

宜兴中学、泰兴中学、泰州中学 2023-2024 学年秋学期联合质量检测

数学学科试卷

考试时间：120 分钟

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $M = \{x | -2 < x < 6\}$ ，集合 $N = \{0, 2, 4, 6\}$ ，则 $M \cap N$ 的子集个数为 ()

- A. 3 B. 4 C. 7 D. 8

【答案】D

【解析】

【分析】先求得 $M \cap N$ ，进而确定正确答案.

【详解】依题意， $M \cap N = \{0, 2, 4\}$ ，共 3 个元素，

所以子集个数为 $2^3 = 8$.

故选：D

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -\sin x, & x < 0 \\ \frac{1}{x^2}, & x \geq 0 \end{cases}$ ，则 $f\left[f\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$ 的值为 ()

- A. 4 B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据分段函数的解析式，即可根据自变量的范围代入求值.

【详解】 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ， $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

故 $f\left[f\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

故选：C.

3. 下表是某次测量中两个变量 x, y 的一组数据，若将 y 表示为关于 x 的函数，则最可能的函数模型是

x	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0.63	1.01	1.26	1.46	1.63	1.77	1.89	1.99

- A. 一次函数模型 B. 二次函数模型 C. 指数函数模型 D. 对数函数模型

【答案】D

【解析】

【详解】对于 A，由于 x 均匀增加 1，而 y 值不是均匀递增， $\therefore$ 不是一次函数模型；对于 B，由于该函数是单调递增，不是二次函数模型；对于 C， $y = a^x$ 过 $(0, 1)$ ， $\therefore$ 不是指数函数模型，故选 D.

4. 不等式 $x^2 - x - m > 0$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 上恒成立的一个必要不充分条件是 ()

- A. $m \leq -\frac{1}{4}$ B. $m < -\frac{1}{4}$
C. $m < -\frac{1}{2}$ D. $-1 < m < -\frac{1}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据二次不等式恒成立求出充要条件，再由充分条件，必要条件的概念求出选项.

【详解】不等式 $x^2 - x - m > 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，即一元二次方程 $x^2 - x - m = 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上无实数解

$$\therefore \Delta = (-1)^2 - 4 \times (-m) < 0, \text{ 解得: } m < -\frac{1}{4},$$

易见 B 选项是充要条件，不成立；

A 选项中， $m < -\frac{1}{4}$ 可推导 $m \leq -\frac{1}{4}$ ，且 $m \leq -\frac{1}{4}$ 不可推导 $m < -\frac{1}{4}$ ，故 $m \leq -\frac{1}{4}$ 是 $m < -\frac{1}{4}$ 的必要不充分条件，A 正确；

C 选项中， $m < -\frac{1}{4}$ 不可推导出 $m < -\frac{1}{2}$ ，C 错误；

D 选项中， $m < -\frac{1}{4}$ 不可推导 $-1 < m < -\frac{1}{2}$ ，D 错误，

故选：A.

5. 已知 $\sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{1}{2}$ ，则 $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{1 - \tan(-\alpha)}$ 的值为 ()

- A. $-\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $-\frac{3}{16}$ D. $\frac{3}{16}$

【答案】A

【解析】

【分析】对 $\sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{1}{2}$ 平方，得到 $\sin \alpha \cos \alpha$ 的值，然后对 $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{1 - \tan(-\alpha)}$ 化简求值即可.

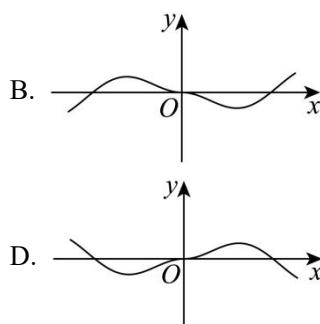
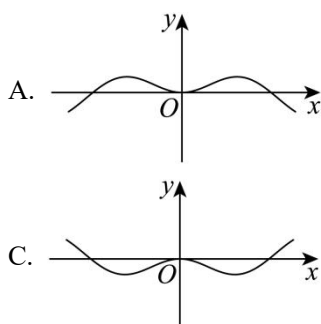
【详解】因为 $\sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{1}{2}$ ，所以 $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4}$ ，

所以 $\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{3}{8}$ ，

$$\text{所以 } \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{1 - \tan(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{-\sin \alpha}{1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{-\sin \alpha}{\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{-\sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{-\sin \alpha \cos \alpha}{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{4},$$

故选：A.

