

2023-2024 学年江苏省无锡市天一中学高一（上）期中数学试卷

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. (5 分) 集合 $A = \{x | -1 \leq x < 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $[-1, 3)$ B. $(0, 3]$ C. $\{0, 1, 2\}$ D. $\{0, 1, 2, 3\}$

2. (5 分) 命题 “ $\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 + 2x + m \leq 0$ ” 的否定是 ()

- A. $\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 + 2x + m > 0$ B. $\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 + 2x + m \leq 0$
C. $\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 + 2x + m < 0$ D. $\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 + 2x + m > 0$

3. (5 分) 下列函数中是奇函数，又在定义域内为减函数的是 ()

- A. $y = \frac{1}{x}$ B. $y = -x^3$ C. $y = x^2$ D. $y = x + 2$

4. (5 分) 已知集合 $M = \{x | \frac{x}{4} \in \mathbb{N}^* \text{ 且 } \frac{x}{6} \in \mathbb{N}^*\}$, 集合 $N = \{x | \frac{x}{24} \in \mathbb{Z}\}$, 则 ()

- A. $M \in N$ B. $M \cup N = \{x | \frac{x}{12} \in \mathbb{Z}\}$
C. $M = N$ D. $M \cap N = \{x | \frac{x}{24} \in \mathbb{N}^*\}$

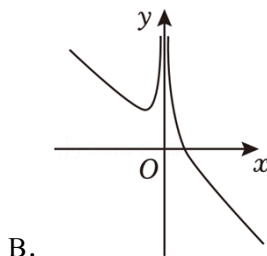
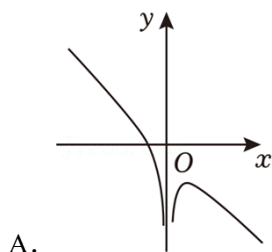
5. (5 分) 一元二次不等式 $14 - 4x^2 \geq x$ 的解集是 ()

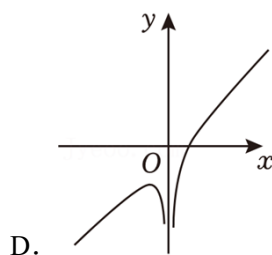
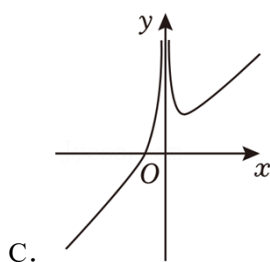
- A. $[-2, \frac{7}{4}]$ B. $[-\frac{7}{4}, 2]$ C. $[-4, \frac{7}{2}]$ D. $[-\frac{7}{2}, 4]$

6. (5 分) 已知函数 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的偶函数，对任意 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, 均有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$ 成立，则满足 $f(2x-1) < f(\frac{1}{3})$ 的 x 的取值范围是 ()

- A. $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ B. $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ C. $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ D. $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$

7. (5 分) 已知函数 $f(x) = -x + \frac{1}{|x|}$, 则函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称的图象是 ()





8. (5分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 1 \\ ax^2 - x + 2, & x > 1 \end{cases}$ 的最小值是 -1, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $[\frac{1}{12}, +\infty)$ B. $(0, \frac{1}{12}]$ C. $[\frac{1}{12}, \frac{1}{2})$ D. $[\frac{1}{2}, +\infty)$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

(多选) 9. (5分) 下列各组函数中是同一函数的是 ()

- A. $y = \sqrt{-2x^3}$ 与 $y = x\sqrt{-2x}$
- B. $y = \sqrt{x^2}$ 与 $y = |x|$
- C. $y = \frac{\sqrt{5-x^2}}{x+1}$ 与 $y = \frac{\sqrt{5-x^2}}{|x+3|-2}$
- D. $y = \sqrt{x+1}\sqrt{x-1}$ 与 $y = \sqrt{(x+1)(x-1)}$

(多选) 10. (5分) 下列说法正确的是 ()

- A. “ $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ” 是 “ $a < b$ ” 的充分不必要条件
- B. $A \cap B = \emptyset$ 是 $A = \emptyset$ 的必要不充分条件
- C. 若 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 则 “ $ab^2 > cb^2$ ” 的充要条件是 “ $a > c$ ”
- D. 若 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 “ $a^2 + b^2 \neq 0$ ” 是 “ $|a| + |b| \neq 0$ ” 的充要条件

11. (5分) 整数集 $\mathbf{Z}$ 中, 被 5 除所得余数为 k 的所有整数组成一个 “类”, 记为 $[k]$, 即 $[k] = \{5n+k | n \in \mathbf{Z}\}$, 其中 $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. 以下判断中不正确的是 ()

- A. $2023 \in [3]$
- B. $\mathbf{Z} = [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3] \cup [4]$
- C. $-2 \in [2]$
- D. 若 $a - b \in [0]$, 则整数 a, b 属同一类

(多选) 12. (5分) 已知函数 $f(x), g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 其中 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函

数, 且 $f(x) + g(x) = ax^2 - x$, 若对于任意 $x_1 > x_2 > 1$, 都有 $\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} > 4$, 则实数 a 可以为

()

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. (5 分) 函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$ 的递增区间为_____.

14. (5 分) 已知幂函数 $f(x) = (m^2 - 2m - 2)x^{m-1}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $m =$ _____.

