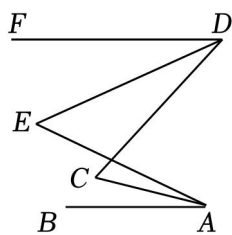


2022-2023 学年江苏省无锡市惠山区锡中实验学校九年级（上）

期末数学试卷

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. (3 分) $-\frac{1}{2}$ 的倒数是 ()
- A. -2 B. 2 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$
2. (3 分) 下列计算结果正确的是 ()
- A. $(-m^2)^3=m^6$ B. $m^4+m^4=m^8$ C. $m^6 \div m^3=m^2$ D. $m^2 \cdot m^6=m^8$
3. (3 分) 有 4 张卡片（形状、大小、质地都相同），上面分别画有下列图形：①平行四边形②菱形③矩形④正方形，将卡片背面朝上洗匀，从中抽取一张，正面图形既是轴对称图形，又是中心对称图形的概率是 ()
- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. 1
4. (3 分) 在平面直角坐标系中，点 A (-2, -3) 位于 ()
- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
5. (3 分) 某篮球运动员在连续 7 场比赛中的得分（单位：分）依次为 20, 18, 23, 17, 20, 20, 18，则这组数据的众数与中位数分别是 ()
- A. 18 分, 17 分 B. 20 分, 17 分 C. 20 分, 19 分 D. 20 分, 20 分
6. (3 分) 如图，已知 $AB \parallel DF$ ，DE 和 AC 分别平分 $\angle CDF$ 和 $\angle BAE$ ，若 $\angle DEA=46^\circ$ ， $\angle ACD=56^\circ$ ，则 $\angle CDF$ 的度数为 ()



- A. 22° B. 33° C. 44° D. 55°

7. (3 分) 《孙子算经》中有一道题，原文是“今有木，不知长短．引绳度之，余绳四尺五寸；屈绳量之，不足一尺，木长几何？”意思是：用一根绳子去量一根长木，绳子还剩余 4.5 尺；将绳子对折再量长木，长木还剩余 1 尺．问木长多少尺？设木长 x 尺，绳长 y 尺，可列方程组为 ()

- A.
$$\begin{cases} x=y+4.5 \\ \frac{1}{2}x=y+1 \end{cases}$$
- B.
$$\begin{cases} y=x+4.5 \\ \frac{1}{2}y=x+1 \end{cases}$$

$$C. \begin{cases} x=y+4.5 \\ \frac{1}{2}x=y-1 \end{cases}$$

$$D. \begin{cases} y=x+4.5 \\ \frac{1}{2}y=x-1 \end{cases}$$

8. (3分) 已知点 $A(x_1, -2)$, $B(x_2, -1)$, $C(x_3, 1)$ 都在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$)

的图象上, 则 x_1, x_2, x_3 的大小关系是 ()

A. $x_3 < x_1 < x_2$

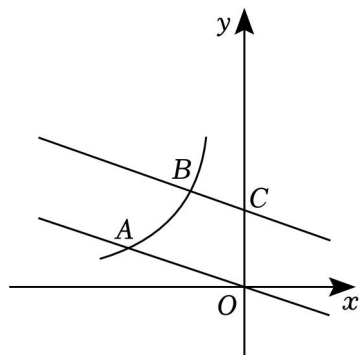
B. $x_2 < x_1 < x_3$

C. $x_1 < x_3 < x_2$

D. $x_1 < x_2 < x_3$

9. (3分) 如图, 直线 $y = -\frac{1}{5}x$ 与双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0, x < 0$) 交于点 A , 将直线 $y = -\frac{1}{5}x$

向上平移 1 个单位长度后与 y 轴交于 C , 与双曲线交于 B , 若 $2OA = 3BC$, 则 k 的值为 ()



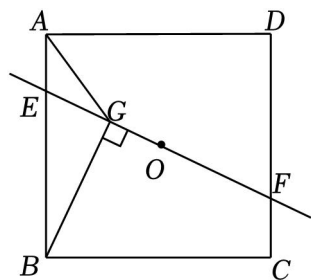
A. $-\frac{180}{169}$

B. -7

C. $-\frac{36}{5}$

D. $-\frac{35}{3}$

10. (3分) 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 $2\sqrt{2}$, 直线 EF 经过正方形的中心 O , 并能绕着 O 转动, 分别交 AB 、 CD 边于 E 、 F 点, 过点 B 作直线 EF 的垂线 BG , 垂足为点 G , 连接 AG , 则 AG 长的最小值为 ()



A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{2}-1$

C. $\sqrt{5}$

D. $\sqrt{5}-1$

二、填空题 (本大题共 8 个小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

11. (3分) 分解因式: $a^2 - 16b^2 =$ _____.

12. (3分) 2019 年江苏省粮食总产达 40540000 吨, 居全国第四位. 用科学记数法表示 40540000 是 _____.

13. (3分) 若正多边形的一个内角等于 140° , 则这个正多边形的边数是_____.

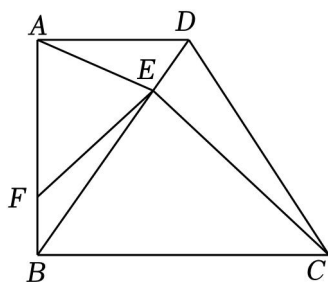
14. (3分) 已知方程 $x^2 - 2023x + 1 = 0$ 的两根分别为 x_1, x_2 , 则 $x_1 + x_2$ 的值为 _____.

15. (3分) 对于抛物线 $y = ax^2 + 2ax$, 当 $x = 1$ 时, $y > 0$, 则这条抛物线的顶点一定在第

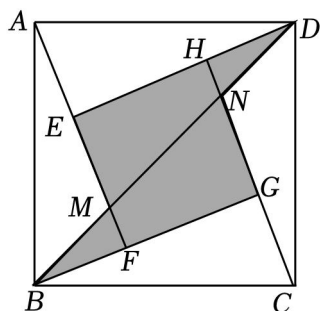
象限.

16. (3分) 已知圆锥的母线与高的夹角为 30° ，母线长为 4cm 则它的底面半径为 _____ cm ，
全面积是 _____ cm^2 (结果保留 π).

17. (3分) 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = 4$ ， $BC = 6$ ， $AD = 3$ ，
 E 为对角线 BD 上的动点，点 F 在边 AB 上. 连接 AE 、 BF 、 EC ，记 $\triangle AEF$ 的面积为 S_1 ，
 $\triangle BCE$ 的面积为 S_2 ，若 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{3}$ ，则 BF 长为 _____.



18. (3分) 如图，四个全等的直角三角形拼成“赵爽弦图”，得到正方形 $ABCD$ 与正方形 $BFGH$. 连结 BD 交 AF 、 C 于点 M 、 N . 若 DE 平分 $\angle ADB$ ，现随机向该图形内掷一枚小
针，则 $\frac{BG}{EG} =$ _____，针尖落在阴影区域的概率为 _____.

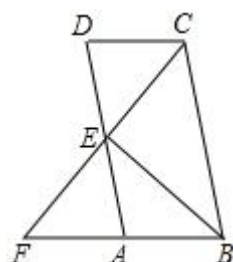


三、解答题 (本大题共 10 小题，共 96 分. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算过程)

19. (10分) 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 为 AD 的中点，延长 CE 交 BA 的延长线
于点 F .

(1) 求证: $AB = AF$;

(2) 若 $BC = 2AB$ ， $\angle BCD = 100^\circ$ ，求 $\angle ABE$ 的度数.



20. (8分) 计算:

(1) $\sqrt{12} + (\pi - 2015)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - 6 \tan 30^\circ$;

(2) $(2a+1)^2 - 4a(a-1)$.

21. (8分) (1) 解方程: $x^2 - 4x - 4 = 0$;

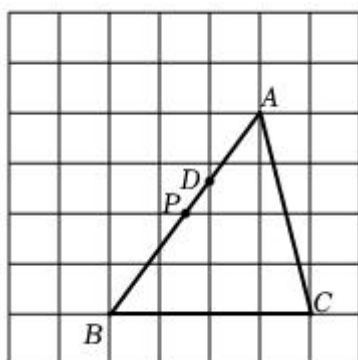
(2) 解不等式组:
$$\begin{cases} 2(x+1) > 5x-7 \\ \frac{x+10}{3} > 2x \end{cases}$$
.

22. (10分) 如图是边长为 1 的正方形网格, 每个小正方形的顶点叫格点, $\triangle ABC$ 的顶点都在格点上. 仅用无刻度的直尺, 按要求画出下列图形.

(1) $\triangle ABC$ 的周长为 _____;

(2) 如图, 点 D 、 P 分别是 AB 与竖格线和横格线的交点, 画出点 P 关于过点 D 竖格线的对称点 Q ;

(3) 请在图中画出 $\triangle ABC$ 的角平分线 BE .