6. 函数 $f(x) = \frac{1-2^x}{1+2^x} \cdot \sin x$ ($-4 \leq x \leq 4$) 的图象大致形状是 ()



【答案】C

【解析】

【分析】根据函数的奇偶性和特殊点的三角函数值确定正确答案.

【详解】 $f(x)$ 的定义域是 $[-4, 4]$ ，

$$f(-x) = \frac{1-2^{-x}}{1+2^{-x}} \cdot \sin(-x) = \frac{2^x-1}{2^x+1} \cdot (-\sin x) = f(x),$$

所以 $f(x)$ 是偶函数，图象关于 y 轴对称，由此排除 BD 选项.

由于 $\pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$, $\sin 4 < 0$ ，

所以 $f(4) = \frac{1-2^4}{1+2^4} \cdot \sin 4 > 0$ ，由此排除 A 选项. 所以 C 选项正确.

故选：C

7. 设 $a = 16^{0.3}$, $b = \log_2 3$, $c = \log_3 4$ ，则 ()

A. $a > b > c$

B. $c > b > a$

C. $a > c > b$

D. $b > a > c$

【答案】A

【解析】

【分析】利用指数、对数函数的性质判断 a, b, c 的范围.

【详解】因为 $y = \log_2 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 且 $2^{\frac{3}{2}} < 3 < 4$, 所以 $\log_2 2^{\frac{3}{2}} < \log_2 3 < \log_2 4$,
得 $\frac{3}{2} < \log_2 3 < 2$, 即 $\frac{3}{2} < b < 2$,

因为 $y = \log_3 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 且 $3 < 4 < 3^{\frac{3}{2}}$, 所以 $\log_3 3 < \log_3 4 < \log_3 3^{\frac{3}{2}}$,
得 $1 < \log_3 4 < \frac{3}{2}$, 即 $1 < c < \frac{3}{2}$,

因为 $y = 4^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增, 则 $a = 16^{0.3} = 4^{0.6} > 4^{0.5} = 2$,

故 $a > b > c$.

故选: A

8. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + a, & x < 1 \\ 4(x+a)(x+2a), & x \geq 1 \end{cases}$, 若 $f(x)$ 恰有 2 个零点, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $\left[-2, -\frac{1}{2}\right]$

B. $(-\infty, -2] \cup \left(-1, -\frac{1}{2}\right]$

C. $(-\infty, -1)$

D. $[-2, +\infty)$

【答案】B

【解析】

【详解】当 $x < 1$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, $f(x) < 2 + a$,

当 $x \geq 1$ 时, 令 $f(x) = 0$ 得 $x = -a$ 或 $x = -2a$.

(1) 若 $2 + a \leq 0$, 即 $a \leq -2$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上无零点, 此时 $-2a > -a \geq 1$,

$\therefore f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上有两个零点, 符合题意;

(2) 若 $2 + a > 0$, 即 $a > -2$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上有 1 个零点,

$\therefore f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上只有 1 个零点,

①若 $-2 < a < 0$, 则 $-2a > -a$,

$$\therefore -a < 1 - 2a, \text{ 解得 } -1 < a < -\frac{1}{2},$$

②若 $a = 0$, 则 $-a = -2a = 0 \notin [1, +\infty)$,

$\therefore f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上无零点, 不符合题意;

③若 $a > 0$, 则 $0 > -a > -2a$,

$\therefore f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上无零点, 不符合题意;

综上 a 的取值范围是 $(-\infty, -2] \cup (-1, -\frac{1}{2}]$. 选 B.

点睛:

解答本题的关键是对实数 a 进行分类讨论, 根据 a 的不同取值先判断函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上的零点个数, 在此基础上再判断函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的零点个数, 看是否满足有两个零点即可.

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 在每小题给出的四个选项号, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. 下列说法正确的有 ()

A. 已知角 α 的终边经过点 $P(-2, 4)$, 则函数 $\sin \alpha - \cos \alpha$ 的值等于 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

B. 幂函数 $y = x^\alpha (\alpha > 0)$ 的图象始终经过点 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$

C. “ $a > 3$ 且 $b > 3$ ”是“ $ab > 9$ ”的充分不必要条件

D. 若函数 $f(x) = \log_3 x$, 则 $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 有 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$

【答案】 BCD

【解析】

【分析】 根据三角函数定义, 求出 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 判断 A; 根据幂函数性质判断 B; 根据充分条件必要条件定义判断 C; 利用分析法证明 D.