15. (5 分) 已知 $a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}$, 若集合 $\{a, \frac{b}{a}, 1\} = \{a^2, a+b, 0\}$, 则 $a^{2023} + b^{2024}$ 的值为_____.

16. (5 分) 已知 $a, b, c > 0$, 且 $(a-b)(\frac{4}{a} - \frac{1}{b}) \geq 1$, 则 $(a^2 + b^2 + c^2)(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2})$ 的最小值为_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | 1 \leq x \leq 5\}$, 集合 $B = \{x | -1 - 2a \leq x \leq a - 2\}$.

(1) 当 $a = 4$ 时, 求 $A \cap B$ 及 $A \cup B, (C_U A) \cap B$;

(2) 若 “ $x \in A$ ” 是 “ $x \in B$ ” 的充分条件, 求实数 a 的取值范围.

18. (12 分) 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x - 4 = 0\}$, 集合 $B = \{x | x^2 + ax + 1 = 0\}$

(1) 若 $A \cap B = \{4\}$, 求 $A \cup B$;

(2) 若 $A \cap B = B$, 求实数 a 的取值范围.

19. (12 分) 设函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x \geq 0$, $f(x) = \frac{-x^2}{x^2 + 1}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 判断并证明 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的单调性;

20. (12 分) 已知幂函数 $f(x) = (2m^2 - 5m + 3)x^m$ 的定义域为全体实数 $\mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若 $f(x) > 3x + kx - 1$ 在 $[0, 1)$ 上恒成立, 求实数 k 的取值范围.

21. (12 分) 设矩形 $ABCD$ ($AB > AD$) 的周长为 12cm , 把 $\triangle ABC$ 沿 AC 向 $\triangle ADC$ 折叠, AB 折过去后交 DC 于点 P . 设 $AB = x\text{cm}$, 记 $\triangle ADP$ 的面积为函数 $f(x)$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式, 并写出其定义域;

(2) 求 $\triangle ADP$ 的最大面积及相应 x 的值.

22. (12 分) 已知函数 $f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$, $g(x) = \sqrt{1-x^2}$.

(1) 判断 $f(x)$ 的奇偶性, 并求 $f(x)$ 的值域;

(2) 设函数 $F(x) = f(x) + 2ag(x)$ ($a < 0$), 求 $F(x)$ 的最大值 $h(a)$, 并求 $h(a)$ 的最小值.

2023-2024 学年江苏省无锡市天一中学高一（上）期中数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. (5 分) 集合 $A = \{x | -1 \leq x < 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $[-1, 3)$ B. $(0, 3]$ C. $\{0, 1, 2\}$ D. $\{0, 1, 2, 3\}$

【分析】利用交集定义、不等式性质直接求解.

【解答】解：集合 $A = \{x | -1 \leq x < 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$,

$$\therefore A \cap B = \{0, 1, 2\}.$$

故选：C.

【点评】本题考查集合的运算，考查交集定义、不等式性质等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

2. (5 分) 命题 “ $\forall x \in \mathbf{Z}, x^2 + 2x + m \leq 0$ ” 的否定是 ()

- A. $\exists x \in \mathbf{Z}, x^2 + 2x + m > 0$ B. $\exists x \in \mathbf{Z}, x^2 + 2x + m \leq 0$
C. $\forall x \in \mathbf{Z}, x^2 + 2x + m < 0$ D. $\forall x \in \mathbf{Z}, x^2 + 2x + m > 0$

【分析】根据全称命题与特称命题的否定关系即可判断求解.

【解答】解：因为命题 “ $\forall x \in \mathbf{Z}, x^2 + 2x + m \leq 0$ ” 为全称命题，

其否定为特称命题，即为：“ $\exists x \in \mathbf{Z}, x^2 + 2x + m > 0$ ”，

故选：A.

【点评】本题考查了全称命题与特称命题的否定关系，属于基础题.

3. (5 分) 下列函数中是奇函数，又在定义域内为减函数的是 ()

- A. $y = \frac{1}{x}$ B. $y = -x^3$ C. $y = x^2$ D. $y = x + 2$

【分析】根据基本初等函数的图象与性质，逐一分析选项，即可.

【解答】解：选项 A, $y = \frac{1}{x}$ 是奇函数，虽然在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上均是单调递减的，但在整个

定义域内并不是减函数，即 A 不符合题意；

选项 B, 由幂函数的图象知， $y = -x^3$ 是奇函数，且在定义域内为减函数，即 B 符合题意；

选项 C, $y = x^2$ 是偶函数，即 C 不符合题意；

选项 D, $y = x + 2$ 是非奇非偶函数，即 D 不符合题意.

故选：B.

【点评】本题考查函数的单调性与奇偶性的判断，熟练掌握基本初等函数的图象与性质是解题的关键，

考查逻辑推理能力和运算能力，属于基础题。

4. (5分) 已知集合 $M = \{x \mid \frac{x}{4} \in \mathbb{N}^* \text{ 且 } \frac{x}{6} \in \mathbb{N}^*\}$ ，集合 $N = \{x \mid \frac{x}{24} \in \mathbb{Z}\}$ ，则 ()

A. $M \in N$

B. $M \cup N = \{x \mid \frac{x}{12} \in \mathbb{Z}\}$

C. $M = N$

D. $M \cap N = \{x \mid \frac{x}{24} \in \mathbb{N}^*\}$

【分析】结合集合 M ， N 所表示的意义，再结合两个集合的关系，即可求解。

【解答】解： $M = \{x \mid \frac{x}{4} \in \mathbb{N}^* \text{ 且 } \frac{x}{6} \in \mathbb{N}^*\} = \{x \mid x = 12k, k \in \mathbb{N}^*\}$ ，

