江苏省天一中学 2023-2024 学年 12 月阶段测试卷

高一数学试卷

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. 已知集合 $M=\{x|0\le x\le 2\}$， $N=\{x|y=\log_2(1-x)\}$，则 $M\cap N$ 为（　　）

A. $[0,1]$　　B. $[0,1)$　　C. $(1,2]$　　D. $[1,2]$

【答案】B

【解析】

【分析】先化简集合 N，再利用交集定义即可求得 $M\cap N$.

【详解】由 $1-x>0$，可得 $x<1$，

$\therefore N=\{x|x<1\}$，

$\therefore M\cap N=\{x|0\le x\le 2\}\cap\{x|x<1\}=\{x|0\le x<1\}$.

故选：B

2. 已知条件 $p:2x-4<0$，条件 $q:3^{x^2-5x+6}>1$，则 p 是 q 的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】解不等式可分别求得条件 p,q，由此可得推出关系，进而确定结果.

【详解】由 $2x-4<0$ 得： $x<2$；

由 $3^{x^2-5x+6}>1$ 得： $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)>0$，解得： $x<2$ 或 $x>3$；

$\therefore 2x-4<0\Rightarrow 3^{x^2-5x+6}>1$， $3^{x^2-5x+6}>1$ ¿ $2x-4<0$，

$\therefore p$ 是 q 的充分不必要条件.

故选：A.

3. 设 α 是第二象限角， $P(x,1)$ 为其终边上一点，且 $\cos\alpha=\frac{1}{3}x$，则 $\tan\alpha=$（　　）

A. $-2\sqrt{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$　　D. $-\frac{\sqrt{2}}{8}$

【答案】C

【解析】

【分析】按三角函数的定义计算即可

【详解】依题意有 $\cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{x}{3}$ 且 $x<0$

故 $x=-2\sqrt{2}$， $\tan\alpha=\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

故选：C

4. 若函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x>0$ 时， $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$，则 $f(x)$ 的值域为（　　）

A. $(-1,1)$　　B. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　C. $(-1,0)\cup(0,1)$　　D. $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

【答案】A

【解析】

【分析】结合指数函数性质可得 $x>0$ 时， $f(x)$ 的取值范围，再根据奇函数的对称性求得 $x\le0$ 时 $f(x)$ 的取值范围，即可得答案.

【详解】由题意知当 $x>0$ 时， $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\in(0,1)$，且 $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

由于函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，则 $f(0)=0$，

根据奇函数图象关于原点对称可知，当 $x<0$ 时， $f(x)\in(-1,0)$，且 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，

故 $f(x)\in(-1,1)$，

故选：A

5. 已知 $\cos(-x)+\sin(\pi-x)=\dfrac{3}{5}$，则 $\sin x\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=$（　　）

A. $\dfrac{16}{25}$　　B. $-\dfrac{16}{25}$　　C. $\dfrac{8}{25}$　　D. $-\dfrac{8}{25}$

【答案】D

【解析】

【分析】由诱导公式有 $\sin x\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=\sin x\cos x$，已知 $\cos(-x)+\sin(\pi-x)=\dfrac{3}{5}$，由诱导公式有 $\cos x+\sin x=\dfrac{3}{5}$，两边同时平方即可求值.

【详解】由 $\cos(-x)+\sin(\pi-x)=\dfrac{3}{5}$ 得： $\cos x+\sin x=\dfrac{3}{5}$，

两边平方得：$1+2\sin x\cos x=\frac{9}{25}$，解得：$\sin x\cos x=-\frac{8}{25}$，

$\therefore \sin x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin x\cos x=-\frac{8}{25}$.

故选：D

6. 设 $a=\log_{0.1}0.2$，$b=\log_{1.1}0.2$，$c=1.2^{0.2}$，则（　　）

A. $b>a>c$　　B. $c>b>a$　　C. $c>a>b$　　D. $a>c>b$

【答案】C

【解析】

【分析】根据对数函数和指数函数的单调性结合中间量法即可得解.

