

无锡市第一中学 2023-2024 学年度第一学期阶段性质量检测试卷

高一数学

2023.12

一、单选题（每小题 5 分，共 40 分）

1. 已知集合 $M = \{-1, 1, 2\}$, $N = \{x \in \mathbf{R} | x^2 = x\}$, 则 $M \cup N =$ ()A. $\{1\}$ B. $\{-1, 0\}$ C. $\{-1, 0, 1, 2\}$ D. $\{-1, 0, 2\}$ 2. “ α 是钝角”是“ α 是第二象限角”的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

3. 已知 $\tan \alpha = 3$, 则 $\frac{\sin(\pi - \alpha) + 2 \cos(\pi + \alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} =$ ()A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{1}{2}$ 4. 用二分法求函数 $f(x) = \ln(x+1) + x - 1$ 在区间 $[0, 1]$ 上的零点, 要求精确度为 0.01 时, 所需二分区间的次数最少为 ()

A. 5

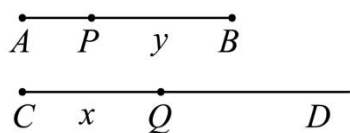
B. 6

C. 7

D. 8

5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - ax - 9, & x \leq 1 \\ \frac{a}{x}, & x > 1 \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上满足不等式 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$, 则实数 a 的取值范围为 ()A. $[-5, 0)$ B. $(-\infty, -2]$ C. $[-5, -2]$ D. $(-\infty, 0)$ 6. 已知 $a = \log_4 2, b = \log_{0.4} 0.2, c = 0.4^{0.2}$, 则 ()A. $a < c < b$ B. $a < b < c$ C. $b < c < a$ D. $c < a < b$ 7. 如图, 假定 P, Q 两点以相同的初速度 (单位: 单位/秒), 分别同时从 A, C 出发, 点 Q 沿射线 CD 做匀速运动, $CQ = x$, 点 P 沿线段 AB (长度为 10^7 单位) 运动, 它在任何一点的速度值等于它尚未经过的距离 ($PB = y$), 那么定义 x 为 y 的纳皮尔对数, 函数表达式为 $y = 10^7 \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{x}{10^7}}$, 则 P 从靠近 A 的第一个五等

分点移动到靠近 B 的三等分点经过的时间约为 () (参考数据: $\ln 2 \approx 0.7, \ln 3 \approx 1.1, \ln 5 \approx 1.6$)



- A. 0.7 秒 B. 0.9 秒 C. 1.1 秒 D. 1.3 秒

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 7 & (x \geq 3) \\ |\log_2(x+1)| & (-1 < x < 3) \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $[f(x)]^2 + mf(x) + m + 3 = 0$ 有 6 个根, 则

m 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, 2 - 2\sqrt{3})$ B. $(-2, 2 - 2\sqrt{3})$
C. $\left(-\frac{7}{3}, 0\right)$ D. $\left(-\frac{7}{3}, -2\right)$

二、多选题 (每小题 5 分, 共 20 分)

9. 若非空集合 M, N, P 满足: $M \cap N = N, M \cup P = P$, 则 ()

- A. $N \cup P = P$ B. $P \subseteq M$ C. $N \cap P = N$ D. $N \cap (\complement_P M) = \emptyset$

10. 下列说法不正确的是 ()

- A. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 2]$, 则函数 $f(2x)$ 的定义域为 $[0, 4]$
B. 函数 $y = \frac{1}{x}$ 是减函数
C. 函数 $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ 的图象关于点 $(-2, 1)$ 成中心对称
D. 幂函数 $f(x) = (m^2 - 3m + 3)x^{3m-4}$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数, 则 m 的值为 1 或 2

11. 下列结论中, 正确的结论有 ()

- A. 函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的最小值是 2
B. 如果 $x > 0, y > 0, x + 3y + xy = 9$, 那么 xy 的最大值为 3
C. 函数 $f(x) = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 4}}$ 的最小值为 $\frac{5}{2}$
D. 如果 $a > 0, b > 0$, 且 $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{1+b} = 1$, 那么 $a+b$ 的最小值为 2

12. 若函数 $f(x)$ 在定义域 D 内的某区间 M 上单调递增, 且 $\frac{f(x)}{x}$ 在 M 上也单调递增, 则称 $f(x)$ 在 M 上

是“强增函数”, 则下列说法正确的是 ()