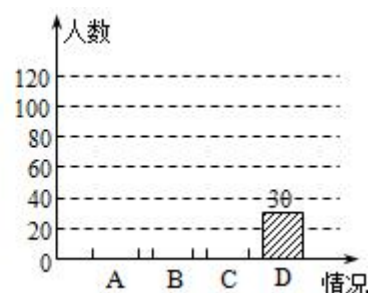
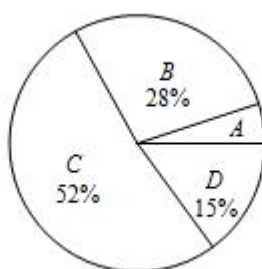
23. (10分) “低碳环保, 你我同行”, 两年来, 南京市区的公共自行车给市民出行带来切实方便, 电视台记者在某区街头随机选取了市民进行调查, 调查的问题是“您大概多久使用一次公共自行车?”, 将本次调查结果归为四种情况: A . 每天都用; B . 经常使用; C . 偶尔使用; D . 从未使用. 将这次调查情况整理并绘制如下两幅统计图:

根据图中的信息, 解答下列问题:

(1) 本次活动共有 _____ 位市民参与调查;

(2) 补全条形统计图;

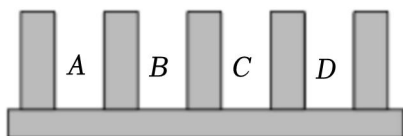
(3) 根据统计结果, 若该区有 46 万市民, 请估算每天都用公共自行车的市民约有多少人?



24. (10 分) 随着高铁、地铁的大量兴建以及铁路的改扩建, 人们的出行方式越来越多, 出行越来越便捷. 为保障旅客快捷、安全的出入车站, 每个车站都修建了如图所示的出入闸口. 某车站有四个出入闸口, 分别记为 A, B, C, D .

(1) 一名乘客通过该站闸口时, 选择 B 闸口通过的概率是 _____;

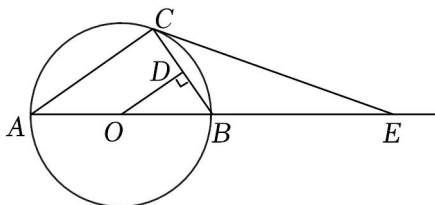
(2) 当两名乘客通过该站闸口时, 请用画树状图或列表法求这两名乘客选择不同闸口通过的概率.



25. (10 分) 如图, 已知 $\odot O$ 是 $\text{Rt}\triangle ACB$ 的外接圆, 过点 O 作 $OD \perp BC$ 于点 D , 作 $\angle BCE = \angle BOD$ 交 AB 延长线于点 E .

(1) 求证: CE 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $\tan \angle BCE = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $BE = 2\sqrt{6}$, 求 CE 的长.



26. (10 分) 六月是水蜜桃大量上市的季节, 某果农在销售时发现: 若水蜜桃的售价为 15 元/千克, 则日销售量为 50 千克, 若售价每提高 1 元/千克, 日销售量就减少 2 千克, 现设水蜜桃售价为 x 元/千克 ($x \geq 15$, 且 x 为正整数).

(1) 若某日销售量为 40 千克, 则该日水蜜桃的单价为多少元?

(2) 若政府将销售价格定为不超过 30 元/千克, 设每日销售额为 W 元, 求 W 关于 x 的函数表达式, 并求 W 的最大值和最小值;

(3) 为更好地促进果农的种植积极性, 市政府加大对果农的补贴, 每日给果农补贴 a 元后 (a 为正整数), 果农发现最大日收入 (日收入 = 销售额 + 政府补贴) 还是不超过 910 元, 并且只有 5 种不同的单价使日收入不少于 900 元, 请直接写出所有符合题意的 a 的值.

27. (10 分) 如图, 已知矩形 $ABCD$ 中, E 是边 AD 上一点, 将 $\triangle BDE$ 沿 BE 折叠得到 $\triangle BFB$, 连接 DF .

(1) 如图 1, BF 落在直线 BA 上时, 求证 $\triangle DFA \sim \triangle BEA$;

(2) 如图 2, 当 $\frac{AD}{AB} = \sqrt{2}$ 时, BF 与边 AD 相交时, 在 BB 上取一点 G , 使 $\angle BAG = \angle DAF$, AG 与 BF 交于点 H ,

①求 $\frac{AF}{AG}$ 的值;

②当 E 是 AD 的中点时,若 $FD \cdot FH = 18$,求 AG 的长.

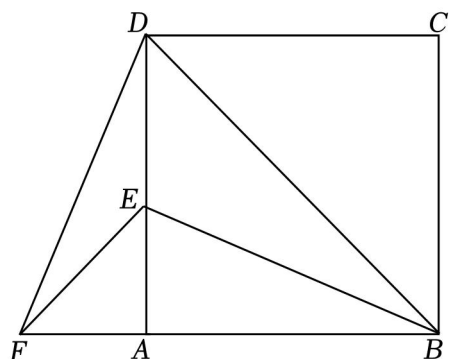


图1

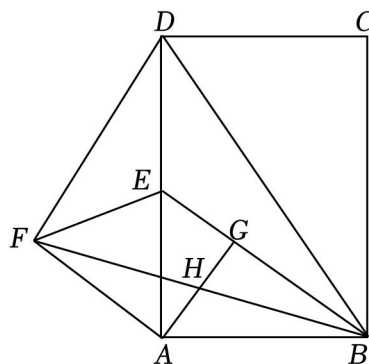


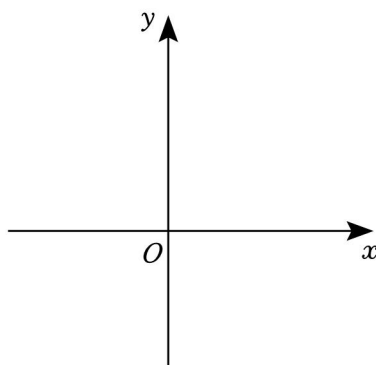
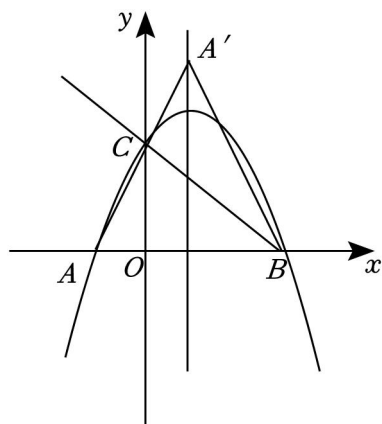
图2

28. (10分) 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = mx^2 - 2mx - 3m$ 与 x 轴交 A 、 B 两点 (点 A 在点 B 左侧), 与 y 轴交于点 C , 连接 AC , BC , 点 A 关于 BC 所在的直线的对称点 A' , 连接 $A'B$ 、 $A'C$.

(1) 点 A 的坐标为 _____, 点 B 的坐标为 _____.

(2) 若点 A' 落在抛物线的对称轴上, 且在 x 轴上方, 求抛物线的解析式.

(3) 设抛物线顶点为 Q , 若 $\triangle BCQ$ 是锐角三角形, 直接写出 m 的取值范围.



2022-2023 学年江苏省无锡市惠山区锡中实验学校九年级（上）

期末数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. （3 分） $-\frac{1}{2}$ 的倒数是（ ）

- A. -2 B. 2 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

【分析】根据乘积为 1 的两个数互为倒数，可得答案.

【解答】解： $-\frac{1}{2}$ 的倒数是 -2，

故选：A.

【点评】本题考查了倒数，分子分母交换位置是求一个数的倒数的关键.

2. （3 分）下列计算结果正确的是（ ）

- A. $(-m^2)^3=m^6$ B. $m^4+m^4=m^8$ C. $m^6 \div m^3=m^2$ D. $m^2 \cdot m^6=m^8$

【分析】根据同底数幂的乘除运算、合并同类项法则，积的乘方运算即可求出答案.

【解答】解：A、原式 $= -m^6$ ，故 A 不符合题意.

B、原式 $= 2m^4$ ，故 B 不符合题意.

C、原式 $= m^3$ ，故 C 不符合题意.

D、原式 $= m^8$ ，故 D 符合题意.

故选：D.

【点评】本题考查同底数幂的乘除运算、合并同类项法则，积的乘方运算，本题属于基础题型.

3. （3 分）有 4 张卡片（形状、大小、质地都相同），上面分别画有下列图形：①平行四边形②菱形③矩形④正方形，将卡片背面朝上洗匀，从中抽取一张，正面图形既是轴对称图形，又是中心对称图形的概率是（ ）

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. 1

【分析】将卡片背面朝上洗匀，从中抽取一张共有 4 种等可能结果，其中正面图形既是轴对称图形，又是中心对称图形的有 3 种结果，再根据概率公式求解即可.

【解答】解：将卡片背面朝上洗匀，从中抽取一张共有 4 种等可能结果，其中正面图形既是轴对称图形，又是中心对称图形的有 3 种结果，

所以正面图形既是轴对称图形，又是中心对称图形的概率是 $\frac{3}{4}$ ，

故选：C.

【点评】本题主要考查概率公式，解题的关键是掌握轴对称图形和中心对称图形的概念及概率公式.

4. (3分) 在平面直角坐标系中，点 $A(-2, -3)$ 位于 ()

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【分析】根据各象限内点的坐标特征解答. 第一象限 $(+, +)$ ；第二象限 $(-, +)$ ；第三象限 $(-, -)$ ；第四象限 $(+, -)$.

【解答】解：由 $-2 < 0$ ， $-3 < 0$ 得点 $A(-2, -3)$ 在第三象限.

故选：C.