【详解】因为 $0=\log_{0.1}1<a=\log_{0.1}0.2<\log_{0.1}0.1=1$，

$b=\log_{1.1}0.2<\log_{1.1}1=0$，

$c=1.2^{0.2}>1.2^{0}=1$，

所以 $c>a>b$.

故选：C.

7. 若存在正实数 x，y 满足于 $\frac{4}{y}+\frac{1}{x}=1$，且使不等式 $x+\frac{y}{4}<m^2-3m$ 有解，则实数 m 的取值范围是（　　）

A. $(-4,1)$　　B. $(-1,4)$

C. $(-\infty,-4)\cup(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$

【答案】D

【解析】

【分析】利用乘“1”法及基本不等式求出 $x+\frac{y}{4}$ 的最小值，即可得到 $m^2-3m>4$，解一元二次不等式即可.

【详解】因为 $x>0$，$y>0$ 且 $\frac{4}{y}+\frac{1}{x}=1$，

所以 $x+\frac{y}{4}=\left(x+\frac{y}{4}\right)\cdot\left(\frac{4}{y}+\frac{1}{x}\right)=2+\frac{4x}{y}+\frac{y}{4x}\geq 2+2\sqrt{\frac{4x}{y}\cdot\frac{y}{4x}}=4$.

当且仅当 $\frac{4x}{y}=\frac{y}{4x}$，即 $y=4x=8$ 时等号成立，

所以 $m^2-3m>4$，即 $(m-4)(m+1)>0$，解得 $m<-1$ 或 $m>4$，

所以 m 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$.

故选：D.

8. 已知 $a>0$，且 $a\neq 1$，函数 $f(x)=\begin{cases}2a-x, x>2\\ |a^x-a|, x\leq 2\end{cases}$，若关于 x 的方程 $f(x)=1$ 有两个不相等的实数根，则 a 的取值范围是（　　）

A. $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},1\right)$　　B. $\left(0,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$　　C. $\left(1,\frac{3}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{3}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

【答案】D

【解析】

【分析】对 a 分 $0<a<1$ 和 $a>1$ 两种情况，当 $0<a<1$ 根据函数性质判断即可，当 $a>1$ 时，根据题意列不等式计算即可.

【详解】（1）$0<a<1$ 时，

①$x>2$，$f(x)=2a-x=1$ 无实数根；

②$x\leq 2$，$f(x)=|a^x-a|=1$ 有一个实数根；

故与题意矛盾，不成立；

（2）$a>1$ 时，

①若 $x>2$，$f(x)=2a-x=1$ 有一个实数根，则 $2a-2>1$，解得：$a>\frac{3}{2}$，

若 $x>2$，$f(x)=2a-x=1$ 无实数根，则 $a\leq\frac{3}{2}$；

②$x\leq 2$，$f(x)=|a^x-a|=1$ 在 $(-\infty,1)$ 上必有一个实数根；

若 $a^2-a\geq 1$，即 $a^2-a-1\geq 0$，a £ $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 或 a ³ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，则 $f(x)=|a^x-a|=1$ 在 $(1,2]$ 上有一个实数根，

若 $a^2-a<1$，即 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<a<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，则 $f(x)=|a^x-a|=1$ 在 $(1,2]$ 上无实数根；

综上，a 的取值范围是 $\left(\frac{3}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

故选：D.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

9. 以下运算正确的是（　　）

A. $\lg 5+\lg 2=1$

B. $\log_4 3=2\log_2 3$

C. $25^{\log_5 3}=9$

D. $\lg 5\div\lg 2=\log_5 2$

【答案】AC

【解析】

【分析】利用对数运算法则计算，得到答案.

【详解】A 选项，$\lg 5+\lg 2=\lg 10=1$，A 正确；

B 选项，$\log_4 3=\log_{2^2} 3=\frac{1}{2}\log_2 3$，B 错误；

C 选项，$25^{\log_5 3}=5^{2\log_5 3}=5^{\log_5 3^2}=3^2=9$，C 正确；

D 选项，$\lg 5\div\lg 2=\log_2 5$，D 错误.

