\sin(\pi + \alpha) + \cos(\pi - \alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}.$$

【答案】(1) $\tan \alpha = \frac{3}{4}$

(2) -7

【解析】

【分析】(1) 由 $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, 求出 $\cos \alpha$, 从而可求出 $\tan \alpha$ 的值;

(2) 利用诱导公式化简后, 再代值计算即可.

【小问 1 详解】

由 α 是第三象限角且 $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ 得 $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{4}{5}$,

所以 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}$;

【小问 2 详解】

$$\text{原式} = \frac{-\sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\frac{3}{5} + \frac{4}{5}}{-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}} = \frac{\frac{7}{5}}{-\frac{1}{5}} = -7.$$

18. 计算

$$(1) (0.064)^{-\frac{1}{3}} - \left(-\frac{7}{8}\right)^0 + [(-2)^3]^{-\frac{4}{3}} + 16^{-0.25}$$

$$(2) \left| \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} - \lg 5 \right| + \sqrt{\lg^2 2 - \lg 4 + 1} - 3^{-\log_3 2}$$

【答案】18. $\frac{33}{16}$

19. 1

【解析】

【分析】(1) 利用指数运算法则计算出答案；

(2) 利用指数运算和对数运算法则得到答案.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned} (0.064)^{-\frac{1}{3}} - \left(-\frac{7}{8}\right)^0 + [(-2)^3]^{-\frac{4}{3}} + 16^{-0.25} &= \left[\left(\frac{4}{10}\right)^3\right]^{-\frac{1}{3}} - 1 + (-2)^{-4} + 2^{4 \times (-0.25)} \\ &= \frac{5}{2} - 1 + \frac{1}{16} + 2^{-1} = \frac{25}{16} + \frac{1}{2} = \frac{33}{16}; \end{aligned}$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} - \lg 5 \right| + \sqrt{\lg^2 2 - \lg 4 + 1} - 3^{-\log_3 2} &= \left| \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} - \lg 5 \right| + \sqrt{\lg^2 2 - 2\lg 2 + 1} - 3^{\log_3 \frac{1}{2}} \\ &= \left| \frac{3}{2} - \lg 5 \right| + \sqrt{(\lg 2 - 1)^2} - 3^{\log_3 \frac{1}{2}} = \frac{3}{2} - \lg 5 + 1 - \lg 2 - \frac{1}{2} \\ &= 2 - (\lg 5 + \lg 2) = 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

$$19. \text{ 已知集合 } A = \{x \mid x^2 + 2x - 8 < 0\}, \quad B = \left\{x \mid \frac{1}{2-x} \leq 3\right\}, \quad C = \{x \mid x^2 - 3ax + 2a^2 < 0\}.$$

(1) 求 $A \cap B$;

(2) 若 $C \subseteq (A \cap B)$, 求实数 a 的取值范围.

【答案】(1) $A \cap B = \left\{x \mid -4 < x \leq \frac{5}{3}\right\}$

$$(2) \left[-2, \frac{5}{6}\right]$$

【解析】

【分析】(1) 分别求出 A 与 B 中不等式的解集，根据交集的定义 A 与 B 的交集即可；

(2) 分 $a=0$ ， $a>0$ 以及 $a<0$ 三种情况，分别求出集合 C 中不等式的解集，根据 C 为 A 与 B 交集的子集列关系式，可求出 a 的范围。

【小问 1 详解】

$$A = \{x | x^2 + 2x - 8 < 0\} = \{x | -4 < x < 2\}$$

$$\text{由 } \frac{1}{2-x} \leq 3 \text{ 等价于 } \frac{1}{2-x} - 3 \leq 0 \text{ 等价于 } \frac{1-3(2-x)}{2-x} \leq 0,$$

$$\therefore \frac{3x-5}{2-x} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (3x-5)(2-x) \leq 0 \\ 2-x \neq 0 \end{cases}, \text{ 解得 } x \leq \frac{5}{3} \text{ 或 } x > 2,$$

$$\therefore B = \left\{x \mid x \leq \frac{5}{3} \text{ 或 } x > 2\right\}, \therefore A \cap B = \left\{x \mid -4 < x \leq \frac{5}{3}\right\}.$$

【小问 2 详解】

$$C = \{x | x^2 - 3ax + 2a^2 < 0\} = \{x | (x-2a)(x-a) < 0\}$$

当 $a > 0$ 时， $C = \{x | a < x < 2a\}$ ，要使 $C \subseteq (A \cap B)$ ，

$$\text{则 } \begin{cases} a \geq -4 \\ 2a \leq \frac{5}{3} \end{cases}, \text{ 解得 } 0 < a \leq \frac{5}{6}.$$