【点评】本题考查了各象限内点的坐标的符号特征，记住各象限内点的坐标的符号是解决的关键，四个象限的符号特点分别是：第一象限 $(+, +)$ ；第二象限 $(-, +)$ ；第三象限 $(-, -)$ ；第四象限 $(+, -)$.

5. (3分) 某篮球运动员在连续7场比赛中的得分(单位：分)依次为20, 18, 23, 17, 20, 20, 18, 则这组数据的众数与中位数分别是 ()

A. 18分, 17分 B. 20分, 17分 C. 20分, 19分 D. 20分, 20分

【分析】根据中位数和众数的定义求解：众数是一组数据中出现次数最多的数据，注意众数可以不止一个；找中位数要把数据按从小到大的顺序排列，位于最中间的一个数(或两个数的平均数)为中位数.

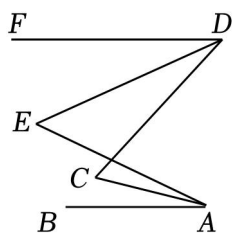
【解答】解：将数据重新排列为17、18、18、20、20、20、23，

所以这组数据的众数为20分、中位数为20分，

故选：D.

【点评】本题属于基础题，考查了确定一组数据的中位数和众数的能力. 一些学生往往对这个概念掌握不清楚，计算方法不明确而误选其它选项，注意找中位数的时候一定要先排好顺序，然后再根据奇数和偶数个来确定中位数，如果数据有奇数个，则正中间的数字即为所求，如果是偶数个则找中间两个数的平均数.

6. (3分) 如图，已知 $AB \parallel DF$ ， DE 和 AC 分别平分 $\angle CDF$ 和 $\angle BAE$ ，若 $\angle DEA = 46^\circ$ ， $\angle ACD = 56^\circ$ ，则 $\angle CDF$ 的度数为 ()



A. 22° B. 33° C. 44° D. 55°

【分析】过点 C 作 $CN \parallel AB$ ，过点 E 作 $EM \parallel AB$ ，易证 $\angle DEA$ 与 $\angle FDE$ 、 $\angle EAB$ ， $\angle ACD$ 与 $\angle BAC$ 、 $\angle FDC$ 间关系. 再由角平分线的性质及角的和差关系计算得结论.

【解答】解：过点 C 作 $CN \parallel AB$ ，过点 E 作 $EM \parallel AB$ ，

$\because FD \parallel AB, CN \parallel AB, EM \parallel AB$,

$\therefore AB \parallel CN \parallel EM \parallel FD$

$\therefore \angle BAC = \angle NCA, \angle NCD = \angle FDC, \angle FDE = \angle DEM, \angle MEA = \angle EAB$.

$\therefore \angle DEA = \angle FDE + \angle EAB$,

$\angle ACD = \angle BAC + \angle FDC$.

又 $\because DE$ 和 AC 分别平分 $\angle CDF$ 和 $\angle BAE$,

$\therefore \angle FDC = 2\angle FDE = 2\angle EDC, \angle BAE = 2\angle BAC = 2\angle EAC$,

$\therefore 56^\circ = \angle BAC + 2\angle FDE$ ①,

$46^\circ = \angle FDE + 2\angle BAC$ ②.

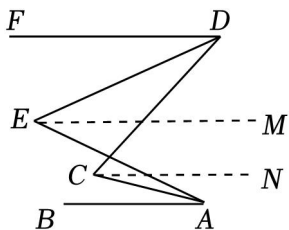
①+②，得 $3(\angle BAC + \angle FDE) = 102^\circ$ ，

$\therefore \angle BAC + \angle FDE = 34^\circ$ ③.

① - ③，得 $\angle FDE = 22^\circ$.

$\therefore \angle CDF = 2\angle FDE = 44^\circ$.

故选：C.



【点评】本题考查了角平分线的性质、平行线的性质及角的和差关系．根据平行线的性质得到 $\angle DEA = \angle FDE + \angle EAB$ ， $\angle ACD = \angle BAC + \angle FDC$ 是解决本题的关键．

7. (3分)《孙子算经》中有一道题，原文是“今有木，不知长短．引绳度之，余绳四尺五寸；屈绳量之，不足一尺，木长几何？”意思是：用一根绳子去量一根长木，绳子还剩余 4.5 尺；将绳子对折再量长木，长木还剩余 1 尺．问木长多少尺？设木长 x 尺，绳长 y 尺，可列方程组为（ ）

A.
$$\begin{cases} x = y + 4.5 \\ \frac{1}{2}x = y + 1 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} y = x + 4.5 \\ \frac{1}{2}y = x + 1 \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x = y + 4.5 \\ \frac{1}{2}x = y - 1 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} y = x + 4.5 \\ \frac{1}{2}y = x - 1 \end{cases}$$

【分析】根据用一根绳子去量一根长木，绳子还剩余 4.5 尺；将绳子对折再量长木，长木还剩余 1 尺，可以列出相应的方程组，从而可以解答本题．

【解答】解：由用一根绳子去量一根长木，绳子还剩余 4.5 尺，可得方程 $y = x + 4.5$ ，

由将绳子对折再量长木，长木还剩余 1 尺，可得方程 $\frac{1}{2}y = x - 1$ ，

$$\text{故} \begin{cases} y = x + 4.5 \\ \frac{1}{2}y = x - 1 \end{cases},$$

故选：D.

【点评】 本题考查由实际问题抽象出二元一次方程组，解答本题的关键是明确题意，找出题目中的等量关系，列出相应的方程组.

8. (3 分) 已知点 $A(x_1, -2)$, $B(x_2, -1)$, $C(x_3, 1)$ 都在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$)

的图象上，则 x_1, x_2, x_3 的大小关系是 ()

- A. $x_3 < x_1 < x_2$ B. $x_2 < x_1 < x_3$ C. $x_1 < x_3 < x_2$ D. $x_1 < x_2 < x_3$

【分析】 根据反比例函数性质，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$) 的图象分布在第二、四象限，

则 y_3 最小， y_2 最大.

【解答】 解：∵ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$) 的图象分布在第二、四象限，

在每一象限 y 随 x 的增大而增大，

$$\because -2 < -1 < 0,$$

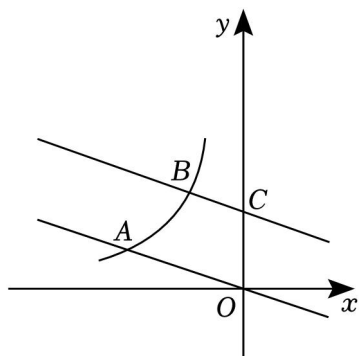
$$\therefore x_3 < x_1 < x_2.$$

故选：A.

【点评】 本题考查反比例函数图象上点的坐标特征：反比例函数图象上点的坐标满足其解析式. 也考查了反比例函数的性质.

9. (3 分) 如图，直线 $y = -\frac{1}{5}x$ 与双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0, x < 0$) 交于点 A，将直线 $y = -\frac{1}{5}x$

向上平移 1 个单位长度后与 y 轴交于 C，与双曲线交于 B，若 $2OA = 3BC$ ，则 k 的值为 ()



- A. $-\frac{180}{169}$ B. -7 C. $-\frac{36}{5}$ D. $-\frac{35}{3}$

【分析】 过点 A 作 $AD \perp x$ 轴于 D，过 B 作 $BE \perp y$ 轴于 E，首先证明 $\triangle ADO \sim \triangle CEB$ ，得

出 $\frac{BE}{OD} = \frac{CE}{AD} = \frac{BC}{OA} = \frac{2}{3}$, 根据一次函数的平移性质可求出平移后的函数解析式, 设 $A(-$

$\frac{3}{2}a, \frac{3}{10}a)$, $B(-a, \frac{1}{5}a+1)$, 根据待定系数法求解即可.

【解答】解: $\because$ 将直线 $y = -\frac{1}{5}x$ 向上平移 1 个单位长度后, 与 y 轴交于点 C ,

$\therefore$ 平移后的直线表达式为 $y = -\frac{1}{5}x+1$,

过点 A 作 $AD \perp x$ 轴于 D , 过 B 作 $BE \perp y$ 轴于 E ,

则 $\angle ADO = \angle BEC = 90^\circ$,

$\because OA \parallel BC, BE \parallel y$ 轴,

$\therefore \angle AOD = \angle CBE$,

$\therefore \triangle ADO \sim \triangle CEB$,

$\therefore \frac{BE}{OD} = \frac{CE}{AD} = \frac{BC}{OA} = \frac{2}{3}$,

$\because 2OA = 3BC$,

$\therefore 2OD = 3BE, 2AD = 3EC$,

设 $BE = a$, 则 $OD = \frac{3}{2}a$,

$\because$ 点 A 在直线 $y = -\frac{1}{5}x$ 上,

$\therefore A(-\frac{3}{2}a, \frac{3}{10}a)$,

$\therefore AD = \frac{3}{10}a$,

$\therefore EC = \frac{1}{5}a$,

$\therefore OE = EC + OC = \frac{1}{5}a+1$,

$\therefore B(-a, \frac{1}{5}a+1)$, 其中 $a > 0$,

$\because$ 点 A, B 在双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0, x < 0$) 上,

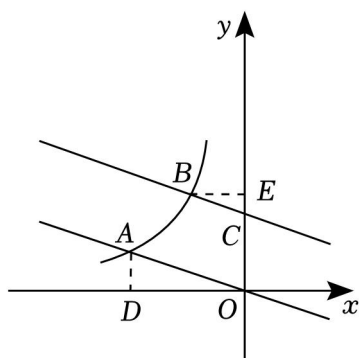
$\therefore -\frac{3}{2}a \cdot \frac{3}{10}a = -a \cdot (\frac{1}{5}a+1)$,

解得: $a_1 = 4, a_2 = 0$ (不合题意, 舍去),

$\therefore A(-6, \frac{6}{5})$,

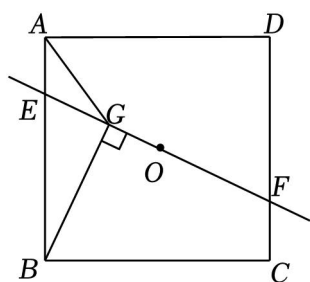
$\therefore k = -6 \times \frac{6}{5} = -\frac{36}{5}$,

故选：C.