故选：AC

10. 下列判断正确的是（　　）

A. 若 $\sin\beta=\frac{1}{2}$，则 $\beta=\frac{\pi}{6}$

B. 已知扇形的面积是 2cm^2，扇形的圆心角的弧度数为 4，则扇形半径是 1cm

C. $\forall\alpha\in\mathbf{R}$，$\cos\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$

D. 角 β 为第四象限角的充要条件是 $\cos\beta>0$ 且 $\sin\beta<0$

【答案】BCD

【解析】

【分析】根据正弦值可求得 β，知 A 错误；根据扇形面积公式可知 B 正确；利用诱导公式可知 C 正确；根据三角函数值在各象限内的符号可知 D 正确.

【详解】对于 A，若 $\sin\beta=\frac{1}{2}$，则 $\beta=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ 或 $\beta=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，A 错误；

对于 B，设扇形半径为 r，则 $2=\frac{1}{2}\times 4r^2$，解得：$r=1$，即扇形半径为 1cm，B 正确；

对于 C，$\cos\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left[4\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$，C 正确；

对于 D，当 β 为第四象限角时，$\cos\beta>0$ 且 $\sin\beta<0$，充分性成立；

当 $\cos\beta>0$ 且 $\sin\beta<0$ 时，$\beta\in\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,2k\pi\right)\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，$\therefore\beta$ 为第四象限角，必要性成立；D 正确.

故选：BCD.

11. 已知函数 $f\left(x\right)=\ln\left(x^2+x+m\right)\left(m\in\mathbf{R}\right)$，则（　　）

A. 当 $m>\frac{1}{4}$ 时，$f\left(x\right)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$

B. $f\left(x\right)$ 一定存在最小值

C. $f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{1}{2}$ 对称

D. 当 $m\geq 1$ 时，$f\left(x\right)$ 的值域为 $\mathbf{R}$

【答案】AC

【解析】

【分析】根据对数函数的性质及特殊值一一判断.

【详解】对于 A：若 $m>\frac{1}{4}$，则 $\Delta=1-4m<0$，则二次函数 $y=x^2+x+m$ 的图象恒在 x 轴的上方，

即 $x^2+x+m>0$ 恒成立，所以 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，故 A 正确；

对于 B：若 $m=0$，则 $f\left(x\right)=\ln\left(x^2+x\right)$ 的定义域为 $\left(-\infty,-1\right)\cup\left(0,+\infty\right)$，值域为 $\mathbf{R}$，没有最小值，故 B 错误；

对于 C：由于函数 $y=\ln\left(x^2+m-\frac{1}{4}\right)$ 为偶函数，其图象关于 y 轴对称，

将该函数的图象向左平移 $\frac{1}{2}$ 个单位长度即可得到函数 $f\left(x\right)=\ln\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+m-\frac{1}{4}\right]=\ln\left(x^2+x+m\right)$ 的图象，

此时对称轴为直线 $x=-\frac{1}{2}$，故 C 正确；

对于 D：若 $m\geq 1$，则 $y=x^2+x+m=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+m-\frac{1}{4}\geq\frac{3}{4}$，故 $f\left(x\right)$ 的值域不是 $\mathbf{R}$，故 D 错误.

故选：AC

12. 定义在 R 上的函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)$，当 $x<0$ 时，$f\left(x\right)>0$，则下列说法正确的是（　　）

A. $f\left(x\right)$ 在 R 上单调递减

B. 复合函数 $f\left(\sin x\right)$ 为偶函数

C. 复合函数 $f\left(\cos x\right)$ 为偶函数

D. 当 $x\in\left[0,2\pi\right]$，不等式 $f\left(\sin x\right)+f\left(-\frac{1}{2}\right)<0$ 的解集为 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$

【答案】ACD

【解析】

【分析】A，应用赋值法，$x+y=x_1$，$x=x_2$，则 $y=x_1-x_2$，结合单调性的定义即可判断，B，举反例 $f\left(x\right)=-x$，即可判断；C，结合偶函数的定义即可判断；D 结合赋值法与抽象函数的单调性即可求解.