- A. 若函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$, 则存在 M 使 $f(x)$ 是“强增函数”
- B. 若函数 $f(x) = x^2 + x^3$, 则 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的“强增函数”
- C. 若函数 $f(x) = 2^x$, 则存在区间 M , 使 $f(x)$ 在 M 上不是“强增函数”
- D. 若函数 $f(x) = x^2 + (a-3)x + a$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上是“强增函数”, 则 $a = 1$

三、填空题 (每小题 5 分, 共 20 分)

13. 计算 $\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} + \pi^{\lg 1} + \log_2 \frac{2}{3} - \log_4 \frac{16}{9} = \underline{\hspace{2cm}}$.
14. 已知扇形的面积为 4, 圆心角为 2 弧度, 则该扇形的弧长为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
15. 若函数 $f(x) = \log_2(x^2 - ax + 3a)$ 在区间 $[2, +\infty)$ 上是增函数, 则实数 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
16. 已知 $f(x)$, $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数, 其中 $f(x)$ 是偶函数, $g(x)$ 是奇函数, 且 $f(x) + g(x) = x^2 + ax + 2$, 若对于 $\forall x_1, x_2 \in (-2, 1)$, 都有 $\frac{x_2 g(x_2) - x_1 g(x_1)}{x_2 - x_1} < 1 (x_1 \neq x_2)$ 成立, 则实数 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题 (共 70 分)

17. 设全集 $U = \mathbf{R}$, $A = \left\{x \mid y = \log_2 \frac{3-x}{x+1}\right\}$, $B = [a-1, a+6]$.
- (1) 当 $a=1$ 时, 求 $A \cap B$, $(\complement_U A) \cup B$;
- (2) 若“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充分不必要条件, 求实数 a 的取值范围.
18. 已知 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ 是关于 x 的方程 $x^2 - ax + a = 0 (a \in \mathbf{R})$ 的两个根.
- (1) 求实数 a 的值,
- (2) 求 $\frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin \theta - \cos \theta} + \frac{\sin \theta + \cos \theta}{1 - \tan^2 \theta}$ 的值.
19. 已知函数 $f(x) = ax^2 - (a+4)x + 4$.
- (1) 解关于 x 的不等式 $f(x) < 0$;
- (2) 若不等式 $f(x) < 0$ 有且仅有唯一整数解, 求实数 a 的取值范围.
20. 杭州亚运会田径比赛 10 月 5 日迎来收官, 在最后两个竞技项目男女马拉松比赛中, 中国选手何杰以 2 小时 13 分 02 秒夺得男子组冠军, 这是中国队亚运史上首枚男子马拉松金牌. 人类长跑运动一般分为两个阶段, 第一阶段为前 1 小时的稳定阶段, 第二阶段为疲劳阶段. 现一 60kg 的复健马拉松运动员进行 4 小时长

跑训练，假设其稳定阶段作速度为 $v_1 = 30 \text{ km/h}$ 的匀速运动，该阶段每千克体重消耗体力 $\Delta Q_1 = t_1 \times 2v_1$ （ t_1 表示该阶段所用时间），疲劳阶段由于体力消耗过大变为 $v_2 = 30 - 10t_2$ 的减速运动（ t_2 表示该阶段所用时间），疲劳阶段速度降低，体力得到一定恢复，该阶段每千克体重消耗体力 $\Delta Q_2 = \frac{t_2 \times 2v_2}{t_2 + 1}$ ，已知该运

动员初始体力为 $Q_0 = 10000 \text{ kJ}$ ，不考虑其他因素，所用时间为 t （单位：h），请回答下列问题：

- （1）请写出该运动员剩余体力 Q 关于时间 t 的函数 $Q(t)$ ；
- （2）该运动员在 4 小时内何时体力达到最低值，最低值为多少？

21. 设函数 $f(x) = k \cdot 2^x - 2^{-x}$ 是定义 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

- （1）求 k 的值；
- （2）若不等式 $f(x) > a \cdot 2^x - 1$ 有解，求实数 a 的取值范围；
- （3）设 $g(x) = 4^x + 4^{-x} - 4f(x)$ ，求 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最小值.

22. 若函数 $y = f(x)$ 对定义域内的每一个值 x_1 ，在其定义域内都存在唯一的 x_2 ，使 $f(x_1) + f(x_2) = 1$ 成立，则称该函数为“和一函数”.

- （1）判断定义在区间 $[1, +\infty)$ 上的函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 是否为“和一函数”，并说明理由；
- （2）若函数 $g(x) = \log_4 x$ 在定义域 $[a, b]$ 上是“和一函数”.

- ①求 ab 的值；
- ②求 $2b - a$ 的取值范围.