【点评】 本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题、一次函数的图象平移性质、相似三角形的判定与性质、解一元二次方程、平行线的性质，熟练掌握各知识了联系与运用，根据题意作出辅助线，巧妙设出点 A 、 B 的坐标，再根据待定系数法求解是解题的关键.

10. (3 分) 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 $2\sqrt{2}$ ，直线 EF 经过正方形的中心 O ，并能绕着 O 转动，分别交 AB 、 CD 边于 E 、 F 点，过点 B 作直线 EF 的垂线 BG ，垂足为点 G ，连接 AG ，则 AG 长的最小值为 ()



- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}-1$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{5}-1$

【分析】 连接 AC 、 BD ，交于点 O ，由题意可知， EF 经过点 O ，取 OB 中点 M ，连接 MA ， MG ，则 MA ， MG 为定长，利用两点之间线段最短解决问题即可.

【解答】 解：连接 AC 、 BD ，交于点 O ，

由题意可知， EF 经过点 O ，取 OB 中点 M ，连接 MA ， MG ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AC \perp BD$ ， $AO = OB$ ，

$\because AB = 2\sqrt{2}$ ，

$\therefore OA = OB = 2$.

$\therefore OM = 1$.

$\therefore AM = \sqrt{OA^2 + OM^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ ，

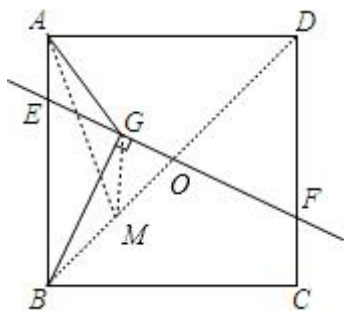
在 $Rt\triangle BOG$ 中， M 是 OB 的中点，

$\therefore GM = \frac{1}{2}OB = 1$.

$$\because AG \geq AM - MG = \sqrt{5} - 1.$$

当 A, M, G 三点共线时, $AG_{\text{最小}} = \sqrt{5} - 1$.

故选: D .



【点评】 本题主要考查了正方形的性质, 点与圆的关系, 直角三角形斜边上的中线等知识点, 取 OB 中点 M , 连接 MA, MG , 则 MA, MG 为定长, 利用两点之间线段最短解决问题是解决本题的关键.

二、填空题 (本大题共 8 个小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

11. (3 分) 分解因式: $a^2 - 16b^2 = \underline{(a+4b)(a-4b)}$.

【分析】 利用平方差公式分解.

【解答】 解: 原式 $= (a+4b)(a-4b)$.

故答案为: $(a+4b)(a-4b)$.

【点评】 本题考查了整式的因式分解, 掌握因式分解的公式法是解决本题的关键.

12. (3 分) 2019 年江苏省粮食总产达 40540000 吨, 居全国第四位. 用科学记数法表示 40540000 是 $\underline{4.054 \times 10^7}$.

【分析】 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq a < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 ≥ 10 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

【解答】 解: $40540000 = 4.054 \times 10^7$.

故答案为: 4.054×10^7 .

【点评】 此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

13. (3 分) 若正多边形的一个内角等于 140° , 则这个正多边形的边数是 $\underline{9}$.

【分析】 首先根据求出外角度数, 再利用外角和定理求出边数.

【解答】 解: $\because$ 正多边形的一个内角是 140° ,

$$\therefore \text{它的外角是: } 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ,$$

$$360^\circ \div 40^\circ = 9.$$

故答案为: 9.

【点评】 此题主要考查了多边形的外角与内角, 做此类题目, 首先求出正多边形的外角

度数，再利用外角和定理求出边数.

14. (3分) 已知方程 $x^2 - 2023x + 1 = 0$ 的两根分别为 x_1, x_2 , 则 $x_1 + x_2$ 的值为 2023.

【分析】利用一元二次方程的根与系数的关系解答即可.

【解答】解: $\because x_1, x_2$ 是方程 $x^2 - 2023x + 1 = 0$ 的两根,

$$\therefore x_1 + x_2 = 2023,$$

故答案为: 2023.

【点评】本题主要考查了一元二次方程的根与系数关系, 解题的关键是理解并掌握一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根 x_1, x_2 与系数的关系 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

15. (3分) 对于抛物线 $y = ax^2 + 2ax$, 当 $x = 1$ 时, $y > 0$, 则这条抛物线的顶点一定在第 三 象限.

【分析】根据当 $x = 1$ 时, $y = a + 2a = 3a > 0$, 确定 $a > 0$, 求出顶点坐标, 即可求解.

【解答】解: $\because$ 当 $x = 1$ 时, $y = a + 2a = 3a > 0$,

$$\therefore a > 0,$$

$$\because \text{抛物线 } y = ax^2 + 2ax \text{ 的对称轴为: } x = -\frac{2a}{2a} = -1, \text{ 顶点纵坐标为: } 0 - \frac{4a^2}{4a} = -a < 0,$$

$\therefore$ 这条抛物线的顶点一定在第三象限,

故答案为: 三.

【点评】本题考查二次函数的性质, 关键是得出 a 的取值范围, 利用二次函数的性质解答.

16. (3分) 已知圆锥的母线与高的夹角为 30° , 母线长为 4cm 则它的底面半径为 2 cm , 全面积是 12π cm^2 (结果保留 π).

【分析】利用 30° 的三角函数即可求得圆锥的底面半径, 圆锥的侧面积 = 底面周长 $\times$ 母线长 $\div 2$.

【解答】解: 由正弦的概念知, 底面半径 $= 4\sin 30^\circ = 2$,

$$\text{则底面周长} = 4\pi, \text{ 侧面积} = \frac{1}{2} \times 4\pi \times 4 = 8\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$\text{底面积} = \pi \cdot 2^2 = 4\pi \text{ (cm}^2\text{)},$$

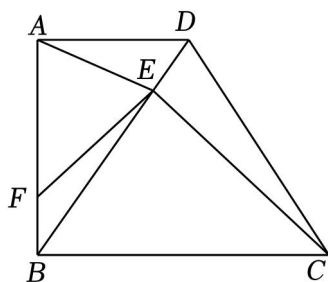
$$\text{全面积} = 4\pi + 8\pi = 12\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

故答案为: 2, 12π .

【点评】本题利用了正弦的概念和圆的周长公式, 扇形的面积公式求解.

17. (3分) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 4$, $BC = 6$, $AD = 3$, E 为对角线 BD 上的动点, 点 F 在边 AB 上. 连接 AE 、 BF 、 EC , 记 $\triangle AEF$ 的面积为 S_1 ,

$$\triangle BCE \text{ 的面积为 } S_2, \text{ 若 } \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{3}, \text{ 则 } BF \text{ 长为 } \underline{\frac{4}{3}}.$$



【分析】通过证明 $\triangle ABD \sim \triangle MBE$ ，可得 $\frac{ME}{BM} = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{4}$ ，由三角形面积公式可求 AF 的长，

即可求解．

【解答】解：如图，过点 E 作 $EM \perp AB$ 于 M ， $EH \perp BC$ 于 H ．

又 $\because \angle ABC = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $EMBH$ 是矩形，

$\therefore BM = EH$ ，

$\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$ ，

$\because \angle ABC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BAD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BAD = \angle BME = 90^\circ$ ，

又 $\because \angle ABD = \angle MBE$ ，

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle MBE$ ，

$\therefore \frac{ME}{BM} = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{4}$ ，

$\therefore$ 设 $ME = 3x$ ，则 $BM = EH = 4x$ ，

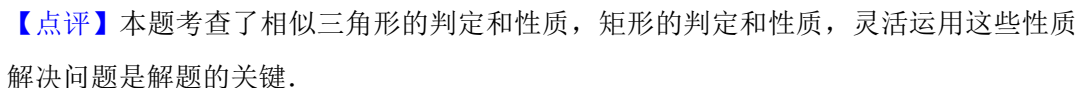
$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{3}$ ，

$\therefore \frac{\frac{1}{2} \times AF \times 3x}{\frac{1}{2} \times 6 \times 4x} = \frac{1}{3}$ ，