【详解】A.正确，设 $x+y=x_1$，$x=x_2$，则 $y=x_1-x_2$，

$\therefore f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)+f\left(x_1-x_2\right)$，$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=f\left(x_1-x_2\right)$，

设 $x_1-x_2<0$，即 $x_1<x_2$，

$\because$ 当 $x<0$ 时，$f\left(x\right)>0$，

$\because$ 当 $x_1-x_2<0$ 时，$f\left(x_1-x_2\right)>0$，即 $f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)$，

$\therefore f\left(x\right)$ 在 R 上单调递减；

B.错误，取一个符合要求的具体函数，如：$f\left(x\right)=-x$，则 $f\left(\sin x\right)=-\sin x$，为奇函数；

C.正确，$f(\cos x)$ 的定义域为，且 $\cos(-x)=\cos x$，则 $\boldsymbol{f(\cos(-x))=f(\cos x)}$，所以 $f(\cos x)$ 为偶函数；

D.正确，由 $f\left(\sin x\right)+f\left(-\frac{1}{2}\right)=f(\sin x-\frac{1}{2})<0$，又 $f\left(x\right)$ 在 R 上单调递减，

令 $x=y=0$，则 $f(0)=2f(0)$，则 $f(0)=0$，

则 $\sin x-\frac{1}{2}>0$，即 $\sin x>\frac{1}{2}$，

$\because x\in\left[0,2\pi\right]$，$\therefore f\left(x\right)\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$.

故选：ACD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 计算：$\sin\frac{23\pi}{6}-\tan\frac{3\pi}{4}\cdot\ln e-\cos\frac{13\pi}{3}=$________.

【答案】0

【解析】

【分析】根据诱导公式、对数运算求得正确答案.

【详解】原式$=\sin\left(4\pi-\frac{\pi}{6}\right)-\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\cdot 1-\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-(-1)\times 1-\cos\frac{\pi}{3}=-\sin\frac{\pi}{6}+1-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}=0$.

故答案为：0

14. 计算：函数 $f(x)=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}}$ 的单调递减区间为________.

【答案】$(1,+\infty)$

【解析】

【分析】先考虑 $f(x)$ 的定义域，再利用复合函数“同增异减”原则，结合各层函数的单调性即可得解.

【详解】$\because \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}>0$，\ $f(x)$ 的定义域为 R，

根据“同增异减”法则：求函数 $f(x)=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}}$ 的单调递减区间，即求 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}$ 的单调递减区间，

而要求函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}$ 的单调递减区间，即要求函数 $y=x^2-2x$ 的单调递增区间，

$\because y=x^2-2x$ 的对称轴为 $x=1$，$\therefore y=x^2-2x$ 的单调递增区间为 $(1,+\infty)$，

故 $f(x)=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}}$ 的单调递减区间为 $(1,+\infty)$.

故答案为：$(1,+\infty)$.

15. 用二分法求方程 $x^2=2$ 的正实数根的近似解（精确度 0.0001）时，如果我们选取初始区间是 $[1.4,1.5]$，则要达到精确度至少需要计算的次数是________.

【答案】10

【解析】

【分析】由精度相关计算公式可得答案.

【详解】设要达到精确度需要计算 x 次，且 x 为整数，

由题意可得：$(1.5-1.4)\times\left(\frac{1}{2}\right)^x\le 0.0001\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^x\le\frac{1}{1000}$，解得：$x\ge 10$.

故答案为：10

16. 已知函数 $f\left(x\right)=1+\sin\left(\pi x\right)+x\cos\left[\left(\dfrac{3}{2}-x\right)\pi\right]$，则 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-3,5\right]$ 内的所有零点之和为________.

【答案】8

【解析】

【分析】利用诱导公式变形，将 $f\left(x\right)$ 的零点转化为方程 $\left(x-1\right)\sin\pi x=1$ 的根的问题，分类讨论再结合函数的对称性计算即可.