当 $a = 0$ 时， $C = \emptyset$ ，符合 $C \subseteq (A \cap B)$ ；

当 $a < 0$ 时， $C = \{x | 2a < x < a\}$ ，要使 $C \subseteq (A \cap B)$ ，

$$\text{则 } \begin{cases} 2a \geq -4 \\ a \leq \frac{5}{3} \end{cases}, \text{ 解得 } -2 \leq a < 0.$$

综上， a 的取值范围是 $\left[-2, \frac{5}{6}\right]$ 。

20. 已知函数 $f(x) = 4^x - 2 \cdot 2^{x+1} + a$ ，其中 $x \in [0, 3]$ 。

(1) 若 $f(x)$ 的最小值为 1，求 a 的值；

(2) 若存在 $x \in [0, 3]$, 使 $f(x) \geq 33$ 成立, 求 a 的取值范围.

【答案】(1) $a = 5$

(2) $a \geq 1$

【解析】

【分析】(1) 将函数解析式变形为 $f(x) = (2^x - 2)^2 + a - 4$, 结合 $f(x)_{\min} = 1$ 可求得实数 a 的值;

(2) 令 $t = 2^x \in [1, 8]$, $g(t) = -t^2 + 4t + 33$, 由 $f(x) \geq 0$ 可得出 $a \geq g(t)$, 求出函数 $g(t)$ 在区间 $[1, 8]$ 上的最小值, 即可得出实数 a 的取值范围.

【小问 1 详解】

解: 因为 $x \in [0, 3]$, $f(x) = (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + a = (2^x - 2)^2 + a - 4$,

当 $2^x = 2$ 时, 即当 $x = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最小值, 即 $f(x)_{\min} = f(1) = a - 4 = 1$, 解得 $a = 5$.

【小问 2 详解】

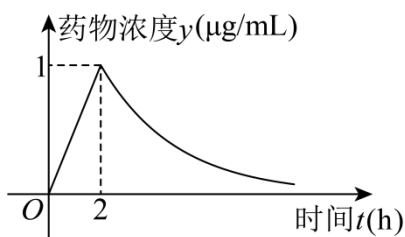
解: 令 $t = 2^x \in [1, 8]$, 则 $f(x) = t^2 - 4t + a$, 由 $f(x) \geq 33$ 可得 $a \geq -t^2 + 4t + 33$,

令 $g(t) = -t^2 + 4t + 33$, 函数 $g(t)$ 在 $[1, 2)$ 上单调递增, 在 $(2, 8]$ 上单调递减,

因为 $g(1) = 36$, $g(8) = 1$, 所以, $g(t)_{\min} = g(8) = 1$, $\therefore a \geq 1$.

21. 某种药物被服用后, 在人体内大致要经过释放和代谢两个主要过程, 已知在药物释放过程中, 血液中的药物浓度 $y(\mu\text{g}/\text{mL})$ 与时间 $t(\text{h})$ 成正比, 药物释放完毕后, y 与 t 的函数关系式为 $y = 2^{a - \frac{1}{2}t}$ (a 是常数),

如图所示:



(1) 根据图象直接写出 y 关于 t 的函数表达式;

(2) 求从药物释放完毕到药物浓度降至峰值的一半所需的时间;

(3) 据测算, 药物浓度不低于 $0.125 \mu\text{g}/\text{mL}$ 时才有效, 求该药物的有效时长.

【答案】(1) $y = \begin{cases} \frac{1}{2}t, & 0 \leq t < 2, \\ 2^{1 - \frac{1}{2}t}, & t \geq 2. \end{cases}$

(2) 2h

(3) 7.75h

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法求分段函数的解析式；

(2) 根据题意建立不等式，解指数型不等式得解；

(3) 由 $y > 0.125$ 解不等式，根据不等式的解即可得出药物有效时长.

【小问 1 详解】

因为当 $0 \leq t < 2$ 时，血液中的药物浓度 $y(\mu\text{g}/\text{mL})$ 与时间 $t(\text{h})$ 成正比，且过点 $(2, 1)$

所以 $y = \frac{1}{2}t$ ，当 $t \geq 2$ 时， y 与 t 的函数关系式为 $y = 2^{a-\frac{1}{2}t}$ (a 是常数) 且过点 $(2, 1)$ ，

所以 $2^{a-1} = 2^0 = 1$ ，所以 $a = 1$ ，所以 $y = 2^{1-\frac{1}{2}t}$ ，

$$\text{所以 } y = \begin{cases} \frac{1}{2}t, & 0 \leq t < 2 \\ 2^{1-\frac{1}{2}t}, & t \geq 2 \end{cases}$$