$\therefore AF = \frac{8}{3}$ ，

$\therefore BF = AB - AF = \frac{4}{3}$ ，

故答案为： $\frac{4}{3}$ ．



【解答】解：连接 AC ，交 BD 于 O 点，连接 EG ，则 EG 过 O 点，如图：

∴四个全等的直角三角形拼成“赵爽弦图”，得到正方形 $ABCD$ 与正方形 $EFGH$ ， DE 平分 $\angle ADB$ ，

$$\therefore \frac{BG}{EG} = \frac{(\sqrt{2} + 1) \times}{2 \times} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2},$$

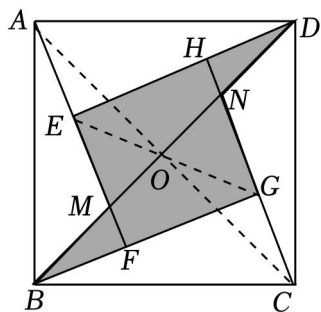
在 $\text{Rt}\triangle BCG$ 中, $BC^2 = CG^2 + BG^2 = (4 + 2\sqrt{2})x^2$,

$\therefore$ 阴影区域面积为: $2 \times \frac{1}{2} \times x \times (\sqrt{2} + 1)x = (\sqrt{2} + 1)x^2$,

大正方形面积为: $(4 + 2\sqrt{2})x^2 = 2\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)x^2$,

$\therefore$ 针尖落在阴影区域的概率 = $\frac{\text{阴影部分面积}}{\text{大正方形面积}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

故答案为: $\frac{\sqrt{2} + 1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}$.



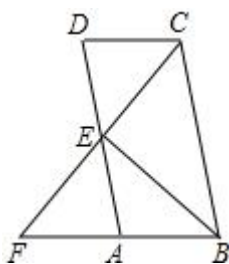
【点评】 本题考查了正方形的性质, 全等三角形的判定与性质, 勾股定理, 直角三角形的性质等知识, 熟练掌握勾股定理的应用是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 10 小题, 共 96 分. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算过程)

19. (10 分) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 为 AD 的中点, 延长 CE 交 BA 的延长线于点 F .

(1) 求证: $AB = AF$;

(2) 若 $BC = 2AB$, $\angle BCD = 100^\circ$, 求 $\angle ABE$ 的度数.



【分析】 (1) 由四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 点 E 为 AD 的中点, 易证得 $\triangle DEC \cong \triangle AEF$ (AAS), 继而可证得 $DC = AF$, 又由 $DC = AB$, 证得结论;

(2) 由 (1) 可知 $BF = 2AB$, $EF = EC$, 然后由 $\angle BCD = 100^\circ$ 求得 BE 平分 $\angle CBF$, 继而求得答案.

【解答】 证明: (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore CD = AB$, $CD \parallel AB$,

$\therefore \angle DCE = \angle F$, $\angle FBC + \angle BCD = 180^\circ$,

$\because E$ 为 AD 的中点,

$\therefore DE = AE$.

在 $\triangle DEC$ 和 $\triangle AEF$ 中,

$$\begin{cases} \angle DCE = \angle F \\ \angle DEC = \angle AEF, \\ DE = AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle DEC \cong \triangle AEF$ (AAS).

$\therefore DC = AF$.

$\therefore AB = AF$;

(2) 由(1)可知 $BF = 2AB$, $EF = EC$,

$\because \angle BCD = 100^\circ$,

$\therefore \angle FBC = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$,

$\because BC = 2AB$,

$\therefore BF = BC$,

$\therefore BE$ 平分 $\angle CBF$,

$\therefore \angle ABE = \frac{1}{2} \angle FBC = \frac{1}{2} \times 80^\circ = 40^\circ$

【点评】此题考查了平行四边形的性质、全等三角形的判定与性质以及等腰三角形的性质. 注意证得 $\triangle DEC \cong \triangle AEF$ 与 $\triangle BCF$ 是等腰三角形是关键.

20. (8分) 计算:

(1) $\sqrt{12} + (\pi - 2015)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - 6 \tan 30^\circ$;

(2) $(2a+1)^2 - 4a(a-1)$.

【分析】(1) 根据二次根式的性质, 零指数幂, 负整数指数幂和特殊角的三角函数值求解即可;

(2) 根据完全平方公式和单项式乘多项式的运算法则求解即可.

【解答】解: (1) $\sqrt{12} + (\pi - 2015)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - 6 \tan 30^\circ$

$$= 2\sqrt{3} + 1 + 2 - 6 \times \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= 3;$$

(2) $(2a+1)^2 - 4a(a-1)$

$$= 4a^2 + 4a + 1 - 4a^2 + 4a$$

$$= 8a + 1.$$

【点评】本题考查了完全平方公式, 单项式乘多项式, 负整数指数幂, 零指数幂, 特殊角的三角函数值, 二次根式, 熟练掌握这些知识是解题的关键.

21. (8分) (1) 解方程: $x^2 - 4x - 4 = 0$;

(2) 解不等式组:
$$\begin{cases} 2(x+1) > 5x-7 \\ \frac{x+10}{3} > 2x \end{cases}.$$

【分析】(1) 移项后配方, 开方, 即可得出两个一元一次方程, 求出方程的解即可;

(2) 先求出两个不等式的解集, 再根据求不等式组解集的规律求出不等式组的解集即可.

【解答】解: (1) $x^2 - 4x - 4 = 0$,

移项得: $x^2 - 4x = 4$,

配方得: $x^2 - 4x + 4 = 4 + 4$,

$(x - 2)^2 = 8$,

开方得: $x - 2 = \pm\sqrt{8}$,

解得: $x_1 = 2 + 2\sqrt{2}$, $x_2 = 2 - 2\sqrt{2}$;

(2)
$$\begin{cases} 2(x+1) > 5x-7 & \text{①} \\ \frac{x+10}{3} > 2x & \text{②} \end{cases},$$

解不等式①, 得 $x < 3$,

解不等式②, 得 $x < 2$,

所以不等式组的解集是 $x < 2$.

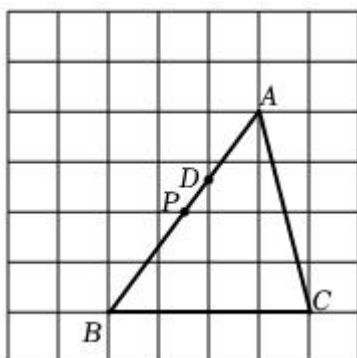
【点评】本题考查了解一元二次方程和解一元一次不等式组, 能正确配方是解(1)的关键, 能根据求不等式组解集的规律求出不等式组的解集是解(2)的关键.

22. (10分) 如图是边长为1的正方形网格, 每个小正方形的顶点叫格点, $\triangle ABC$ 的顶点都在格点上. 仅用无刻度的直尺, 按要求画出下列图形.

(1) $\triangle ABC$ 的周长为 $9 + \sqrt{17}$;

(2) 如图, 点 D 、 P 分别是 AB 与竖格线和横格线的交点, 画出点 P 关于过点 D 竖格线的对称点 Q ;

(3) 请在图中画出 $\triangle ABC$ 的角平分线 BE .



【分析】(1) 利用勾股定理求出 AB , AC , 可得结论;

(2) 根据对称性作出图形即可;

(3) 利用等腰三角形的三线合一的性质解决问题即可.

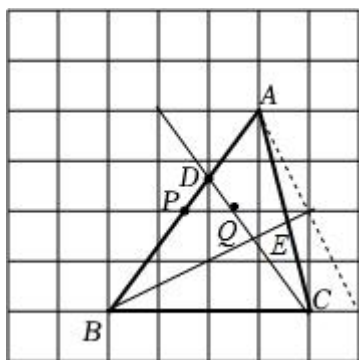
【解答】解：(1) 由题意 $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $BC = 4$, $AC = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$,

$\therefore \triangle ABC$ 的周长 $= 5 + 4 + \sqrt{17} = 9 + \sqrt{17}$,

故答案为: $9 + \sqrt{17}$;

(2) 如图, 点 Q 即为所求;

(3) 如图, 线段 BE 即为所求.

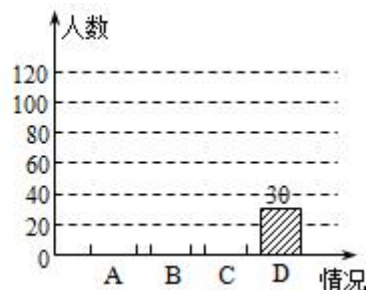
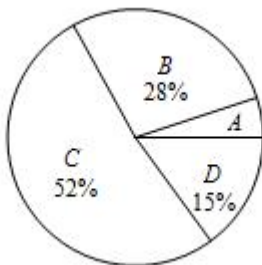


【点评】本题考查作图 - 应用与设计作图, 勾股定理等知识, 解题的关键是学会利用数形结合的思想解决问题, 属于中考常考题型.

23. (10 分) “低碳环保, 你我同行”, 两年来, 南京市区的公共自行车给市民出行带来切实方便, 电视台记者在某区街头随机选取了市民进行调查, 调查的问题是“您大概多久使用一次公共自行车?”, 将本次调查结果归为四种情况: A. 每天都用; B. 经常使用; C. 偶尔使用; D. 从未使用. 将这次调查情况整理并绘制如下两幅统计图:

根据图中的信息, 解答下列问题:

- (1) 本次活动共有 200 位市民参与调查;
- (2) 补全条形统计图;
- (3) 根据统计结果, 若该区有 46 万市民, 请估算每天都用公共自行车的市民约有多少人?