【详解】$f\left(x\right)=1+\sin\left(\pi x\right)+x\cos\left[\left(\dfrac{3}{2}-x\right)\pi\right]=1-\left(x-1\right)\sin\left(\pi x\right)$，

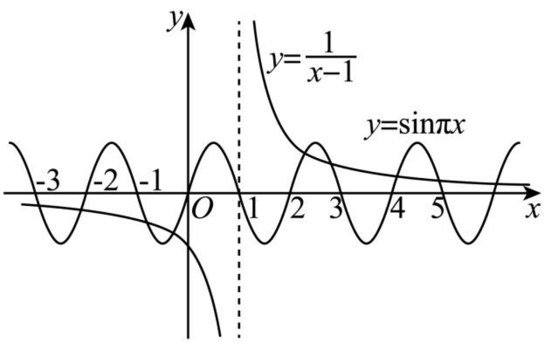
则 $f\left(x\right)=0$ 等价于 $\left(x-1\right)\sin\pi x=1$

若 $x=1$ 显然上面方程不成立；

当 $x\neq 1$，则 $\left(x-1\right)\sin\pi x=1$ 可化为 $\sin\pi x=\dfrac{1}{x-1}$

易知 $y=\sin\pi x$ 和 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 都关于 $\left(1,0\right)$ 中心对称，如下图所示，在 $\left[-3,5\right]$ 上有 8 个交点，不妨设其横坐标依次为 $x_1,x_2\ldots x_8$，则 $\sum\limits_{i=1}^{8}x_i=4\times2=8$，即所有零点之和为 8.

故答案为：8



【点睛】本题考察函数与方程零点问题，属于压轴题.关键在于利用函数的性质，找到其对称中心及区间内的零点个数.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.

17. 已知集合 $A=\left\{x\,|\,8\leq 2^x<64\right\}$，$B=\left\{x\,|\,x^2-13x+36<0\right\}$.

（1）分别求 $A\cap B$，$A\cup B$；

（2）已知 $C=\{x \mid a<x\leq a+1\}$，若 $C\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

【答案】（1）$A\cap B=(4,6)$，$A\cup B=[3,9)$

（2）$4\leq a<8$

【解析】

【分析】（1）根据指数函数的单调性，结合一元二次不等式的解法、集合交并集的定义进行求解即可；

（2）根据子集的性质进行求解即可.

【小问1详解】

$\because 8\leq 2^x<64$，$\therefore 2^3\leq 2^x<2^6$，解得 $3\leqslant x<6$，则 $A=\{x \mid 3\leq x<6\}$，

$\because x^2-13x+36<0$，$\therefore (x-4)(x-9)<0$，解得 $4<x<9$，则 $B=\{x \mid 4<x<9\}$，

$\therefore A\cap B=(4,6)$，$A\cup B=[3,9)$；

【小问2详解】

$\because C\subseteq B$，$C=\{x \mid a<x\leq a+1\}$，

$$\therefore \begin{cases} a\geq 4 \\ a+1<9 \end{cases} \Rightarrow 4\leq a<8.$$

18. 已知函数 $f(x)=\log_2(x^2-2ax+3)$.

（1）当 $a=-2$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（2）$\forall x\in \mathbf{R}$，$f(x)\geq 1$ 恒成立，求 a 的取值范围.

【答案】（1）增区间为 $(-1,+\infty)$，减区间为 $(-\infty,-3)$

（2）$-1\leq a\leq 1$

【解析】

【分析】（1）根据对数复合函数的单调性即可求解，

（2）根据一元二次不等式恒成立，结合判别式即可求解.