$N = \{x \mid \frac{x}{24} \in \mathbb{Z}\} = \{x \mid x = 24k, k \in \mathbb{Z}\}$ ，故 A 错误，C 错误，

当 $x = -12$ 时， $\frac{-12}{12} = -1$ ，既不在集合 M ，也不在集合 N ，故 B 错误；

当元素满足为 24 的正整数倍时，

比满足为 12 的正整数倍，

故 $M \cap N = \{x \mid \frac{x}{24} \in \mathbb{N}^*\}$ ，故 D 正确，

故选：D。

【点评】本题主要考查集合的运算，属于基础题。

5. (5分) 一元二次不等式 $14 - 4x^2 \geq x$ 的解集是 ()

A. $[-2, \frac{7}{4}]$

B. $[-\frac{7}{4}, 2]$

C. $[-4, \frac{7}{2}]$

D. $[-\frac{7}{2}, 4]$

【分析】不等式 $14 - 4x^2 \geq x$ 化为： $4x^2 + x - 14 \leq 0$ ，然后根据一元二次不等式的解法即可求解。

【解答】解：不等式 $14 - 4x^2 \geq x$ 化为： $4x^2 + x - 14 \leq 0$ ，

解得 $-2 \leq x \leq \frac{7}{4}$ ，

故选：A。

【点评】本题考查了一元二次不等式的解法，属于基础题。

6. (5分) 已知函数 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的偶函数，对任意 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ ，均有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$ 成立，则满足 $f(2x-1) < f(\frac{1}{3})$ 的 x 的取值范围是 ()

A. $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

B. $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

C. $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$

D. $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$

【分析】由已知可得函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减，由偶函数的性质可得 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增，利用函数的奇偶性与单调性将不等式去掉“ f ”，即可求解 x 的范围。

【解答】解：因为对任意 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ ，均有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$ 成立，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减,

又因为 $f(x)$ 为 R 上的偶函数, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

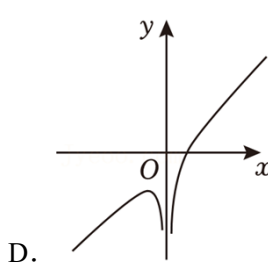
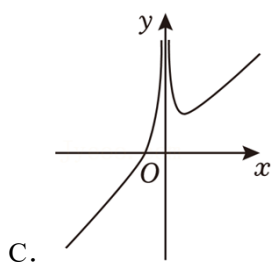
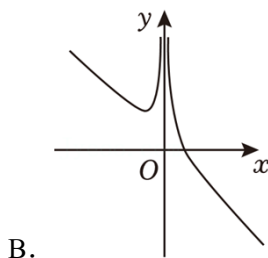
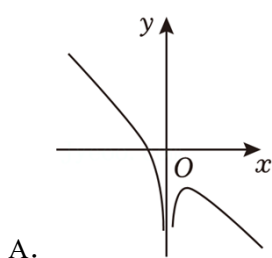
所以不等式 $f(2x-1) < f(\frac{1}{3})$ 等价于 $|2x-1| < |\frac{1}{3}|$, 解得 $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$,

故 x 的取值范围是 $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

故选: A.

【点评】 本题主要考查函数奇偶性与单调性的综合, 不等式的解法, 考查运算求解能力, 属于基础题.

7. (5分) 已知函数 $f(x) = -x + \frac{1}{|x|}$, 则函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称的图象是 ()



【分析】 首先对 $x > 0$ 时, 函数单调性进行分析, 然后得到其图像关于 y 轴对称后的单调性, 再讨论 $x < 0$ 时, 利用基本不等式等到它在此范围内的最值, 然后得到其图像关于 y 轴对称后的最值.

【解答】 解: 当 $x > 0$ 时, $f(x) = -x + \frac{1}{x}$, 设 $y_1 = -x$, $y_2 = \frac{1}{x}$,

根据减函数加上减函数为减函数,

则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 故当其关于 y 对称后,

变为当 $x < 0$ 时, 对称后的函数在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 故 A, B, D 错误,

当 $x < 0$ 时, $f(x) = -x + \frac{1}{-x} \geq 2\sqrt{(-x) \cdot \frac{1}{-x}} = 2$,

当且仅当 $x = -1$ 时等号成立, 故当其关于 y 对称后, 变为 $x > 0$, 应有最小值 2,

故选: C.

【点评】 本题考查函数的图象, 函数的性质, 属于中档题.

8. (5分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x \leq 1 \\ ax^2-x+2, & x > 1 \end{cases}$ 的最小值是 -1, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $[\frac{1}{12}, +\infty)$ B. $(0, \frac{1}{12}]$ C. $[\frac{1}{12}, \frac{1}{2})$ D. $[\frac{1}{2}, +\infty)$

【分析】分类讨论，结合二次函数的性质，得到关于 a 的不等式组，解出即可.