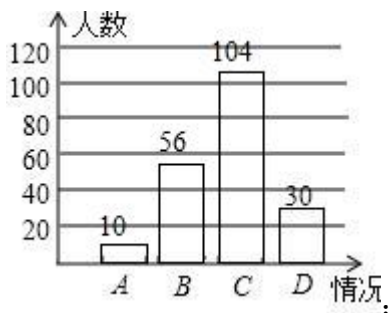
【分析】(1) 根据 D 类人数除以 D 所占的百分比, 可得答案;

(2) 根据抽测人数乘以 B 类所占的百分比, C 类所占的百分比, 可得各类的人数, 根据各类的人数, 可得答案;

(3) 根据样本估计总体, 可得答案.

【解答】解：（1）本次活动共参与的市民 $30 \div 15\% = 200$ 人，
故答案为：200；

（2） B 的人数有 $200 \times 28\% = 56$ 人，
 C 的人数有 $200 \times 52\% = 104$ 人，
 A 的人数有 $200 - 56 - 104 - 30 = 10$ 人，



补全条形统计图如图：

（3） $46 \times (1 - 28\% - 52\% - 15\%) = 2.3$ （万人），

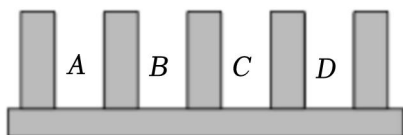
答：每天都用公共自行车的市民约有 2.3 万人。

【点评】本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用，读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键．条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据；扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小．

24.（10 分）随着高铁、地铁的大量兴建以及铁路的改扩建，人们的出行方式越来越多，出行越来越便捷．为保障旅客快捷、安全的出入车站，每个车站都修建了如图所示的出入闸口．某车站有四个出入闸口，分别记为 A ， B ， C ， D ．

（1）一名乘客通过该站闸口时，选择 B 闸口通过的概率是 $\frac{1}{4}$ ；

（2）当两名乘客通过该站闸口时，请用画树状图或列表法求这两名乘客选择不同闸口通过的概率．



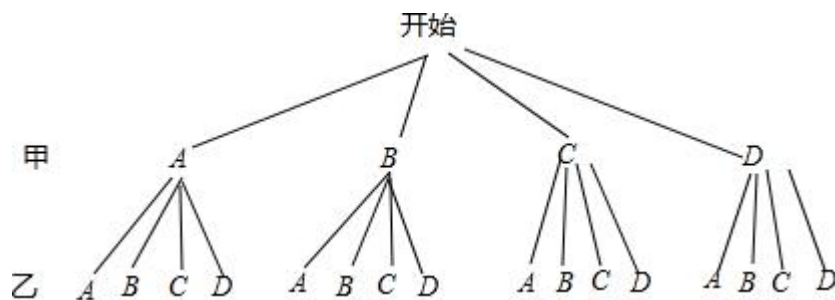
【分析】（1）直接根据概率公式求解即可；

（2）画树状图列出所有等可能结果，从中找到符合条件的结果数，再根据概率公式求解即可．

【解答】解：（1）一名乘客通过该站闸口时，他选择 A 闸口通过的概率为 $\frac{1}{4}$ ；

故答案为： $\frac{1}{4}$ ．

（2）画树状图得：



由树状图可知：有 16 种等可能的结果，其中两名乘客选择不同闸口通过的有 12 种结果.

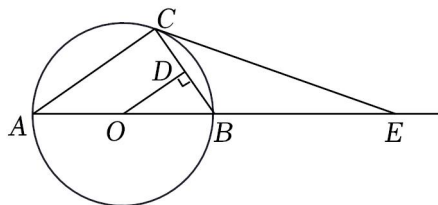
$\therefore$ 两名乘客选择相同闸口通过的概率 $= \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

【点评】 本题考查的是用列表法或画树状图法求概率. 列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，列表法适合于两步完成的事件，树状图法适合两步或两步以上完成的事件. 掌握概率公式：概率 = 所求情况数与总情况数之比是解题的关键.

25. (10 分) 如图，已知 $\odot O$ 是 $\text{Rt}\triangle ACB$ 的外接圆，过点 O 作 $OD \perp BC$ 于点 D ，作 $\angle BCE = \angle BOD$ 交 AB 延长线于点 E .

(1) 求证： CE 是 $\odot O$ 的切线；

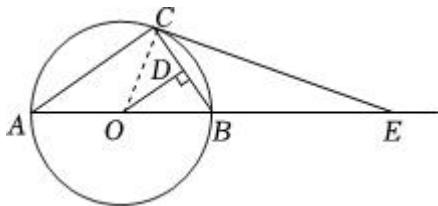
(2) 若 $\tan \angle BCE = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $BE = 2\sqrt{6}$, 求 CE 的长.



【分析】 (1) 连接 OC ，根据余角性质及切线的判定方法可得结论；

(2) 根据相似三角形的判定与性质及解直角三角形可得答案.

【解答】 (1) 证明：连接 OC ，



$$\therefore \angle OBC = \angle OCB,$$

$$\because OD \perp BC,$$

$$\therefore \angle OBC + \angle BOD = 90^\circ,$$

$$\because \angle BCE = \angle BOD,$$

$$\therefore \angle OCB + \angle BCE = 90^\circ = \angle OCE,$$

$$\therefore OC \perp CE,$$

$$\because OC \text{ 是半径,}$$

∴ CE 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 解: ∵ $\angle ODB = \angle ACB = 90^\circ$,

∴ $OD \parallel AC$,

∴ $\angle BOD = \angle BAC$,

∵ $\angle BCE = \angle BOD$,

∴ $\angle BCE = \angle CAE$,

∵ $\angle BEC = \angle CEA$,

∴ $\triangle BCE \sim \triangle CAE$,

$$\therefore \frac{BE}{CE} = \frac{BC}{CA},$$

∵ $\tan \angle BAC = \frac{BC}{CA}$, $\angle BAC = \angle BOD = \angle BCE$,

$$\therefore \frac{BC}{CA} = \tan \angle BCE = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore BE = 2\sqrt{6},$$

$$\therefore \frac{2\sqrt{6}}{CE} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore CE = 4\sqrt{3}.$$

【点评】 此题考查的是切线的判定与性质, 相似三角形的判定与性质, 解直角三角形, 正确作出辅助线是解决此题的关键.

26. (10 分) 六月是水蜜桃大量上市的季节, 某果农在销售时发现: 若水蜜桃的售价为 15 元/千克, 则日销售量为 50 千克, 若售价每提高 1 元/千克, 日销售量就减少 2 千克, 现设水蜜桃售价为 x 元/千克 ($x \geq 15$, 且 x 为正整数).

(1) 若某日销售量为 40 千克, 则该日水蜜桃的单价为多少元?

(2) 若政府将销售价格定为不超过 30 元/千克, 设每日销售额为 W 元, 求 W 关于 x 的函数表达式, 并求 W 的最大值和最小值;

(3) 为更好地促进果农的种植积极性, 市政府加大对果农的补贴, 每日给果农补贴 a 元后 (a 为正整数), 果农发现最大日收入 (日收入 = 销售额 + 政府补贴) 还是不超过 910 元, 并且只有 5 种不同的单价使日收入不少于 900 元, 请直接写出所有符合题意的 a 的值.

【分析】 (1) 由某日销售量为 40 千克列方程, 可解得该日水蜜桃的单价为 20 元/千克;

(2) 根据题意 $W = x[50 - 2(x - 15)] - 2(x - 20)^2 + 800$, 而 $15 \leq x \leq 30$, 且 x 为正整数, 可得 $x = 20$ 时, W 有最大值是 800 元, $x = 30$ 时, W 有最小值是 $-2(30 - 20)^2 + 800 = 600$ 元;

(3) 由 $900 \leq -2x^2 + 80x + a \leq 910$, 又只有 5 种不同的单价使日收入不少于 900 元, 可知

x 的取值为 18, 19, 20, 21, 22; 当 $x=18$ 或 22 时, $-2x^2+80x=792$, 当 $x=19$ 或 21 时, $-2x^2+80x=798$, 当 $x=20$ 时, $-2x^2+80x=800$, 根据补贴后不超过 910 元, 可得当 $a=108$ 或 109 或 110 时符合题意.

【解答】解: (1) 由题意得: $50 - 2(x - 15) = 40$,

解得: $x=20$,

答: 该日水蜜桃的单价为 20 元/千克;

(2) 根据题意得: $W=x[50 - 2(x - 15)] = -2x^2+80x = -2(x - 20)^2+800$,

$\because$ 政府将销售价格定为不超过 30 元/千克,

$\therefore 15 \leq x \leq 30$, 且 x 为正整数,

$\because -2 < 0$,

$\therefore x=20$ 时, W 有最大值是 800 元,

$x=30$ 时, W 有最小值是 $-2(30 - 20)^2+800=600$ 元;

答: $W = -2x^2+80x$, W 最大值是 800 元, W 最小值是 600 元;

(3) 由题意得: $900 \leq -2x^2+80x+a \leq 910$,

$\because$ 只有 5 种不同的单价使日收入不少于 900 元, 5 为奇数,

$\therefore$ 由二次函数的对称性可知, x 的取值为 18, 19, 20, 21, 22;

当 $x=18$ 或 22 时, $-2x^2+80x=792$,

当 $x=19$ 或 21 时, $-2x^2+80x=798$,

当 $x=20$ 时, $-2x^2+80x=800$,

$\because$ 补贴后不超过 910 元, $792+108=900$, $800+110=910$,

$\therefore$ 当 $a=108$ 或 109 或 110 时符合题意.