【小问1详解】

当 $a=-2$ 时，$f(x)=\log_2(x^2+4x+3)$，

$\therefore x^2+4x+3>0$，$(x+3)(x+1)>0$，解得：$x<-3$ 或 $x>-1$，

令 $t=x^2+4x+3$，$t>0$，则 $y=\log_2 t$，

$\because t=x^2+4x+3$ 的对称轴为 $x=-2$，

$\therefore t=x^2+4x+3$ 的增区间为 $(-1,+\infty)$，减区间为 $(-\infty,-3)$，

又 $y=\log_2 t$ 为增函数，

$\therefore$ 根据“同增异减”法则：$f(x)=\log_2(x^2+4x+3)$ 的增区间为 $(-1,+\infty)$，减区间为 $(-\infty,-3)$；

【小问 2 详解】

$\because \forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\ge 1$ 恒成立，

$\therefore \log_2(x^2-2ax+3)\ge 1=\log_2 2$ 恒成立，

$\therefore x^2-2ax+3\ge 2$，即 $x^2-2ax+1\ge 0$ 恒成立，

$\therefore \Delta=4a^2-4\le 0$，解得：$-1\le a\le 1$

19. 在平面直角坐标系：xOy 中，角 α 以为 Ox 始边，它的终边与单位圆交于第二象限内的点 $P(m,n)$.

（1）若 $n=\dfrac{12}{13}$，求 $\tan\alpha$ 及 $\dfrac{2\sin(\pi+\alpha)+\cos(-\alpha)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)+2\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}$ 的值；

（2）若 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$，求点 P 的坐标.

【答案】（1）$\tan\alpha=-\dfrac{12}{5}$，$\dfrac{29}{2}$

（2）$\left(-\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$

【解析】

【分析】（1）由三角函数的定义，$n=\dfrac{12}{13}$ 有 $\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$，利用同角三角函数的关系求出 $\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$，利用诱导公式化简 $\dfrac{2\sin(\pi+\alpha)+\cos(-\alpha)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)+2\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}$ 求值即可；

（2）由已知条件结合同角三角函数的平方关系，求出 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$，由三角函数的定义，可求点 P 的坐标.

【小问 1 详解】

角 α 以为 Ox 始边，它的终边与单位圆交于第二象限内的点 $P(m,n)$，$n=\dfrac{12}{13}$，

$\therefore \sin\alpha=\dfrac{12}{13}$，且 $\cos\alpha<0$，$\tan\alpha<0$，

$\therefore \cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=-\frac{5}{13}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{12}{5}$，

$$\therefore \frac{2\sin(\pi+\alpha)+\cos(-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{-2\sin\alpha+\cos\alpha}{-\sin\alpha-2\cos\alpha}=\frac{-2\times\frac{12}{13}+\left(-\frac{5}{13}\right)}{-\frac{12}{13}-2\times\left(-\frac{5}{13}\right)}=\frac{29}{2};$$

【小问 2 详解】

$\because \sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$，

$\therefore (\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\frac{1}{25}$，整理得：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{25}$，

即 $1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{25}$，解得：$\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{12}{25}$，

$\therefore \sin\alpha\left(\frac{1}{5}-\sin\alpha\right)=-\frac{12}{25}$，整理得：$25\sin^2\alpha-5\sin\alpha-12=0$，

$\therefore (5\sin\alpha-4)(5\sin\alpha+3)=0$，

$\because$ 角 α 以为 Ox 始边，它的终边与单位圆交于第二象限内的点 $P(m,n)$，

$\therefore \sin\alpha=\frac{4}{5}$（舍去负值），$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，

$\therefore P\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$.

20. 已知函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)+1$.

（1）已知 $\omega>0$，且函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π，求函数 $f(x)$ 图象的对称中心及其单调减区间；

（2）若 $\omega=-2$，函数 $f(x)$ 在 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right]$ 上的最值及其对应的 x 的值.

【答案】（1）对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8},1\right)$（$k\in Z$）；单调减区间为 $\left[\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{5\pi}{8}+k\pi\right]$（$k\in Z$）

（2）$x=-\frac{\pi}{8}$ 时，取最大值 3；$x=\frac{\pi}{4}$ 或 $x=-\frac{\pi}{2}$ 时，取最小值 $-\sqrt{2}+1$.

【解析】

【分析】（1）由最小正周期求出解析式，借助函数 $y=\sin x$ 的对称性和单调性求出函数 $f(x)$ 的图象的对称中心及单调减区间；

（2）求出 $-2x+\frac{\pi}{4}$ 的取值范围，得函数 $f(x)$ 的最值及去最值时对应的 x 的值.