【解答】解：当 $x \leq 1$ 时， $x^2 \geq 0$ ，故 $x^2 - 1 \geq -1$ ，

当 $x > 1$ 时，①当 $a = 0$ 时， $f(x) = -x + 2 \in (-\infty, 1)$ ，不满足题意，

②当 $a < 0$ 时，函数开口向下，不满足题意，

③当 $a > 0$ 时，对称轴是 $x = \frac{1}{2a}$ ，

只需满足 $\begin{cases} \frac{1}{2a} \leq 1 \\ f(1) \geq -1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \frac{1}{2a} > 1 \\ f(\frac{1}{2a}) \geq -1 \end{cases}$ ，解得： $a \in [\frac{1}{12}, +\infty)$.

故选：A.

【点评】本题考查了分段函数问题，考查二次函数的性质，是基础题.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

(多选) 9. (5 分) 下列各组函数中是同一函数的是 ()

A. $y = \sqrt{-2x^3}$ 与 $y = x\sqrt{-2x}$

B. $y = \sqrt{x^2}$ 与 $y = |x|$

C. $y = \frac{\sqrt{5-x^2}}{x+1}$ 与 $y = \frac{\sqrt{5-x^2}}{|x+3|-2}$

D. $y = \sqrt{x+1}\sqrt{x-1}$ 与 $y = \sqrt{(x+1)(x-1)}$

【分析】由题意，根据函数的三要素，得出结论.

【解答】对于 A：易知 $x \leq 0$ ，所以 $y = \sqrt{-2x^3} = -x\sqrt{-2x}$ ，两函数定义域相同，解析式不同，所以不是同一函数；

对于 B：显然是同一函数；

对于 C：由 $\begin{cases} 5-x^2 \geq 0 \\ |x+3|-2 \neq 0 \end{cases}$ ，易知 $x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$ ，且 $x \neq -1$ ，所以 $y = \frac{\sqrt{5-x^2}}{|x+3|-2} = \frac{\sqrt{5-x^2}}{x+3-2} = \frac{\sqrt{5-x^2}}{x+1}$ ，

两函数定义域相同，解析式相同，所以是同一函数；

对于 D：定义域不同，所以不是同一函数，

故选：BC.

【点评】本题主要考查函数的三要素，属于基础题.

(多选) 10. (5 分) 下列说法正确的是 ()

- A. “ $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ” 是 “ $a < b$ ” 的充分不必要条件
- B. $A \cap B = \emptyset$ 是 $A = \emptyset$ 的必要不充分条件
- C. 若 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 则 “ $ab^2 > cb^2$ ” 的充要条件是 “ $a > c$ ”
- D. 若 $a, b \in \mathbf{R}$, 则 “ $a^2 + b^2 \neq 0$ ” 是 “ $|a| + |b| \neq 0$ ” 的充要条件

【分析】利用不等式性质及集合间的运算，结合命题的充分必要性分别判断各选项.

【解答】解：对于选项 A：取 $a=2, b=-1$ ，满足 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ，但是 $a > b$ ，

所以由 “ $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ” 推不出 “ $a < b$ ”，故 A 选项错误；

对于选项 B：由 $A \cap B = \emptyset$ ，即集合 A 与集合 B 没有公共部分，不能说明 $A = \emptyset$ ，

由 $A = \emptyset$ 可知 $A \cap B = \emptyset$ ，

所以 $A \cap B = \emptyset$ 是 $A = \emptyset$ 的必要不充分条件，故 B 选项正确；

对于选项 C，若 $a, b, c \in \mathbf{R}$ ，由 $ab^2 > cb^2$ 可得 $a > c$ ，

但是当 $b=0$ 时，由 $a > c$ ，可得 $ab^2 = cb^2$ ，故 C 错误；

对于选项 D：若 $a, b \in \mathbf{R}$ ，由 $a^2 + b^2 \neq 0$ 可知 a, b 不同时为 0，由 $|a| + |b| \neq 0$ ，可知 a, b 不同时为 0，

所以 “ $a^2 + b^2 \neq 0$ ” 是 “ $|a| + |b| \neq 0$ ” 的充要条件，故 D 选项正确.

故选：BD.

【点评】本题考查了充分条件和必要条件的定义，考查集合的包含关系，是中档题.

11. (5 分) 整数集 $\mathbf{Z}$ 中，被 5 除所得余数为 k 的所有整数组成一个“类”，记为 $[k]$ ，即 $[k] = \{5n+k | n \in \mathbf{Z}\}$ ，

其中 $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. 以下判断中不正确的是 ()

- A. $2023 \in [3]$
- B. $\mathbf{Z} = [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3] \cup [4]$
- C. $-2 \in [2]$
- D. 若 $a - b \in [0]$ ，则整数 a, b 属同一类

【分析】根据“类”的定义，对选项进行分析，得到答案.

【解答】解：A 选项， $2023 = 5 \times 404 + 3$ ，故 $2023 \in [3]$ ，A 正确；

B 选项，全体整数被 5 除的余数只能是 0, 1, 2, 3, 4，

故 $\mathbf{Z} = [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3] \cup [4]$ ，B 正确；

C 选项， $-2 = 5 \times (-1) + 3$ ，故 $-2 \in [3]$ ，C 错误；

D 选项, 由题意可知 $a - b$ 能被 5 整除, 故 a, b 分别被 5 除的余数相同,

故整数 a, b 属同一类, D 正确.

故选: C .

【点评】 本题考查集合新定义, 属于中档题.

