

# 无锡辅仁高中 2023-2024 学年第一学期高一数学 12 月教学质量抽测

## 阶段抽测二

### 一、单选题

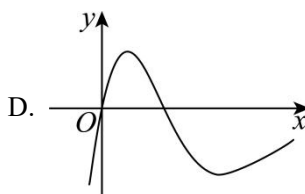
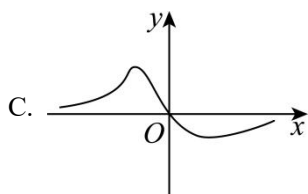
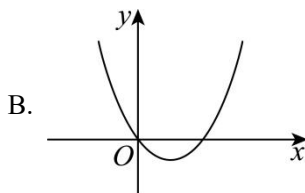
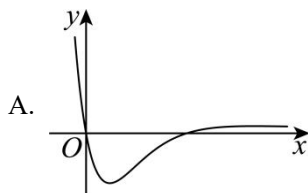
1. 函数  $f(x) = \ln x - \frac{3}{x}$  的零点所在的区间是 ( )

- A. (1,2)                      B. (2,e)                      C. (e,3)                      D. (3,4)

2. 设扇形周长为 20，圆心角的弧度数是 3，则扇形的面积为 ( )

- A. 12                      B. 16                      C. 18                      D. 24

3. 函数  $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{e^x}$  的图象大致是 ( )



4. 已知  $a = 0.7^{0.5}$ ,  $b = \log_{0.5} \sqrt{2}$ ,  $c = 0.5^{0.7}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为 ( )

- A.  $a < b < c$                       B.  $c < b < a$                       C.  $b < c < a$                       D.  $a < c < b$

5. 已知  $\alpha$  为第二象限角，且终边与单位圆的交点的横坐标为  $-\frac{4}{5}$ ，则  $\cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right) =$  ( )

- A.  $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$                       B.  $\frac{7\sqrt{2}}{10}$                       C.  $-\frac{\sqrt{2}}{10}$                       D.  $\frac{\sqrt{2}}{10}$

6. 已知函数  $f(x) = a^x(1 - 2^x)$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 是奇函数，则  $a =$  ( )

- A. 2                      B.  $\sqrt{2}$                       C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       D.  $\frac{1}{2}$

7. 已知函数  $f(x) = \sqrt{2} \cos \omega x - \frac{\pi}{4}$ ，其中  $\omega > 0$ . 若  $f(x)$  在区间  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$  上单调递增，则  $\omega$  的取值范围

是 ( )

- A.  $\left(0, \frac{1}{2}\right]$  B.  $(0, 4]$   
C.  $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$  D.  $\left[1, \frac{5}{2}\right]$

8. 已知函数  $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x) - \frac{2}{e^x+1}$ , 则不等式  $f(x) + f(2x-1) > -2$  的解集是 ( )

- A.  $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$  B.  $(1, +\infty)$  C.  $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$  D.  $(-\infty, 1)$

## 二、多选题

9. 已知  $\theta \in (0, \pi)$ ,  $\sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{5}$ , 则下列结论正确的是 ( )

- A.  $\theta$  为第二象限角 B.  $\cos \theta = -\frac{4}{5}$   
C.  $\tan \theta = -\frac{4}{3}$  D.  $4 \sin \theta \cos \theta - 2 \cos^2 \theta = -\frac{16}{5}$

10. 已知函数  $f(x) = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$ , 则 ( )

- A.  $f(x)$  的最小正周期为  $\pi$   
B.  $f(x)$  的图象关于直线  $x = \frac{7\pi}{12}$  对称  
C.  $f\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$  是偶函数  
D.  $f(x)$  的单调递减区间为  $\left[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}\right] (k \in \mathbb{Z})$

11. 下列命题中正确的是 ( )

- A. 函数  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}$  的值域为  $(-\infty, 2]$  B. 函数  $y = \sqrt{1-2^x}$  的值域为  $[0, 1)$   
C. 函数  $y = 9^x + 3^{x+1} - 1$  的值域为  $(-1, +\infty)$  D. 函数  $y = \frac{3^x}{3^x + 2^x}$  的值域为  $(0, 1)$

12. 已知函数  $f(x) = e^x + x - 2$  的零点为  $a$ , 函数  $g(x) = \ln x + x - 2$  的零点为  $b$ , 则下列选项中成立的是

( )

A.  $a+b=2$

B.  $e^a + \ln b = 2$

C.  $f(x)$  与  $g(x)$  的图象关于  $y=x$  对称

D.  $ab < 1$

### 三、填空题

13. 函数  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x - 3)$  的单调递增区间是\_\_\_\_\_.