【小问 1 详解】

$\because \omega>0$，且函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\pi}=2$，

$\therefore f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$，$\because y=\sin x$ 的对称中心为 $(k\pi,0)$（$k\in Z$），

$\therefore$ 令 $2x+\frac{\pi}{4}=k\pi$（$k\in Z$），解得，$x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$（$k\in Z$），

$\therefore f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$ 的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8},1\right)$（$k\in Z$），

$\therefore$ 令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{2}+2k\pi$（$k\in Z$），解得，$\frac{\pi}{8}+k\pi\le x\le\frac{5\pi}{8}+k\pi$（$k\in Z$），

$\therefore f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$ 的单调减区间为 $\left[\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{5\pi}{8}+k\pi\right]$（$k\in Z$）.

【小问 2 详解】

$\because \omega=-2$，$\therefore f(x)=2\sin\left(-2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$，

$\because -2x+\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$，

当 $-2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)=2\sin\left(-2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$ 有最大值 3，此时 $x=-\frac{\pi}{8}$，

当 $-2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$ 或 $-2x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$ 时，$f(x)=2\sin\left(-2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$ 有最小值 $-\sqrt{2}+1$，此时 $x=\frac{\pi}{4}$ 或 $x=-\frac{\pi}{2}$.

21. 已知函数 $f(x)=\frac{m}{x^2}-2x$.

（1）当 $m=1$ 时，用定义法证明函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数；

（2）已知二次函数 $g(x)$ 满足 $g(2^{x+1})=4g(2^x)+2^{x+2}+6$，$g(1)=-3$，若不等式 $g(x)<f(x)$ 有解，求 m 的取值范围.

【答案】（1）证明见解析

（2）$m>-1$

【解析】

【分析】（1）利用定义法“取值、做差、变形、判断符号”即可证明.

（2）先赋值列方程组，利用待定系数法求出 $g(x)$ 的解析式，根据 $g(x)<f(x)$ 有解，利用分离参数的方法就可以求出 m 的取值范围.

【小问 1 详解】

因为 $m=1$，

所以 $f(x)=\frac{1}{x^2}-2x$，

设 x_1， $x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1^2}-2x_1-\frac{1}{x_2^2}+2x_2$$

$$=\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)+2(x_2-x_1)$$

$$=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\cdot\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}+2(x_2-x_1)$$

$$=\left(\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\cdot\frac{1}{x_1x_2}+2\right)(x_2-x_1)$$

$$=\left(\frac{x_1+x_2+2x_1^2x_2^2}{x_1^2x_2^2}\right)(x_2-x_1),$$

因为 x_1， $x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

所以 $x_1+x_2+2x_1^2x_2^2>0$， $x_1^2x_2^2>0$， $x_2-x_1>0$，

所以 $\left(\frac{x_1+x_2+2x_1^2x_2^2}{x_1^2x_2^2}\right)(x_2-x_1)>0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数；

【小问 2 详解】

因为 $g(1)=-3$，

令 $x=-1$， $g(1)=4g\left(\frac{1}{2}\right)+2+6=4g\left(\frac{1}{2}\right)+8=-3$，

所以 $g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{11}{4}$，

令 $x=0$， $g(2)=4g(1)+4+6=4g(1)+10=-2$，

设 $g(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$，

$\begin{cases}-3=a+b+c\\ -\dfrac{11}{4}=\dfrac{a}{4}+\dfrac{b}{2}+c\\ -2=4a+2b+c\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=1\\ b=-2\\ c=-2\end{cases}$，

所以 $g(x)=x^2-2x-2(a\neq 0)$，

因为 $g(x)<f(x)$ 有解，

所以 $x^2-2x-2<\dfrac{m}{x^2}-2x$ 有解，$x\neq 0$，

所以 $m>x^4-2x^2$ 有解，$x\neq 0$，

所以 $m>\left(x^4-2x^2\right)_{\min}$，$x\neq 0$，

令 $t=x^2$，$t>0$，则 $x^4-2x^2=t^2-2t$，

因为 $y=t^2-2t$ 的对称轴为 $t=1$，

所以当 $t=1$ 时，$\left(t^2-2t\right)_{\min}=1-2=-1$，即 $\left(x^4-2x^2\right)_{\min}=-1$，

所以 $m>-1$.