【详解】 对于 A: 角 α 的终边经过点 $P(-2, 4)$, 所以 $\sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{(-2)^2 + 4^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,
 $\cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{(-2)^2 + 4^2}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, 所以 $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} - \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{3\sqrt{5}}{5}$, 故 A 错误;

对于 B: 幂函数 $y = x^\alpha (\alpha > 0)$ 始终经过点 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$, 故 B 正确;

对于 C: “ $a > 3$ 且 $b > 3$ ”可以推出“ $ab > 9$ ”, 反过来, 当“ $ab > 9$ ”时,

例 $a=1, b=10$ 时, 不能推出“ $a>3$ 且 $b>3$ ”, 所以“ $a>3$ 且 $b>3$ ”是“ $ab>9$ ”的充分不必要条件, 故 C 正确;
确;

对于 D: 对任意 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, 要证明不等式 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \leq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$,

只需证明 $\frac{\log_3 x_1 + \log_3 x_2}{2} \leq \log_3 \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$,

即 $\log_3 x_1 + \log_3 x_2 \leq \log_3 \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2$, 即 $\log_3 x_1 x_2 \leq \log_3 \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2$

即 $x_1 x_2 \leq \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2$, 即 $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 \geq 0$,

故只需证明 $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$, 此不等式显然成立, 故 D 正确.

故选: BCD.

10. 下列函数中最大值为 1 的有 ()

A. $y = x^2 + \frac{1}{4x^2}$

B. $y = x + \frac{1}{x-3}, x < 3$

C. $y = \frac{2e^x}{e^{2x} + 1}, x > 0$

D. $y = 2x\sqrt{1-x^2}, x \in [0, 1]$

【答案】BD

【解析】

【分析】根据基本不等式及其成立的条件“①正”，“②定”，“③相等”，逐一分析选项，即可得答案.

【详解】对于 A, $y = x^2 + \frac{1}{4x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{4x^2}} = 1$,

当且仅当 $x^2 = \frac{1}{4x^2}$, 即 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 取等号,

所以 $y = x^2 + \frac{1}{4x^2}$ 在 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 取最小值为 1, 无最大值, 故 A 不符合题意;

对于 B, $y = x + \frac{1}{x-3}, x < 3$,

$$\text{则 } y = x - 3 + \frac{1}{x-3} + 3 = -\left[(3-x) + \frac{1}{3-x}\right] + 3$$

$$\leq -2\sqrt{(3-x) \cdot \frac{1}{3-x}} + 3 = -2 + 3 = 1,$$

当且仅当 $(3-x) = \frac{1}{3-x}$, 即 $x=2$ 取等号,

所以 $y = x + \frac{1}{x-3}$, $x < 3$ 的最大值为 1, 故 B 符合题意;

对于 C, $y = \frac{2e^x}{e^{2x}+1}$, $x > 0$, 则 $y = \frac{2e^x}{e^{2x}+1} = \frac{2}{e^x + \frac{1}{e^x}} \leq \frac{2}{2\sqrt{e^x \cdot \frac{1}{e^x}}} = 1$,

当且仅当 $e^x = \frac{1}{e^x}$ 即 $x=0$ 取等号, 但 $x > 0$,

所以 $y = \frac{2e^x}{e^{2x}+1}$ 的值域为 $(0,1)$, 故 C 不符合题意;

对于 D, $y = 2x\sqrt{1-x^2}$, $x \in [0,1]$,

$$\text{则 } y = 2x\sqrt{1-x^2} = 2\sqrt{x^2(1-x^2)} \leq 2 \cdot \frac{x^2+1-x^2}{2} = 1,$$

当且仅当 $1-x^2 = x^2$, 即 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 取等号,

所以 $y = 2x\sqrt{1-x^2}$ 的最大值为 1, 故 D 符合题意.

故选: BD

11. 质点 P 和 Q 在以坐标原点 O 为圆心, 半径为 1 的圆 O 上逆时针作匀速圆周运动, 同时出发. P 的角速度大小为 2rad/s , 起点为圆 O 与 x 轴正半轴的交点, Q 的角速度大小为 5rad/s , 起点为角 $-\frac{\pi}{3}$ 的终边与圆 O 的交点, 则当 Q 与 P 重合时, Q 的坐标可以为 ()

A. $\left(\cos \frac{2\pi}{9}, \sin \frac{2\pi}{9}\right)$

B. $\left(\cos \frac{\pi}{9}, -\sin \frac{\pi}{9}\right)$

C. $\left(-\cos \frac{5\pi}{9}, -\sin \frac{5\pi}{9}\right)$

D. $\left(-\cos \frac{\pi}{9}, \sin \frac{\pi}{9}\right)$

【答案】ACD

【解析】

【分析】由题意列出重合时刻 t 的表达式, 进而可得 Q 点的坐标, 通过赋值对比选项即可得解.