14. 已知角  $\alpha$  的终边上一点  $P$  的坐标为  $\left(\sin \frac{5\pi}{6}, \cos \frac{5\pi}{6}\right)$ , 则角  $\alpha$  的最小正值为\_\_\_\_\_

15. 已知函数  $f(x) = -x^2 - 2x + 4$ ,  $g(x) = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ , 若对任意的  $x_2 \in [3, 5]$ , 存在  $x_1 \in \left[-\frac{3}{2}, 1\right]$

使得  $f(x_1) < g(x_2)$  成立, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

16. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0, \\ 2 - |2x + 1|, & x < 0 \end{cases}$ . 当  $m = 0$  时, 方程  $f^2(x) - 2f(x) + m = 0$  有\_\_\_\_\_个实数

根. 若方程  $f^2(x) - 2f(x) + m = 0$  有 5 个实数根, 则  $m$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

### 四、解答题

17. 已知  $\tan(\pi + \alpha) = -\frac{1}{3}$ , 求下列式子的值.

(1)  $\alpha$  为第二象限角, 求  $\sin \alpha - \cos \alpha$ ;

(2)  $2 \sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha$ .

18. 已知  $f(a) = \frac{\sin(2\pi - a) \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)}{\cos\left(a - \frac{3\pi}{2}\right) \tan(\pi + a)}$ .

(1) 若  $f(a) = -\frac{1}{2}$ , 且  $a \in (0, \pi)$ , 求  $a$  的值;

(2) 若  $f\left(a + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$ , 求  $\sin^2\left(\frac{2\pi}{3} - a\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - a\right)$  的值.

19. 已知函数  $f(x) = \log_3\left(\frac{3}{x}\right) \cdot \log_3\left(\frac{x}{27}\right)$ ,  $x \in \left[\frac{1}{3}, 9\right]$ .

(1) 求函数  $f(x)$  的值域;

(2) 若关于  $x$  的不等式  $f(x) + 5 \leq a - \sqrt{a}$  恒成立, 求正实数  $a$  的取值范围.

20. 某科研机构对某病毒的变异毒株在特定环境下进行观测，每隔单位时间  $T$  进行一次记录，用  $x$  表示经过单位时间的个数，用  $y$  表示此变异毒株的数量，单位为万个，得到如下观测数据：

$X(T)$	1	2	3	4	5	6	...
$Y$ (万个)	...	10	...	50	...	250	...

若该变异毒株的数量  $y$  (单位：万个) 与经过  $x$  ( $x \in \mathbb{N}^*$ ) 个单位时间  $T$  的关系有两个函数模型  $y = px^2 + q$  ( $p > 0$ ) 与  $y = ka^x$  ( $k > 0, a > 1$ ) 可供选择.

- (1) 判断哪个函数模型更合适，并求出该模型的解析式；
- (2) 求至少经过多少个时间单位，该变异毒株的数量不少于一亿个.

(参考数据：  $\sqrt{5} \approx 2.236$ ,  $\sqrt{6} \approx 2.449$ ,  $\lg 2 \approx 0.301$ ,  $\lg 6 \approx 0.778$ )

21. 对函数  $y = f(x)$ ，若  $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ ，使得  $f(x_0) = mx_0$  成立，则称  $x_0$  为  $f(x)$  关于参数  $m$  的不动点. 设函数

$$f(x) = ax^2 - bx - b (a \neq 0).$$

- (1) 当  $a = b = 2$  时，求函数  $f(x)$  关于参数 1 的不动点；
- (2) 若  $\forall b \in \mathbb{R}$ ，函数  $f(x)$  恒有关于参数 1 的两个不动点，求  $a$  的取值范围；
- (3) 当  $a = 1, b = -2$  时，函数  $f(x)$  在  $x \in (0, 2]$  上存在两个关于参数  $m$  的不动点，试求参数  $m$  的取值范围.

22. 已知函数  $f(x) = 3^x + 3^{-x}$ ，函数  $g(x) = f(2x) - mf(x) + 6$ .

- (1) 写出函数  $f(x)$  的奇偶性和增区间 (直接给出结果即可)；
- (2) 若命题：“ $\exists x \in \mathbb{R}, g(x) \leq 0$ ”为真命题，求实数  $m$  的取值范围；
- (3) 是否存在实数  $m$ ，使函数  $h(x) = \log_{(m-3)} g(x)$  在  $[0, 1]$  上的最大值为 0？如果存在，求出实数  $m$  所有的值，如果不存在，请说明理由.