答: 符合题意的 a 的值是 108, 109, 110.

【点评】考查二次函数的应用, 得到日销售量是解决本题的突破点, 需注意 x 的取值应
为正整数, 解题的关键是熟练掌握二次函数的性质及列出函数解析式.

27. (10 分) 如图, 已知矩形 $ABCD$ 中, E 是边 AD 上一点, 将 $\triangle BDE$ 沿 BE 折叠得到 $\triangle BFB$, 连接 DF .

(1) 如图 1, BF 落在直线 BA 上时, 求证 $\triangle DFA \sim \triangle BEA$;

(2) 如图 2, 当 $\frac{AD}{AB} = \sqrt{2}$ 时, BF 与边 AD 相交时, 在 BB 上取一点 G , 使 $\angle BAG = \angle DAF$,

AG 与 BF 交于点 H ,

①求 $\frac{AF}{AG}$ 的值;

②当 E 是 AD 的中点时, 若 $FD \cdot FH = 18$, 求 AG 的长.

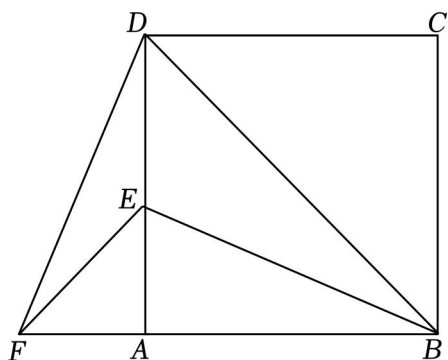


图1

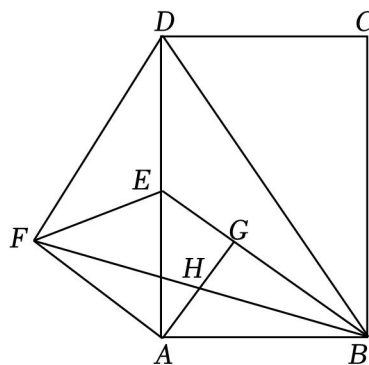


图2

【分析】(1) 延长 BE 交 DF 于点 T . 证明 $\angle EDT = \angle ABE$, 可得结论;

(2) ①如图 2, 延长 BE 交 DF 于点 T , 利用折叠和矩形性质可证得 $\triangle DAF \sim \triangle BAG$, 即可求得答案;

②如图 3, 延长 BE 交 DF 于点 T , 连接 FG , 由 $\triangle DAF \sim \triangle BAG$, 可得 $\angle AFD = \angle AGB = 90^\circ$, $\frac{FD}{GB} = \frac{AF}{AG} = \frac{AD}{AB} = \sqrt{2}$, 进而证得 $\triangle DTE \cong \triangle AGE$ (AAS), 得出 $DT = AG$, 设 $AG = x$ ($x > 0$), 则 $DT = x$, 利用勾股定理和平行四边形性质即可求得答案.

【解答】(1) 证明: 延长 BE 交 DF 于点 T .

$\because \triangle BED, \triangle BEF$ 关于 BE 对称,

$\therefore BT \perp DF$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle DAF - \angle BAE = 90^\circ = \angle ETD$,

$\because \angle AEB = \angle DET$,

$\therefore \angle EDT = \angle EBA$,

$\therefore \triangle DFA \sim \triangle BEA$;

(2) 解: ①如图 2, 延长 BE 交 DF 于点 T ,

由折叠可知 BE 垂直平分 DF ,

$\therefore DT = FT, BT \perp DF$,

$\therefore \angle FDA + \angle DET = 90^\circ$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore DA \perp AB$,

$\therefore \angle ABE + \angle AEB = 90^\circ$,

$\because \angle AEB = \angle DET$,

$\therefore \angle FDA = \angle ABE$,

又 $\because \angle DAF = \angle BAG, \frac{AD}{AB} = \sqrt{2}$,

$$\therefore \triangle DAF \sim \triangle BAG,$$

$$\therefore \frac{AF}{AG} = \frac{AD}{AB} = \sqrt{2};$$

②如图 3, 延长 BE 交 DF 于点 T , 连接 FG ,

$\because E$ 是 AD 的中点,

$$\therefore DE = AE,$$

由折叠可知 $EF = DE$, $BF = BD$,

$$\therefore EF = DE = AE,$$

$$\therefore \angle EDF = \angle DFE, \angle EAF = \angle EFA,$$

$$\text{又} \because \angle EDF + \angle DFE + \angle EAF + \angle EFA = 180^\circ,$$

$$\therefore 2(\angle DFE + \angle EFA) = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle DFE + \angle EFA = 90^\circ, \text{即} \angle DFA = 90^\circ,$$

由 (2) 知 $\triangle DAF \sim \triangle BAG$,

$$\therefore \angle AFD = \angle AGB = 90^\circ, \frac{FD}{GB} = \frac{AF}{AG} = \frac{AD}{AB} = \sqrt{2},$$

$$\therefore AG \perp BE, GB = \frac{\sqrt{2}}{2}FD,$$

$$AF = \sqrt{2}AG, AD = \sqrt{2}AB,$$

$$\because BT \perp FD,$$

$$\therefore \angle DTE = \angle AGE = 90^\circ,$$

在 $\triangle DTE$ 和 $\triangle AGE$ 中,

$$\begin{cases} \angle DTE = \angle AGE \\ \angle DET = \angle AEG, \\ DE = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DTE \cong \triangle AGE \text{ (AAS)},$$

$$\therefore DT = AG,$$

设 $AG = x$ ($x > 0$), 则 $DT = x$,

由折叠得: BE 垂直平分 FD ,

$$\therefore FT = DT = x, FD = 2DT = 2x,$$

$$\therefore GB = \frac{\sqrt{2}}{2}FD = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2x = \sqrt{2}x,$$

$$\therefore AF = GB = \sqrt{2}x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle AGB \text{ 中, } AB = \sqrt{AG^2 + BG^2} = \sqrt{x^2 + (\sqrt{2}x)^2} = \sqrt{3}x,$$

$$\because AD = \sqrt{2}AB,$$

$$\therefore AD = \sqrt{2} \times \sqrt{3}x = \sqrt{6}x,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,
 $\therefore \angle BAD=90^\circ$,
 $\therefore BF=BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{(\sqrt{3}x)^2+(\sqrt{6}x)^2}=3x$,
 $\because \angle BAG=\angle DAF$,
 $\therefore \angle BAG+\angle DAG=\angle DAF+\angle DAG$,
 即 $\angle BAD=\angle GAF=90^\circ$,
 又 $\because \angle AGB=90^\circ$,
 $\therefore \angle AGB=\angle GAF=90^\circ$,
 $\therefore AF\parallel GB$,
 又 $\because AF=GB=\sqrt{2}x$,
 $\therefore$ 四边形 $ABGF$ 是平行四边形,
 $\therefore FH=BH=\frac{1}{2}BF=\frac{1}{2}\times 3x=\frac{3}{2}x$,
 又 $\because FD\cdot FH=18$,
 $\therefore 2x\cdot \frac{3}{2}x=18$,
 即 $x^2=6$,
 $\because x>0$,
 $\therefore x=\sqrt{6}$,
 即 $AG=\sqrt{6}$.

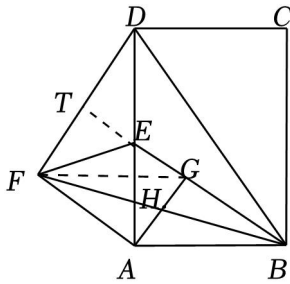


图3

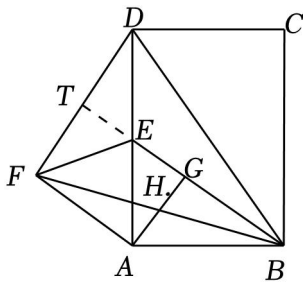


图2

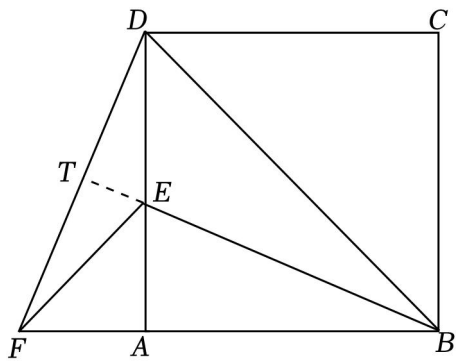
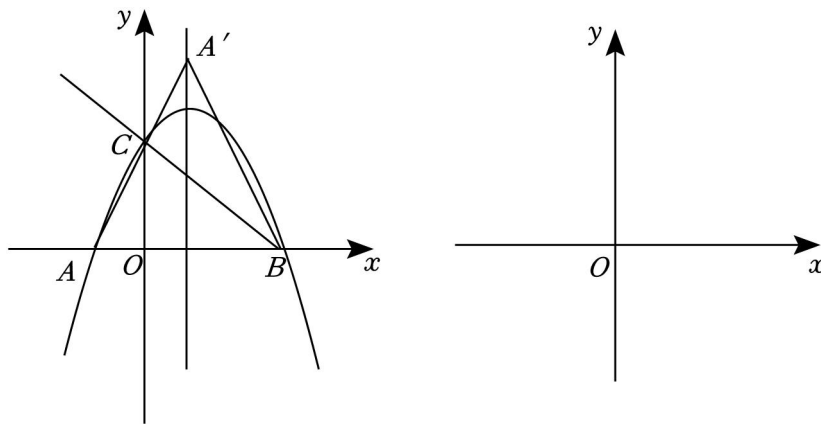


图1

【点评】本题属于四边形综合题，考查了矩形的性质，翻折变换性质，勾股定理，全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质等知识，解题的关键是学会正确寻找全等三角形解决问题，学会利用参数构建方程解决问题，属于中考常考题型.