【小问 2 详解】

药物浓度降至峰值的一半，即降到 $\frac{1}{2} \mu\text{g}/\text{mL}$ ，

令 $2^{1-\frac{1}{2}t} = \frac{1}{2}$ ，解得 $t = 4$ ，因为在 $t = 2$ 时药物释放完毕，

所以从药物释放完毕到药物浓度降至峰值的一半所需的时间为 2h 。

【小问 3 详解】

当 $0 \leq t < 2$ 时，令 $\frac{1}{2}t \geq 0.125$ ，得 $0.25 \leq t < 2$ ；

当 $t \geq 2$ 时，令 $2^{1-\frac{1}{2}t} \geq 0.125$ ，得 $2 \leq t \leq 8$ 。

因此当 $0.25 \leq t \leq 8$ 时，药物有效，有效时长为 $8 - 0.25 = 7.75\text{h}$ 。

22. 已知函数 $f(x) = \log_2(4^x + 1) + kx$ 为偶函数.

(1) 求实数 k 的值；

(2) 解关于 m 的不等式 $f(m+1) > f(2m-1)$ ；

(3) 设 $g(x) = \log_2\left(a \cdot 2^x - \frac{1}{2}a\right)$ ($a \neq 0$)，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象有 2 个公共点，求实数 a 的取值范围.

【答案】(1) $k = -1$

(2) $(0, 2)$

$$(3) a < -8 - 4\sqrt{5}$$

【解析】

【分析】(1) 根据偶函数建立等式可求解；

(2) 先证明在 $[0, +\infty)$ 上的单调性，再根据偶函数解不等式即可；

(3) 将问题转化为 $(a-1)t^2 - \frac{1}{2}at - 1 = 0$ 有两个不相等的正实根，利用一元二次方程根的分布求解即可。

【小问 1 详解】

由函数表达式可知定义域为 R ，

$\therefore$ 函数 $f(x) = \log_2(4^x + 1) + kx$ 为偶函数

$$\therefore f(-x) = f(x) \text{ 即: } \log_2(4^{-x} + 1) - kx = \log_2(4^x + 1) + kx$$

$$\therefore 2kx = \log_2(4^{-x} + 1) - \log_2(4^x + 1) = \log_2 \frac{4^x + 1}{4^x + 1} = \log_2 4^{-x} = -2x$$

$$\therefore 2(k+1)x = 0, \text{ 即 } k = -1.$$

【小问 2 详解】

$$f(x) = \log_2(4^x + 1) - x = \log_2\left(\frac{4^x + 1}{2^x}\right) = \log_2\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right),$$

任取 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ ，且 $x_1 < x_2$ ，

$$\text{则 } 0 < 2^{x_1} < 2^{x_2}, \quad 2^{x_1} - 2^{x_2} < 0, \quad 2^{x_1+x_2} > 1,$$

$$\text{所以 } 2^{x_1} + \frac{1}{2^{x_1}} - 2^{x_2} - \frac{1}{2^{x_2}} = (2^{x_1} - 2^{x_2})\left(\frac{2^{x_1+x_2} - 1}{2^{x_1+x_2}}\right) < 0$$

$$\text{所以 } f(x_1) - f(x_2) = \log_2\left(2^{x_1} + \frac{1}{2^{x_1}}\right) - \log_2\left(2^{x_2} + \frac{1}{2^{x_2}}\right) < 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上递增，

$\therefore f(m+1) > f(2m-1)$ ，又因为 $f(x)$ 为 R 上的偶函数，

$$\therefore f(|m+1|) > f(|2m-1|),$$

$$\therefore |m+1| > |2m-1|, \text{ 即 } (m+1)^2 > (2m-1)^2, \text{ 解得 } 0 < m < 2,$$

$\therefore$ 所求不等式的解集为 $(0, 2)$

【小问 3 详解】

$$\because g(x) = \log_2(a \cdot 2^x - \frac{1}{2}a) = f(x) = \log_2(4^x + 1) - x = \log_2(2^x + 2^{-x})$$

$$\therefore a \cdot 2^x - \frac{1}{2}a = 2^x + 2^{-x} > 0 \text{ 在 } R \text{ 上有两个不相等的实根}$$

$$\text{令 } t = 2^x > 0, \text{ 则 } a \cdot t - \frac{1}{2}a = t + \frac{1}{t}$$

$$\therefore (a-1)t^2 - \frac{1}{2}at - 1 = 0 \text{ 有两个不相等的正实根}$$

$$\therefore \begin{cases} a-1 \neq 0 \\ \Delta = \frac{1}{4}a^2 + 4(a-1) > 0 \\ \frac{a}{4(a-1)} > 0 \\ \frac{-1}{a-1} > 0 \end{cases}$$

$$\text{解得 } a < -8 - 4\sqrt{5}.$$