(多选) 12. (5 分) 已知函数 $f(x), g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 其中 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函

数, 且 $f(x) + g(x) = ax^2 - x$, 若对于任意 $x_1 > x_2 > 1$, 都有 $\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} > 4$, 则实数 a 可以为

()

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

【分析】 由已知结合函数的奇偶性可求 $g(x)$, 由函数的单调性定义分析可得, 令 $h(x) = g(x) - 4x$, 则在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 结合二次函数的性质分析可得 a 的取值范围.

【解答】 解: 根据题意, $f(x) + g(x) = ax^2 - x$, 则 $f(-x) + g(-x) = ax^2 + x$,

两式相加可得 $f(x) + f(-x) + g(x) + g(-x) = 2ax^2$,

又由 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,

所以 $2g(x) = 2ax^2$, 即 $g(x) = ax^2$,

若对于任意 $x_1 > x_2 > 1$, 都有 $\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} > 4$, 变形可得

$$\frac{[g(x_1) - 4x_1] - [g(x_2) - 4x_2]}{x_1 - x_2} > 0,$$

令 $h(x) = g(x) - 4x = ax^2 - 4x$, 则 $h(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

若 $a = 0$, 则 $h(x) = -4x$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 不满足题意;

若 $a \neq 0$, 则 $h(x) = ax^2 - 4x$ 是对称轴为 $x = \frac{2}{a}$ 的二次函数,

若 $h(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 只需 $\begin{cases} a > 0 \\ \frac{2}{a} \leq 1 \end{cases}$, 解得 $a \geq 2$,

所以 a 的取值范围为 $[2, +\infty)$, 则 a 可以取值 3, 2,

故选: AB .

【点评】 本题考查函数的性质, 函数的单调性与奇偶性的应用, 二次函数的单调性问题, 考查函数思想, 属于中档题

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. (5分) 函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$ 的递增区间为 $[5, +\infty)$.

【分析】由 $x^2 - 4x - 5 \geq 0$ 得: $x \leq -1$ 或 $x \geq 5$, 利用复合函数的单调性可求得答案.

【解答】解: 由 $x^2 - 4x - 5 \geq 0$ 得: $x \leq -1$ 或 $x \geq 5$,

又 $t = x^2 - 4x - 5$ 为开口向上, 对称轴方程为 $x = 2$ 的抛物线, 在 $[5, +\infty)$ 上单调递增;

$y = \sqrt{t}$ 在定义域内单调递增,

由复合函数的单调性知 $f(x)$ 的单调递增区间 $[5, +\infty)$;

故答案为: $[5, +\infty)$.

【点评】本题考查复合函数的单调性, 考查运算求解能力, 属于基础题.

14. (5分) 已知幂函数 $f(x) = (m^2 - 2m - 2)x^{m-1}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $m = 3$.

【分析】根据已知条件, 结合幂函数的定义, 以及函数的单调性, 即可求解.

【解答】解: $m^2 - 2m - 2 = 1$, 解得 $m = 3$ 或 -1 ,

当 $m = -1$ 时, $f(x) = x^{-2}$, 不满足在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 舍去,

当 $m = 3$ 时, $f(x) = x^2$, 满足 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 符合题意,

故 $m = 3$.

故答案为: 3.

【点评】本题主要考查幂函数的概念, 属于基础题.

15. (5分) 已知 $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, 若集合 $\{a, \frac{b}{a}, 1\} = \{a^2, a+b, 0\}$, 则 $a^{2023} + b^{2024}$ 的值为 -1 .

【分析】由已知结合集合相等的条件及集合元素的互异性即可求解 a, b , 进而可求.

【解答】解: 若集合 $\{a, \frac{b}{a}, 1\} = \{a^2, a+b, 0\}$,

由于 $a \neq 0$,

故 $\frac{b}{a} = 0$, 即 $b = 0$, 则 $\{a, 0, 1\} = \{a^2, a, 0\}$,

所以 $\begin{cases} a^2 = 1 \\ a \neq 1 \end{cases}$, 解得 $a = -1$,

$a^{2023} + b^{2024} = -1 + 0 = -1$.

故答案为: -1 .

【点评】本题主要考查了集合元素的互异性及集合相等条件的应用, 属于基础题.

16. (5分) 已知 $a, b, c > 0$, 且 $(a-b)(\frac{4}{a} - \frac{1}{b}) \geq 1$, 则 $(a^2 + b^2 + c^2)(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2})$ 的最小值为 $\frac{49}{4}$.

【分析】根据基本不等式相关知识可解.

【解答】解: 利用基本不等式可得, $(a-b)\left(\frac{4}{a}-\frac{1}{b}\right)=5-\left(\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}\right)\leqslant 5-2\sqrt{4}=1$,

当且仅当 $a=2b$ 时, 取等号,

又 $(a-b)\left(\frac{4}{a}-\frac{1}{b}\right)\geqslant 1$, 则 $(a-b)\left(\frac{4}{a}-\frac{1}{b}\right)=1$, 得 $a=2b$.

此时, $(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=(5b^2+c^2)\left(\frac{5}{4b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=$

$$\frac{29}{4}+\frac{5c^2}{4b^2}+\frac{5b^2}{c^2}\geqslant \frac{29}{4}+2\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{49}{4},$$

当且仅当 $c^2=2b^2$ 时, 取等号,

则 $(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$ 的最小值为 $\frac{49}{4}$,

故答案为: $\frac{49}{4}$.

【点评】本题考查基本不等式的运用, 属于基础题.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 设全集 $U=\mathbb{R}$, 集合 $A=\{x|1\leqslant x\leqslant 5\}$, 集合 $B=\{x|-1-2a\leqslant x\leqslant a-2\}$.