28. (10 分) 在平面直角坐标系中，抛物线 $y = mx^2 - 2mx - 3m$ 与 x 轴交 A 、 B 两点 (点 A 在点 B 左侧)，与 y 轴交于点 C ，连接 AC ， BC ，点 A 关于 BC 所在的直线的对称点 A' ，连接 $A'B$ 、 $A'C$ 。

- (1) 点 A 的坐标为 $(-1, 0)$ ，点 B 的坐标为 $(3, 0)$ 。
- (2) 若点 A' 落在抛物线的对称轴上，且在 x 轴上方，求抛物线的解析式。
- (3) 设抛物线顶点为 Q ，若 $\triangle BCQ$ 是锐角三角形，直接写出 m 的取值范围。

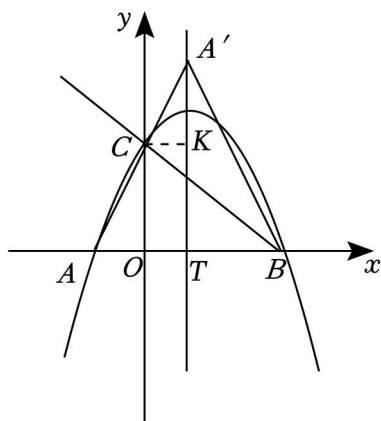


- 【分析】(1) 在 $y = mx^2 - 2mx - 3m$ 中，令 $y = 0$ 可解得 $A(-1, 0)$ ， $B(3, 0)$ ；
- (2) 设抛物线对称轴交 x 轴于 T ，过 C 作 $CK \perp A'T$ 于 K ，由 $y = mx^2 - 2mx - 3$ ，可得 $C(0, -3m)$ ， $OC = KT = -3m$ ，抛物线的对称轴是直线 $x = 1$ ，根据点 A 关于 BC 所在的直线的对称点 A' ，可知 CK 是 $\triangle A'T$ 的中位线，即得 $A'(1, -6m)$ ，又 $AB = A'B$ ，有 $\sqrt{(1+1)^2 + (-6m-0)^2} = 4$ ，解得 m 的值可得答案；
- (3) 分 $m < 0$ 和 $m > 0$ ，分别求出 $\triangle BCQ$ 是直角三角形时， m 的值，再数形结合可得答案。

【解答】解：(1) 在 $y = mx^2 - 2mx - 3m$ 中，令 $y = 0$ 得 $0 = mx^2 - 2mx - 3m$ ，
解得 $x = -1$ 或 $x = 3$ ，

$$\therefore A(-1, 0), B(3, 0);$$

(2) 设抛物线对称轴交 x 轴于 T , 过 C 作 $CK \perp A'T$ 于 K , 如图:



在 $y = mx^2 - 2mx - 3m$ 中, 令 $x=0$ 得 $y = -3m$,

$$\therefore C(0, -3m), OC = KT = -3m,$$

$$\because y = mx^2 - 2mx - 3m = m(x-1)^2 - 4m,$$

$\therefore$ 抛物线的对称轴是直线 $x=1$,

$$\therefore T(1, 0),$$

$\because$ 点 A 关于 BC 所在的直线的对称点 A' ,

$$\therefore AC = A'C, AB = A'B,$$

$$\because CK \perp A'T,$$

$\therefore CK$ 是 $\triangle A'T$ 的中位线,

$$\therefore A'T = 2KT = -6m,$$

$$\therefore A'(1, -6m),$$

$$\because A(-1, 0), B(3, 0), AB = A'B,$$

$$\therefore \sqrt{(1+1)^2 + (-6m-0)^2} = 4,$$

$$\text{解得 } m = \pm \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$\because$ 点 A' 在 x 轴上方,

$$\therefore m = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3};$$

(3) 当 $\triangle BCQ$ 的外接圆的圆心在 $\triangle BCQ$ 的边上时, $\triangle BCQ$ 是直角三角形,

由 (1), (2) 知 $y = mx^2 - 2mx - 3m = m(x-1)^2 - 4m$, $B(3, 0)$, $C(0, -3m)$,

$$\therefore Q(1, -4m),$$

$$\therefore CQ^2 = (0-1)^2 + (-3m+4m)^2 = m^2 + 1;$$

$$BQ^2 = (3-1)^2 + (0+4m)^2 = 16m^2 + 4;$$

$$CB^2 = (0-3)^2 + (-3m-0)^2 = 9m^2 + 9,$$

若 $m < 0$ 时, 如图:

$$\text{当点 } C \text{ 为直角顶点, } CQ^2 + CB^2 = BQ^2,$$

$$\therefore m^2 + 1 + 9m^2 + 9 = 16m^2 + 4,$$

$$\text{解得 } m = \pm 1,$$

$$\therefore m = -1, Q_1(1, 4),$$

$$\text{当点 } Q \text{ 为直角顶点, } BQ^2 + CQ^2 = CB^2,$$

$$\therefore 16m^2 + 4 + m^2 + 1 = 9m^2 + 9,$$

$$\text{解得 } m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore m = -\frac{\sqrt{2}}{2}, Q_2(1, 2\sqrt{2}),$$

由图可知, 当 Q 在 Q_1 和 Q_2 之间时, $\triangle BCQ$ 是锐角三角形,

$$\therefore -1 < m < -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

当 $m > 0$ 时, 如图:

$$\text{当点 } C \text{ 为直角顶点, } CQ^2 + CB^2 = BQ^2,$$

$$\therefore m^2 + 1 + 9m^2 + 9 = 16m^2 + 4,$$

$$\text{解得 } m = \pm 1,$$

$$\therefore m = 1, Q_4(1, -4),$$

$$\text{当点 } Q \text{ 为直角顶点, } BQ^2 + CQ^2 = CB^2,$$

$$\therefore 16m^2 + 4 + m^2 + 1 = 9m^2 + 9,$$

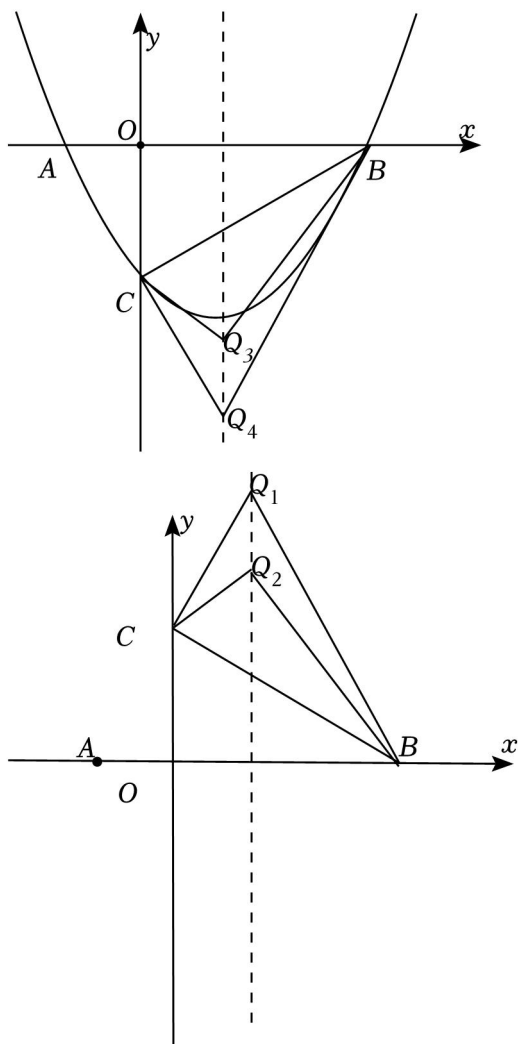
$$\text{解得 } m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore m = \frac{\sqrt{2}}{2}, Q_3(1, -2\sqrt{2}),$$

由图可知, 当 Q 在 Q_3 和 Q_4 之间时, $\triangle BCQ$ 是锐角三角形,

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} < m < 1;$$

综上所述, $\triangle BCQ$ 是锐角三角形, m 的取值范围是 $-1 < m < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{2} < m < 1$.



【点评】 本题考查二次函数的综合应用，涉及函数图象上点坐标的特征，待定系数法，锐角三角形的判定等知识，解题的关键是用含 m 的代数式表示相关点的坐标和相关线段的长度．