

无锡辅仁高中 2023-2024 学年第一学期高一数学 12 月教学质量抽测

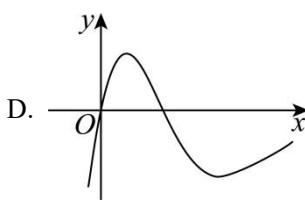
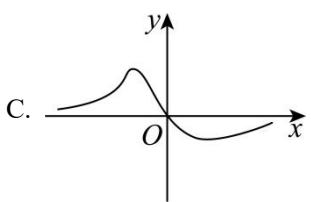
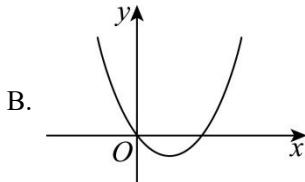
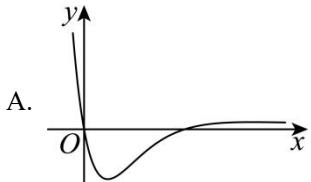
阶段抽测二

一、单选题

1. 函数 $f(x) = \ln x - \frac{3}{x}$ 的零点所在的区间是 ()
- A. (1, 2) B. (2, e) C. (e, 3) D. (3, 4)

2. 设扇形周长为 20, 圆心角的弧度数是 3, 则扇形的面积为 ()
- A. 12 B. 16 C. 18 D. 24

3. 函数 $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{e^x}$ 的图象大致是 ()



4. 已知 $a = 0.7^{0.5}$, $b = \log_{0.5} \sqrt{2}$, $c = 0.5^{0.7}$, 则 a , b , c 的大小关系为 ()

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $b < c < a$ D. $a < c < b$

5. 已知 α 为第二象限角, 且终边与单位圆的交点的横坐标为 $-\frac{4}{5}$, 则 $\cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right) =$ ()

- A. $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$ B. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ C. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{10}$

6. 已知函数 $f(x) = a^x(1 - 2^x)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 是奇函数, 则 $a =$ ()

- A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

7. 已知函数 $f(x) = \sqrt{2} \cos \omega x - \frac{\pi}{4}$, 其中 $\omega > 0$. 若 $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增, 则 ω 的取值范围

是 ()

A. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ B. $(0, 4]$

C. $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$ D. $\left[1, \frac{5}{2}\right]$

8. 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) - \frac{2}{e^x + 1}$, 则不等式 $f(x) + f(2x - 1) > -2$ 的解集是 ()

A. $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ B. $(1, +\infty)$ C. $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ D. $(-\infty, 1)$

二、多选题

9. 已知 $\theta \in (0, \pi)$, $\sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{5}$, 则下列结论正确的是 ()

A. θ 为第二象限角 B. $\cos \theta = -\frac{4}{5}$

C. $\tan \theta = -\frac{4}{3}$ D. $4 \sin \theta \cos \theta - 2 \cos^2 \theta = -\frac{16}{5}$

10. 已知函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$, 则 ()

A. $f(x)$ 的最小正周期为 π

B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{7\pi}{12}$ 对称

C. $f\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 是偶函数

D. $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}\right] (k \in \mathbb{Z})$

11. 下列命题中正确的是 ()

A. 函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}$ 的值域为 $(-\infty, 2]$

B. 函数 $y = \sqrt{1-2^x}$ 的值域为 $[0, 1)$

C. 函数 $y = 9^x + 3^{x+1} - 1$ 的值域为 $(-1, +\infty)$

D. 函数 $y = \frac{3^x}{3^x + 2^x}$ 的值域为 $(0, 1)$

12. 已知函数 $f(x) = e^x + x - 2$ 的零点为 a , 函数 $g(x) = \ln x + x - 2$ 的零点为 b , 则下列选项中成立的是

()

A. $a+b=2$ B. $e^a + \ln b = 2$

C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象关于 $y=x$ 对称 D. $ab < 1$

三、填空题

13. 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x - 3)$ 的单调递增区间是_____.