(1) 当 $a=4$ 时, 求 $A\cap B$ 及 $A\cup B$, $(\complement_U A)\cap B$;

(2) 若 “ $x\in A$ ” 是 “ $x\in B$ ” 的充分条件, 求实数 a 的取值范围.

【分析】(1) 代入 $a=4$ 化简集合 B , 再利用集合的交并补运算即可得解;

(2) 由充分条件的性质推得 $A\subseteq B$, 从而得到关于 a 的不等式组, 解之即可得解.

【解答】解: (1) 当 $a=4$ 时, $B=\{x|-1-2a\leqslant x\leqslant a-2\}=\{x|-9\leqslant x\leqslant 2\}$,

又 $A=\{x|1\leqslant x\leqslant 5\}$, $U=\mathbb{R}$, 则 $\complement_U A=\{x|x<1 \text{ 或 } x>5\}$,

所以 $A\cap B=\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$, $A\cup B=\{x|-9\leqslant x\leqslant 5\}$, $(\complement_U A)\cap B=\{x|-9\leqslant x<1\}$.

(2) 若 “ $x\in A$ ” 是 “ $x\in B$ ” 的充分条件, 则 $A\subseteq B$,

所以 $\begin{cases} -1-2a\leqslant 1 \\ a-2\geqslant 5 \end{cases}$, 解得 $a\geqslant 7$.

所以实数 a 的取值范围为 $[7, +\infty)$.

【点评】本题主要考查了集合的交集, 并集及补集运算, 还考查了集合包含关系的应用, 属于基础题.

18. (12 分) 已知集合 $A=\{x|x^2-3x-4=0\}$, 集合 $B=\{x|x^2+ax+1=0\}$

(1) 若 $A\cap B=\{4\}$, 求 $A\cup B$;

(2) 若 $A\cap B=B$, 求实数 a 的取值范围.

【分析】(1) 推导出 $4 \in B$, 即 $x=4$ 是方程 $x^2+ax+1=0$ 的根, 解得 $a=-\frac{17}{4}$, 求出 B , 由此能求出 $A \cup B$.

(2) 由 $A \cap B = B$, 得 $B \subseteq A$, 当 $-2 < a < 2$ 时, $B = \emptyset$, 满足 $A \cap B = B$, 当 $a \leq -2$ 或 $a \geq 2$ 时, $B \neq \emptyset$, 由 $B \subseteq A$, 得 $B = \{-1\}$ 或 $B = \{4\}$ 或 $B = \{-1, 4\}$, 由此能求出实数 a 的取值范围.

【解答】解: (1) 因为 $A = \{x | x^2 - 3x - 4 = 0\} = \{-1, 4\}$, 且 $A \cap B = \{4\}$,

所以 $4 \in B$, 即 $x=4$ 是方程 $x^2+ax+1=0$ 的根,

所以 $16+4a+1=0$, 得 $a=-\frac{17}{4}$,

则 $B = \{x | x^2 - \frac{17}{4}x + 1 = 0\} = \{\frac{1}{4}, 4\}$,

所以 $A \cup B = \{-1, \frac{1}{4}, 4\}$.

(2) 因为 $A \cap B = B$, 所以 $B \subseteq A$,

① 当 $-2 < a < 2$ 时, $B = \emptyset$, 满足 $A \cap B = B$,

② $a \leq -2$ 或 $a \geq 2$ 时, $B \neq \emptyset$,

因为 $B \subseteq A$, 所以 $B = \{-1\}$ 或 $B = \{4\}$ 或 $B = \{-1, 4\}$,

(i) 当 $B = \{-1\}$ 时, $\begin{cases} 1-a+1=0 \\ a^2-4=0 \end{cases}$, 得 $a=2$,

(ii) 当 $B = \{4\}$ 时, $\begin{cases} 16+4a+1=0 \\ a^2-4=0 \end{cases}$, 无解,

(iii) 当 $B = \{-1, 4\}$ 时, $\begin{cases} 16+4a+1=0 \\ 1-a+1=0 \end{cases}$, 无解,

综上所述实数 a 的取值范围是 $\{a | -2 < a \leq 2\}$.

【点评】本题考查集合的运算, 考查交集、并集定义等基础知识, 考查运算求解能力, 是基础题.

19. (12分) 设函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x \geq 0$, $f(x) = \frac{-x^2}{x^2+1}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 判断并证明 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的单调性;

【分析】(1) 设 $x < 0$, 则 $-x > 0$, 求出 $f(-x)$ 的表达式, 结合函数的奇偶性分析可得答案;

(2) 利用作差法分析可得答案.

【解答】解: (1) 根据题意, 设 $x < 0$, 则 $-x > 0$,

故 $f(-x) = \frac{-(-x)^2}{(-x)^2+1} = -\frac{x^2}{x^2+1}$,

又由 $f(x)$ 为奇函数, 则 $f(x) = -f(-x) = \frac{x^2}{x^2+1}$,

$$\text{故 } f(x) = \begin{cases} \frac{-x^2}{x^2+1}, & x \geq 0 \\ \frac{x^2}{x^2+1}, & x < 0 \end{cases};$$

(2) 根据题意, 当 $x \geq 0$, $f(x) = \frac{-x^2}{x^2+1} = \frac{1}{1+x^2} - 1$, $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的单调递减,

证明: 设 $0 \leq x_1 < x_2$,

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \left(\frac{1}{1+x_1^2} - 1 \right) - \left(\frac{1}{1+x_2^2} - 1 \right) = - \frac{x_1^2 - x_2^2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} = - \\ &= \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}, \end{aligned}$$

又由 $0 \leq x_1 < x_2$,

则 $x_1 - x_2 < 0$, 则有 $f(x_1) - f(x_2) > 0$,

函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的单调递减.