【详解】点 Q 的初始位置 Q_1 , 锐角 $\angle Q_1OP = \frac{\pi}{3}$,

设 t 时刻两点重合, 则 $5t - 2t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{N})$, 即 $t = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} (k \in \mathbb{N})$,

此时点 $Q\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3} + 5t\right), \sin\left(-\frac{\pi}{3} + 5t\right)\right)$,

即 $Q\left(\cos\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{10k\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{10k\pi}{3}\right)\right), (k \in \mathbb{N})$,

当 $k=0$ 时, $Q\left(\cos\frac{2\pi}{9}, \sin\frac{2\pi}{9}\right)$, 故 A 正确;

当 $k=1$ 时, $Q\left(\cos\frac{32\pi}{9}, \sin\frac{32\pi}{9}\right)$, 即 $Q\left(-\cos\frac{5\pi}{9}, -\sin\frac{5\pi}{9}\right)$, 故 C 正确;

当 $k=2$ 时, $Q\left(\cos\frac{62\pi}{9}, \sin\frac{62\pi}{9}\right)$, 即 $Q\left(-\cos\frac{\pi}{9}, \sin\frac{\pi}{9}\right)$, 故 D 正确;

由三角函数的周期性可得, 其余各点均与上述三点重合, 故 B 错误,

故选: ACD.

12. 已知 x_0 是函数 $f(x) = e^x + 2x - 4$ 的零点 (其中 $e = 2.71828\cdots$ 为自然对数的底数), 则下列说法正确的有 ()

A. $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

B. $\ln(4 - 2x_0) = x_0$

C. $x_0^{2-x_0} > 1$

D. $2x_0 + 1 - e^{-x_0} > 0$

【答案】ABD

【解析】

【分析】确定函数单调递增, 计算 $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, $f(1) > 0$ 得到 A 正确, 变换得到 B 正确, 计算 $x_0^{2-x_0} < x_0^1 < 1$,

C 错误, 变换 $2x_0 + 1 - e^{-x_0} = \frac{-2(x_0 - 1)(2x_0 - 1) + 5}{4 - 2x_0} > 0$, D 正确, 得到答案.

【详解】对选项 A: $f(x) = e^x + 2x - 4$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增,

$f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}} - 3 < 0$, $f(1) = e - 2 > 0$, 故函数有唯一零点 $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 正确;

对选项 B: $f(x) = e^{x_0} + 2x_0 - 4 = 0$, 即 $e^{x_0} = 4 - 2x_0$, $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$,

即 $\ln(4 - 2x_0) = x_0$, 正确;

对选项 C: $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $x_0^{2-x_0} < x_0^1 < 1$, 错误;

对选项 D: $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $e^{x_0} = 4 - 2x_0$,

$$2x_0 + 1 - e^{-x_0} = 2x_0 + 1 - \frac{1}{4 - 2x_0} = \frac{-4x_0^2 + 6x_0 + 3}{4 - 2x_0} = \frac{-2(x_0 - 1)(2x_0 - 1) + 5}{4 - 2x_0} > 0, \text{ 正确};$$

故选: ABD

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知某扇形的周长为 9, 圆心角为 1rad , 则该扇形的面积是_____.

【答案】 $\frac{9}{2}$

【解析】

【分析】

先设扇形的弧长为 l , 半径为 r , 结合题意有 $\begin{cases} l + 2r = 9 \\ l = r \end{cases}$, 再利用扇形的面积是 $S = \frac{1}{2}lr$ 求解即可.

【详解】 设半径为 r , 则弧长 $l = r$, 周长 $2r + l = 9$, 解得 $r = 3$,

所以面积为 $\frac{9}{2}$,

故答案为: $\frac{9}{2}$.

【点睛】 关键点点睛: 该题考查的是有关扇形的面积问题, 熟练掌握弧长公式和扇形面积公式是正确解题的关键.