14. 已知角 α 的终边上一点 P 的坐标为 $\left(\sin \frac{5\pi}{6}, \cos \frac{5\pi}{6}\right)$, 则角 α 的最小正值为_____

15. 已知函数 $f(x) = -x^2 - 2x + 4$, $g(x) = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 若对任意的 $x_2 \in [3, 5]$, 存在 $x_1 \in [-\frac{3}{2}, 1]$

使得 $f(x_1) < g(x_2)$ 成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0, \\ 2 - |2x+1|, & x < 0 \end{cases}$. 当 $m=0$ 时, 方程 $f^2(x) - 2f(x) + m = 0$ 有_____个实数

根. 若方程 $f^2(x) - 2f(x) + m = 0$ 有 5 个实数根, 则 m 的取值范围为_____.

四、解答题

17. 已知 $\tan(\pi + \alpha) = -\frac{1}{3}$, 求下列式子的值.

(1) α 为第二象限角, 求 $\sin \alpha - \cos \alpha$;

(2) $2 \sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha$.

18. 已知 $f(a) = \frac{\sin(2\pi - a) \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)}{\cos\left(a - \frac{3\pi}{2}\right) \tan(\pi + a)}$.

(1) 若 $f(a) = -\frac{1}{2}$, 且 $a \in (0, \pi)$, 求 a 的值;

(2) 若 $f\left(a + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$, 求 $\sin^2\left(\frac{2\pi}{3} - a\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - a\right)$ 的值.

19. 已知函数 $f(x) = \log_3\left(\frac{3}{x}\right) \cdot \log_3\left(\frac{x}{27}\right)$, $x \in [\frac{1}{3}, 9]$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的值域;

(2) 若关于 x 的不等式 $f(x) + 5 \leq a - \sqrt{a}$ 恒成立, 求正实数 a 的取值范围.

20. 某科研机构对某病毒的变异毒株在特定环境下进行观测，每隔单位时间 T 进行一次记录。用 x 表示经过

单位时间的个数，用 y 表示此变异毒株的数量，单位为万个，得到如下观测数据：

$X(T)$	1	2	3	4	5	6	...
$Y(\text{万个})$...	10	...	50	...	250	...

若该变异毒株的数量 y (单位：万个) 与经过 x ($x \in \mathbb{N}^*$) 个单位时间 T 的关系有两个函数模型 $y = px^2 + q$

($p > 0$) 与 $y = ka^x$ ($k > 0$, $a > 1$) 可供选择。

(1) 判断哪个函数模型更合适，并求出该模型的解析式；

(2) 求至少经过多少个时间单位，该变异毒株的数量不少于一亿个。

(参考数据： $\sqrt{5} \approx 2.236$, $\sqrt{6} \approx 2.449$, $\lg 2 \approx 0.301$, $\lg 6 \approx 0.778$)

21. 对函数 $y = f(x)$ ，若 $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ ，使得 $f(x_0) = mx_0$ 成立，则称 x_0 为 $f(x)$ 关于参数 m 的不动点。设函数

$$f(x) = ax^2 - bx - b (a \neq 0).$$

(1) 当 $a = b = 2$ 时，求函数 $f(x)$ 关于参数 1 的不动点；

(2) 若 $\forall b \in \mathbb{R}$ ，函数 $f(x)$ 恒有关于参数 1 的两个不动点，求 a 的取值范围；

(3) 当 $a = 1, b = -2$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x \in (0, 2]$ 上存在两个关于参数 m 的不动点，试求参数 m 的取值范围。

22. 已知函数 $f(x) = 3^x + 3^{-x}$ ，函数 $g(x) = f(2x) - mf(x) + 6$ 。

(1) 写出函数 $f(x)$ 的奇偶性和增区间 (直接给出结果即可)；

(2) 若命题：“ $\exists x \in \mathbb{R}, g(x) \leq 0$ ”为真命题，求实数 m 的取值范围；

(3) 是否存在实数 m ，使函数 $h(x) = \log_{(m-3)} g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值为 0？如果存在，求出实数 m 所有的值，如果不存在，请说明理由。