【点评】 本题考查函数奇偶性的性质以及应用, 涉及函数的解析式, 属于基础题.

20. (12 分) 已知幂函数 $f(x) = (2m^2 - 5m + 3)x^m$ 的定义域为全体实数 R .

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若 $f(x) > 3x + kx - 1$ 在 $[0, 1)$ 上恒成立, 求实数 k 的取值范围.

【分析】 (1) 由 $2m^2 - 5m + 3 = 1$, 求解, 再验证即可;

(2) 由题意可得 $x^2 - 3x - kx + 1 > 0$ 在 $[0, 1)$ 上恒成立, 即 $k < x + \frac{1}{x} - 3$ 在 $x \in (0, 1)$ 恒成立, 结合对勾函数的性质求解即可.

【解答】 解: (1) $\because f(x) = (2m^2 - 5m + 3)x^m$ 是幂函数,

$\therefore 2m^2 - 5m + 3 = 1$, 解得 $m = \frac{1}{2}$ 或 $m = 2$,

$\therefore$ 当 $m = \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 定义域不是 R , 不符合题意,

$\therefore m = 2$,

即 $f(x) = x^2$;

(2) 由 (1) 得 $f(x) = x^2$,

$f(x) > 3x + kx - 1$ 在 $[0, 1)$ 上恒成立,

即 $x^2 > 3x + kx - 1$ 在 $[0, 1)$ 上恒成立,

$\therefore x^2 - 3x - kx + 1 > 0$ 在 $[0, 1)$ 上恒成立,

当 $x=0$ 时, $1 > 0$ 恒成立, 此时 $k \in \mathbf{R}$;

当 $x \in (0, 1)$ 时, $k < x + \frac{1}{x} - 3$ 恒成立,

由对勾函数的性质可知 $y = x + \frac{1}{x} - 3$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

$y > 1 + 1 - 3 = -1$,

所以 $k \leq -1$,

故实数 k 的取值范围为 $(-\infty, -1]$.

【点评】 本题考查了幂函数的性质, 转化思想及对勾函数的性质, 属于中档题.

21. (12 分) 设矩形 $ABCD$ ($AB > AD$) 的周长为 12cm , 把 $\triangle ABC$ 沿 AC 向 $\triangle ADC$ 折叠, AB 折过去后交 DC 于点 P . 设 $AB = x\text{cm}$, 记 $\triangle ADP$ 的面积为函数 $f(x)$.

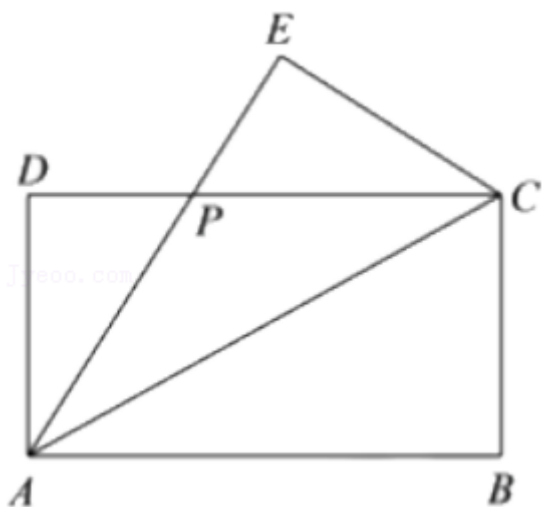
(1) 求 $f(x)$ 的解析式, 并写出其定义域;

(2) 求 $\triangle ADP$ 的最大面积及相应 x 的值.

【分析】 (1) 由题设有 $\triangle ABC \cong \triangle AEC$ 、 $\triangle ADP \cong \triangle CEP$, $AD = 6 - x$, 应用勾股定理可得 $PD = 6 - \frac{18}{x}$, 进而有 $x \in (3, 6)$, 利用三角形面积公式即可求解;

(2) 利用基本不等式求最值, 注意取值条件即可得结果.

【解答】 解: (1) 如下图所示 $\triangle ABC \cong \triangle AEC$ 且 $AB = AE = x$, 则 $BC = EC = AD = 6 - x$, $x \in (0, 6)$,



又 $\triangle ADP \cong \triangle CEP$, 若 $PD = PE = a$, 则 $PA = PC = x - a$,

而 $\angle E = \angle D = 90^\circ$, 故 $a^2 + (6 - x)^2 = (x - a)^2$, 可得 $a = 6 - \frac{18}{x} > 0$, 则 $x \in (3, 6)$,

$$\text{所以 } S_{\triangle ADP} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot PD = (6-x) \times (3 - \frac{9}{x}) = 27 - 3x - \frac{54}{x},$$

$$\text{则 } f(x) = 27 - 3x - \frac{54}{x}, \text{ 定义域为 } x \in (0, 6);$$

$$(2) f(x) = 27 - (3x + \frac{54}{x}) \leq 27 - 2\sqrt{3x \cdot \frac{54}{x}} = 27 - 18\sqrt{2},$$

$$\text{当且仅当 } 3x = \frac{54}{x}, \text{ 即 } x = 3\sqrt{2} \text{ 时等号成立,}$$

综上, $x = 3\sqrt{2} \text{ cm}$ 时 $\triangle ADP$ 的面积最大, 最大面积为 $(27 - 18\sqrt{2}) \text{ cm}^2$.