14. 若 $\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \theta\right) = -\frac{2}{3}$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{5}}{3}$

【解析】

【分析】根据诱导公式和同角三角函数的基本关系式求得正确答案.

$$\text{【详解】} \cos\left(\frac{5\pi}{6}-\theta\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}-\theta\right)=-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{2}{3}, \cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{3},$$

$$\text{由 } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 得 } \theta+\frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$\text{所以 } \sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{5}}{3}$$

15. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且 $f(x)=-f(x-2)$, 当 $x \in (0,1]$ 时, $f(x)=3^x-2$, 则

$$f(\log_3 36)=\underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\text{【答案】} -\frac{1}{4}$$

【解析】

【分析】先求得 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数, 再利用函数 $f(x)$ 为奇函数, 将 $f(\log_3 36)$ 转化为 $-f\left(\log_3 \frac{9}{4}\right)$,

进而利用 $x \in (0,1]$ 时, $f(x)=3^x-2$ 即可求得 $f(\log_3 36)$ 的值.

【详解】由题意可得 $f(x)=-f(x+2)=f(x+4)$, 所以 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数,

$$\text{则 } f(\log_3 36)=f(\log_3 36-4)=f\left(\log_3 \frac{4}{9}\right).$$

$$\text{因为 } \frac{1}{3} < \frac{4}{9} < 1, \text{ 所以 } -1 < \log_3 \frac{4}{9} < 0, \text{ 所以 } 0 < \log_3 \frac{9}{4} < 1,$$

$$\text{因为 } f(x) \text{ 是奇函数, 所以 } f\left(\log_3 \frac{4}{9}\right)=-f\left(\log_3 \frac{9}{4}\right)=-\left(3^{\log_3 \frac{9}{4}}-2\right)=-\frac{1}{4}.$$

$$\text{故答案为: } -\frac{1}{4}.$$

16. 不等式 $x^2-x-2 < \ln(x+2)-2\ln x$ 的解集为_____.

$$\text{【答案】} (0,2)$$

【解析】

【分析】对原不等式变形为 $x^2+\ln(x^2) < \ln(x+2)+(x+2)$, 构造函数 $g(x)=x+\ln x$, 然后利用单调性求解.

【详解】 $x^2 - x - 2 < \ln(x+2) - 2\ln x$ ($x > 0$),

$x^2 - x - 2 < \ln(x+2) - 2\ln x$ ($x > 0$) 可化为 $x^2 - (x+2) < \ln(x+2) - 2\ln x$ ($x > 0$),

即 $x^2 + 2\ln x < \ln(x+2) + (x+2)$ ($x > 0$), 即 $x^2 + \ln(x^2) < \ln(x+2) + (x+2)$ ($x > 0$),

令 $g(x) = x + \ln x$, 因为 $y = x, y = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且有 $g(x^2) < g(x+2)$,

$$\text{则} \begin{cases} x > 0 \\ x^2 < x+2 \\ x^2 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases}, \text{解得 } 0 < x < 2,$$

故答案为: $(0, 2)$.

【点睛】本题主要根据函数特征, 构造函数, 利用函数的单调性解不等式.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 计算:

(1) $0.125^{-\frac{1}{3}} + \sqrt{(-2)^6} + \pi^0 + \sin \frac{2023}{6} \pi$;

(2) 设 $2^a = 3^b = 18$, 求 $\frac{2a+b}{ab}$.

【答案】(1) $\frac{21}{2}$

(2) 1

【解析】

【分析】(1) 利用指数运算及三角函数诱导公式计算即得.

(2) 先利用指数式与对数式互化关系, 再利用对数运算求解即得.

【小问 1 详解】

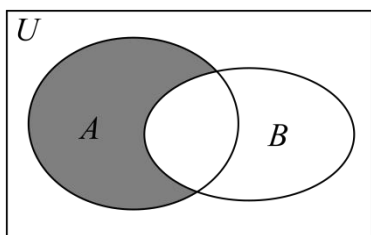
$$0.125^{-\frac{1}{3}} + \sqrt{(-2)^6} + \pi^0 + \sin \frac{2023}{6} \pi = (2^3)^{\frac{1}{3}} + 2^3 + 1 + \sin(337\pi + \frac{\pi}{6}) = 11 - \frac{1}{2} = \frac{21}{2}.$$

【小问 2 详解】

由 $2^a = 3^b = 18$, 得 $a \log_{18} 2 = b \log_{18} 3 = 1$, 则 $\frac{1}{a} = \log_{18} 2, \frac{1}{b} = \log_{18} 3$,

所以 $\frac{2a+b}{ab} = \frac{2}{b} + \frac{1}{a} = 2 \cdot \log_{18} 3 + \log_{18} 2 = \log_{18} 9 + \log_{18} 2 = \log_{18} 18 = 1$.