22. 若函数 $f(x)$ 在定义域内存在实数 x，满足 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为“局部奇函数”.

（1）试判断 $g(x)=2^x-2(x\in\mathrm{R})$ 是否为“局部奇函数”；

（2）已知 $a>1$，对于任意的 $b\in[0,1]$，函数 $h(x)=\ln(x+1+a)-x^2+x-b$ 都是定义域为 $[-1,1]$ 上的“局部奇函数”，求实数 a 的取值范围.

【答案】（1）是　　（2）$e-1\leq a\leq\sqrt{e^2+1}-1$

【解析】

【分析】（1）化简 $g(-x)=-g(x)$，利用换元法，结合一元二次方程的解求得正确答案.

（2）将问题转化为 $2b=\ln\left[(1+a)^2-x^2\right]-2x^2$ 在 $[-1,1]$ 上有解，利用换元法，结合函数的单调性来求得 a 的取值范围.

【小问 1 详解】

假设 $g(x)=2^x-2(x\in\mathbf{R})$ 为“局部奇函数”，

则 $g(-x)=-g(x)$ 有解，即 $2^{-x}-2=-2^x+2$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上有解，

令 $t=2^x$，$t>0$，则 $\dfrac{1}{t}-2=-t+2$ 在 $t\in(0,+\infty)$ 上有解，

整理得：$t^2-4t+1=0$ 在 $t\in(0,+\infty)$ 上有解，解得：$t=2\pm\sqrt{3}$，

故假设成立，$g(x)=2^x-2(x\in\mathbf{R})$ 为“局部奇函数”；

【小问 2 详解】

Q $a>1$，$\therefore x+1+a>0$ 在 $[-1,1]$ 上恒成立，

$\because$ 对于任意的 $b\in[0,1]$，函数 $h(x)=\ln(x+1+a)-x^2+x-b$ 都是定义域为 $[-1,1]$ 上的“局部奇函数”，

$\therefore$ 对于任意的 $b\in[0,1]$，$h(-x)=-h(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有解，

即 $\ln(-x+1+a)-x^2-x-b=-\ln(x+1+a)+x^2-x+b$ 在 $[-1,1]$ 上有解，

整理得：$2b=\ln\left[(1+a)^2-x^2\right]-2x^2$ 在 $[-1,1]$ 上有解，

$\therefore y=2b$ 的值域是 $y=\ln\left[(1+a)^2-x^2\right]-2x^2$ 的值域的子集，

$\because b\in[0,1]$，$\therefore y=2b$ 的值域是 $[0,2]$，

令 $m=x^2$，$m\in[0,1]$，则 $y=\ln\left[(1+a)^2-m\right]-2m$，

$\because y=\ln\left[(1+a)^2-m\right]-2m$ 在 $m\in[0,1]$ 上单调递减，

$\therefore$ 当 $m=0$ 时，$y_{\max}=\ln(1+a)^2$，当 $m=1$ 时，$y_{\max}=\ln\left[(1+a)^2-1\right]-2$，

$\therefore\begin{cases}\ln(1+a)^2\geq 2\\ \ln\left[(1+a)^2-1\right]-2\leq 0\end{cases}$，解得：$\mathrm{e}-1\leq a\leq\sqrt{\mathrm{e}^2+1}-1$.

【点睛】解新定义题型的步骤：(1)理解“新定义”——明确“新定义”的条件、原理、方法、步骤和结论.(2)重视“举例”,利用“举例”检验是否理解和正确运用“新定义”;归纳“举例”提供的解题方法.归纳“举例”提供的分类情况.(3)类比新定义中的概念、原理、方法，解决题中需要解决的问题.