【点评】 本题考查了函数模型的实际应用, 属于中档题.

$$22. (12 \text{ 分}) \text{ 已知函数 } f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}, \quad g(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

(1) 判断 $f(x)$ 的奇偶性, 并求 $f(x)$ 的值域;

(2) 设函数 $F(x) = f(x) + 2ag(x)$ ($a < 0$), 求 $F(x)$ 的最大值 $h(a)$, 并求 $h(a)$ 的最小值.

【分析】 (1) 求出函数的定义域, 求出 $f(-x)$ 的解析式, 可得函数为偶函数, 再求函数的值域;

(2) 由 (1) 知 $f^2(x) = 2 + 2\sqrt{1-x^2}$, 得 $g(x) = \frac{f^2(x) - 2}{2}$, 令 $t = f(x)$, 转化为求函数 $\Phi(t) = at^2 + t - 2a$ 在 $[\sqrt{2}, 2]$ 上的最大值, 分 $a \leq -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $-\frac{\sqrt{2}}{4} < a < -\frac{1}{4}$ 和 $-\frac{1}{4} \leq a < 0$ 三种情况讨论, 即可求出 $h(a)$,

然后求出 $h(a)$ 的最小值即可.

【解答】 解: (1) 要使函数有意义, 则 $\begin{cases} 1+x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases}$,

解得 $-1 \leq x \leq 1$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 关于原点对称,

$$\text{且 } f(-x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1-(-x)} = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = f(x),$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 是偶函数;

$$f^2(x) = (\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2},$$

$$\because -1 \leq x \leq 1, \therefore 0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1,$$

$$\therefore 2 \leq 2 + 2\sqrt{1-x^2} \leq 4, \text{ 即函数 } f^2(x) \text{ 的值域是 } [2, 4],$$

$$\text{又 } f(x) \geq 0,$$

$$\therefore f(x) \text{ 的值域为 } [\sqrt{2}, 2].$$

$$(2) \because f^2(x) = 2 + 2\sqrt{1-x^2}, \therefore \sqrt{1-x^2} = \frac{f^2(x) - 2}{2},$$

$$\therefore g(x) = \frac{f^2(x) - 2}{2}, \text{ 令 } t = f(x),$$

$$\therefore F(x) = \Phi(t) = at^2 + t - 2a, \text{ 又 } a < 0,$$

$$\therefore \Phi(t) = at^2 + t - 2a \text{ 的图象是开口向下的抛物线, 且其对称轴为直线 } t = -\frac{1}{2a},$$

$$\textcircled{1} \text{ 若 } t = -\frac{1}{2a} \in (0, \sqrt{2}], \text{ 即 } a \leq -\frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\Phi(t) \text{ 在 } [\sqrt{2}, 2] \text{ 上单调递减, 则 } h(a) = \Phi(\sqrt{2}) = \sqrt{2};$$

$$\textcircled{2} \text{ 若 } t = -\frac{1}{2a} \in (\sqrt{2}, 2), \text{ 即 } -\frac{\sqrt{2}}{4} < a < -\frac{1}{4}, \text{ 函数 } \varphi(t) \text{ 在 } [\sqrt{2}, 2] \text{ 先增后减,}$$

$$\text{则 } h(a) = \Phi\left(-\frac{1}{2a}\right) = -2a - \frac{1}{4a};$$

$$\textcircled{3} \text{ 若 } t = -\frac{1}{2a} \in [2, +\infty), \text{ 即 } -\frac{1}{4} \leq a < 0, \text{ 则 } h(a) = \Phi(2) = 2a + 2;$$

$$\text{综上可得, } h(a) = \begin{cases} \sqrt{2}, & a \leq -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -2a - \frac{1}{4a}, & -\frac{\sqrt{2}}{4} < a < -\frac{1}{4} \\ 2a + 2, & -\frac{1}{4} \leq a < 0 \end{cases}$$

$$\text{当 } a \leq -\frac{\sqrt{2}}{4} \text{ 时, } h(a) = \sqrt{2},$$

$$\text{当 } -\frac{\sqrt{2}}{4} < a < -\frac{1}{4}, h(a) = -2a - \frac{1}{4a} \geq 2\sqrt{(-2a) \cdot \left(-\frac{1}{4a}\right)} = \sqrt{2},$$

$$\text{当且仅当 } -2a = -\frac{1}{4a}, \text{ 即 } a = -\frac{\sqrt{2}}{2} \notin \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{1}{4}\right), \therefore \text{取不到等号;}$$

$$\text{当 } -\frac{1}{4} \leq a < 0 \text{ 时, } h(a) = 2a + 2 \geq 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) + 2 = \frac{3}{2} > \sqrt{2}.$$

$$\therefore a \leq -\frac{\sqrt{2}}{4} \text{ 时, } h(a) \text{ 取到最小值, 且最小值为 } \sqrt{2}.$$

【点评】 本题考查分段函数的性质的应用, 属于中档题.