18. 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 8 \leq 0\}$, $B = \left\{x | \frac{x-2}{x+6} \geq 0\right\}$.



(1) 求图中阴影部分表示的集合;

(2) 已知集合 $C = \{x | 10 - a < x < 2a + 1\}$, 若 $(\complement_U B) \cap C = \emptyset$, 求 a 的取值范围.

【答案】(1) $A \cap \complement_U B = \{x | -2 \leq x < 2\}$

(2) $a \leq 8$

【解析】

【分析】(1) 图中阴影部分表示 $A \cap \complement_U B$, 根据交集、补集的定义计算可得;

(2) 依题意分 $C = \emptyset$ 与 $C \neq \emptyset$ 两种情况讨论, 列出不等式求解即可.

【小问 1 详解】

$$\because A = \{x | (x-4)(x+2) \leq 0\} = \{x | -2 \leq x \leq 4\}, B = \{x | x < -6 \text{ 或 } x \geq 2\}$$

$$\therefore \complement_U B = \{x | -6 \leq x < 2\}$$

$$\therefore A \cap \complement_U B = \{x | -2 \leq x < 2\}$$

【小问 2 详解】

当 $C = \emptyset$ 时, $10 - a \geq 2a + 1$, 即 $a \leq 3$ 时, 满足题意

当 $C \neq \emptyset$ 时, 即 $a > 3$ 时

$$10 - a \geq 2, \text{ 或 } 2a + 1 \leq -6$$

$$\text{又 } a > 3 \therefore 3 < a \leq 8$$

综上: $a \leq 8$

19. 已知角 α 满足 $\cos \alpha + 3 \sin \alpha = 0$.

(1) 若 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, 求 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 的值;

(2) 若角 β 的终边与角 α 的终边关于 x 轴对称, 求 $\frac{\sin \beta - 3 \cos \beta}{2 \sin \beta + \cos \beta}$ 的值.

【答案】(1) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}, \cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

(2) $-\frac{8}{5}$

【解析】

【分析】(1) 确定 $\cos\alpha = -3\sin\alpha$ ，根据 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ，结合角度范围解得答案.

(2) 确定 $\beta = -\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ， $\tan\alpha = -\frac{1}{3}$ ， $\tan\beta = \frac{1}{3}$ ，变换 $\frac{\sin\beta - 3\cos\beta}{2\sin\beta + \cos\beta} = \frac{\tan\beta - 3}{2\tan\beta + 1}$ ，计算得到答案.

【小问 1 详解】

$\cos\alpha + 3\sin\alpha = 0$ ，即 $\cos\alpha = -3\sin\alpha$ ，又 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ，

故 $\sin^2\alpha + 9\sin^2\alpha = 1$ ， $\sin^2\alpha = \frac{1}{10}$ ，

又 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ ，故 $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ ， $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

【小问 2 详解】

角 β 的终边与角 α 的终边关于 x 轴对称，则 $\beta = -\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ，

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{-3\sin\alpha} = -\frac{1}{3}, \quad \tan\beta = \tan(-\alpha + 2k\pi) = \tan(-\alpha) = -\tan\alpha = \frac{1}{3},$$

$$\text{故 } \frac{\sin\beta - 3\cos\beta}{2\sin\beta + \cos\beta} = \frac{\tan\beta - 3}{2\tan\beta + 1} = \frac{\frac{1}{3} - 3}{\frac{2}{3} + 1} = -\frac{8}{5}.$$

20. 据烈一辆城际列车满载时为 550 人，人均票价为 4 元，十分适合城市间的运营.城际铁路运营公司通过一段时间的营业发现，每辆列车的单程营业额 Y （元）与发车时间间隔 t （分钟）相关；当间隔时间到达或超过 12 分钟后，列车均为满载状态；当 $8 \leq t \leq 12$ 时，单程营业额 Y 与 $4t - \frac{60}{t} + 12$ 成正比；当 $5 \leq t \leq 8$ 时，单程营业额会在 $t = 8$ 时的基础上减少，减少的数量为 $40(8 - t)^2$.

(1) 求当 $5 \leq t \leq 12$ 时，单程营业额 Y 关于发车间隔时间 t 的函数表达式；

(2) 由于工作日和节假日的日运营时长不同，据统计每辆车日均 $\frac{120}{t}$ 次单程运营.为体现节能减排，发车间隔时间 $t \in [8, 12]$ ，则当发车时间间隔为多少分钟时，每辆列车的日均营业总额 R 最大？求出该最大值.

【答案】(1) $Y = \begin{cases} 160\left(t - \frac{15}{t} + 3\right), 8 \leq t \leq 12 \\ -40t^2 + 640t - 1100, 5 \leq t < 8 \end{cases}$

(2) 发车时间间隔为 10 分钟时，每辆列车的日均营业总额最大，最大值为 22080 元.

【解析】

【分析】(1) 由题意设当 $8 \leq t \leq 12$ 时的函数表达式，由 $t = 12$ 时满载求得比例系数，进而求得当 $5 \leq t \leq 8$ 时表达式，写为分段函数形式，即得答案；

(2) 由题意可得 $R = 160\left(t - \frac{15}{t} + 3\right) \cdot \frac{120}{t}, t \in [8, 12]$ ，采用换元并结合二次函数性质可解.

【小问 1 详解】

当 $8 \leq t \leq 12$ 时，设 $Y = a\left(4t - \frac{60}{t} + 12\right)$ ，

由 $t = 12$ 的满载可知 $Y = 2200$ ，得 $a = 40$ ，

此时 $Y = 40\left(4t - \frac{60}{t} + 12\right)$ ，

所以 $t = 8$ 时， $Y = 40 \times \left(4 \times 8 - \frac{60}{8} + 12\right) = 1460$ ，

当 $5 \leq t \leq 8$ 时， $Y = 1460 - 40(8 - t)^2 = -40t^2 + 640t - 1100$ ，

综上， $Y = \begin{cases} 160\left(t - \frac{15}{t} + 3\right), 8 \leq t \leq 12 \\ -40t^2 + 640t - 1100, 5 \leq t < 8 \end{cases}$

【小问 2 详解】

$R = 160\left(t - \frac{15}{t} + 3\right) \cdot \frac{120}{t}, t \in [8, 12]$

化简得 $R = 19200\left(-15 \cdot \frac{1}{t^2} + 3 \cdot \frac{1}{t} + 1\right), t \in [8, 12]$

令 $\frac{1}{t} = u \in \left[\frac{1}{12}, \frac{1}{8}\right]$ ，则 $R = 19200(-15u^2 + 3u + 1)$

当 $u = \frac{1}{10}$ ，即 $t = 10$ 时， $R_{\max} = 22080$

答：发车时间间隔为 10 分钟时，每辆列车的日均营业总额最大，最大值为 22080 元.

21. 已知函数 $f(x) = \log_3(9^x + 1) + kx$ 为偶函数.

(1) 求实数 k 的值;

(2) 设 $g(x) = \log_3(a \cdot 3^x + a)$ ($a \neq 0$), 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有 2 个不同的公共点, 求实数 a 的取值范围.

【答案】(1) $k = -1$;

(2) $(2\sqrt{2} - 2, 1)$.

【解析】

【分析】(1) 根据给定的函数, 利用偶函数的定义求出 k 的值.

(2) 由 (1) 求出 $f(x)$ 的解析式, 把问题转化为方程有两个不等实根, 换元利用一元二次方程实根分布求解即得.

【小问 1 详解】

函数 $f(x) = \log_3(9^x + 1) + kx$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 由函数 $f(x) = \log_3(9^x + 1) + kx$ 为偶函数,

则 $f(-x) = f(x)$, 即 $\log_3(9^{-x} + 1) - kx = \log_3(9^x + 1) + kx$,

整理得 $2kx = \log_3(9^{-x} + 1) - \log_3(9^x + 1) = \log_3 \frac{9^{-x} + 1}{9^x + 1} = -2x$, 显然 x 不恒为 0,

所以 $k = -1$.

【小问 2 详解】

由 (1) 知, $f(x) = \log_3(9^x + 1) - x = \log_3 \frac{9^x + 1}{3^x}$,

由函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象有 2 个不同的公共点, 得方程 $f(x) = g(x)$ 有两个不同的实数根,

即方程 $a \cdot 3^x + a = \frac{9^x + 1}{3^x}$ 有两个不等实根, 设 $t = 3^x > 0$, 得 $(a-1)t^2 + at - 1 = 0$,

又 $t = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 令 $h(t) = (a-1)t^2 + at - 1$, 因此方程 $h(t) = 0$ 有两个不等正根,

而 $h(0) = -1 < 0$, 因此 $\begin{cases} a-1 < 0 \\ \Delta = a^2 + 4(a-1) > 0, \text{ 解得 } 2\sqrt{2} - 2 < a < 1, \\ -\frac{a}{2(a-1)} > 0 \end{cases}$

所以 a 的取值范围为 $(2\sqrt{2} - 2, 1)$.

22. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

(1) 利用函数单调性的定义, 证明: $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是增函数;

(2) 已知 $F(x) = 4f^2(x) - 4mf(x) + 9$, 其中 m 是大于 1 的实数, 当 $x \in [0, \ln m]$ 时, $F(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围;

(3) 当 $a \geq 0$, 判断 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 与 $af(x) + (1-a)$ 的大小, 并注明你的结论.

【答案】(1) 证明见解析;

(2) $[1, 3]$;

(3) $\frac{g(x)}{f(x)} < af(x) + (1-a)$, 证明见解析.

【解析】

【分析】(1) 利用增函数的定义, 结合指数函数单调性推理即得.

(2) 换元并求出新元的范围, 转化为二次函数在闭区间上的最小值求解即可.

(3) 作差, 借助不等式性质判断符号即可得解.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in (0, +\infty), x_1 > x_2, f(x_1) - f(x_2) &= \frac{1}{2}(e^{x_1} + e^{-x_1}) - \frac{1}{2}(e^{x_2} + e^{-x_2}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{x_1} - e^{x_2}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{e^{x_1+x_2}} = \frac{1}{2}(e^{x_1} - e^{x_2}) \left(1 - \frac{1}{e^{x_1+x_2}}\right), \end{aligned}$$

由 $x_1 > x_2 \geq 0$, 得 $e^{x_1} - e^{x_2} > 0$, $e^{x_1+x_2} > 1$, 则 $f(x_1) - f(x_2) > 0$, 即 $f(x_1) > f(x_2)$,

即 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数.

【小问 2 详解】

依题意, $F(x) = (e^x + e^{-x})^2 - 2m(e^x + e^{-x}) + 9$, 令 $e^x + e^{-x} = t$,

则 $y = t^2 - 2mt + 9 = (t - m)^2 + 9 - m^2$, 由 $x \in [0, \ln m]$, 得 $e^x \in [1, m]$,

由 (1) 知, $t = e^x + e^{-x}$ 在 $[0, \ln m]$ 上单调递增, 则 $t \in [2, m + \frac{1}{m}]$,

当 $1 < m \leq 2$ 时, $y = t^2 - 2mt + 9$ 在 $[2, m + \frac{1}{m}]$ 上单调递增, $y_{\min} = 13 - 4m \geq 0$, 即 $m \leq \frac{13}{4}$, 因此 $1 < m \leq 2$,

当 $m > 2$ 时, $y = t^2 - 2mt + 9$ 在 $[2, m]$ 上单调递减, 在 $[m, m + \frac{1}{m}]$ 上单调递增,

$y_{\min} = 9 - m^2 \geq 0$, 解得 $-3 \leq m \leq 3$, 因此 $2 < m \leq 3$,

所以实数 m 的取值范围是 $(1, 3]$.

【小问 3 详解】

$$\begin{aligned} \text{依题意, } \frac{g(x)}{f(x)} - af(x) - (1-a) &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - a \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 + a \\ &= a - \frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - a \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = a(1 - \frac{e^x + e^{-x}}{2}) - \frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{aligned}$$

而 $e^x + e^{-x} \geq 2$ (当且仅当 $x=0$ 时取等号), 则 $\frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq 1$, 即 $1 - \frac{e^x + e^{-x}}{2} \leq 0$,

又 $a \geq 0$, 即有 $a(1 - \frac{e^x + e^{-x}}{2}) \leq 0$, 由 $e^x > 0$, 得 $\frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} > 0$, 即 $-\frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < 0$,

$$\text{因此 } \frac{g(x)}{f(x)} - af(x) - (1-a) = a(1 - \frac{e^x + e^{-x}}{2}) - \frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < 0,$$

$$\text{所以 } \frac{g(x)}{f(x)} < af(x) + (1-a).$$

【点睛】思路点睛：含参数的二次函数在指定区间上的最值问题，按二次函数对称轴与区间的关系分类求解，再综合比较即可。