

2022-2023 学年江苏省无锡市锡山区九年级（上）期中数学试卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在试卷上无效。
3. 考试结束后，本试卷和答题卡一并交回。

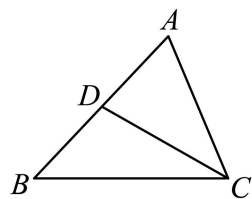
第 I 卷（选择题）

一、选择题（本大题共 10 小题，共 30.0 分。在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 下列方程为一元二次方程的是（ ）

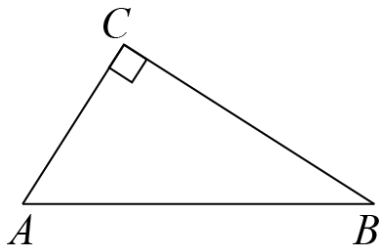
- A. $ax^2 + 2 = 0$ B. $x^2 - 2x - 3$ C. $x^2 + 1 = 0$ D. $xy + 1 = 0$

2. 如图，不能说明 $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ 的一组条件是（ ）



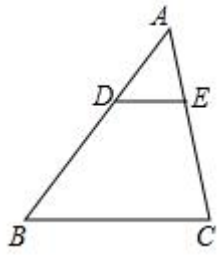
- A. $\angle B = \angle ACD$ B. $\angle ADC = \angle ACB$ C. $AC^2 = AD \cdot AB$ D. $\frac{AD}{AC} = \frac{DC}{BC}$

3. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $BC = 4$ ，则以 A 为圆心，3 为半径的 $\odot A$ 与 BC 的位置关系是（ ）



- A. 相离 B. 相切 C. 相交 D. 不确定

4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ，若 $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$ ，则 $\frac{DE}{BC} =$ （ ）

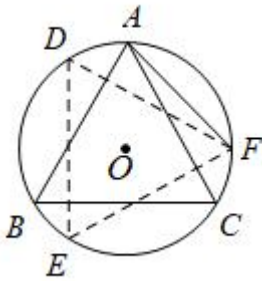


- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

5. 已知圆锥的底面半径为 3cm，母线长为 5cm，则圆锥的侧面积是（ ）

- A. $12\pi\text{cm}^2$ B. $15\pi\text{cm}^2$ C. $20\pi\text{cm}^2$ D. $30\pi\text{cm}^2$

6. 如图，等边三角形 ABC 内接于 $\odot O$ ，将 $\triangle ABC$ 的逆时针旋转 30° 得到 $\triangle DEF$ ，则 $\angle DAF$ 的度数为（ ）

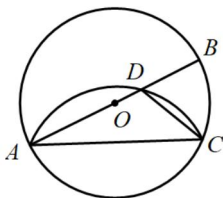


- A. 100° B. 105° C. 125° D. 120°

7. 下列说法：①圆中弦的垂直平分线一定经过圆心；②与半径垂直的直线是圆的切线；③相等的圆心角所对的弦也相等；④圆内接四边形有且只有一个．其中不正确的个数是（ ）

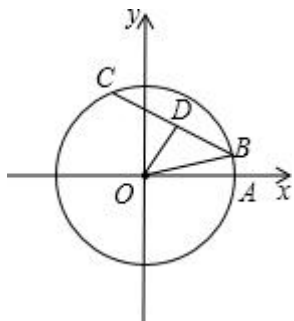
- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

8. 如图，在 $\odot O$ 中， AB 为直径，点 C 为圆上一点，将劣弧 AC 沿弦 AC 翻折交 AB 于点 D （不与 O 重合），连接 CD ．若 $\angle A = 22^\circ$ ，则 $\angle ACD$ 的度数为（ ）



- A. 46° B. 44° C. 48° D. 68°

9. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，以原点 O 为圆心的圆过点 $A(13,0)$ 直线 $y=kx-3k+4$ 与 $\odot O$ 交于 B 、 C 两点，则弦 BC 的长的最小值为（ ）



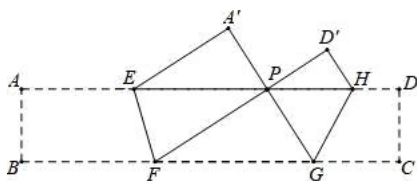
A. 22

B. 24

C. $10\sqrt{5}$

D. $12\sqrt{3}$

10. 如图, 把某矩形纸片 $ABCD$ 沿 EF , GH 折叠 (点 E 、 H 在 AD 边上, 点 F , G 在 BC 边上), 使点 B 和点 C 落在 AD 边上同一点 P 处, A 点的对称点为 A' 、 D 点的对称点为 D' , 若 $\angle FPG = 90^\circ$, $\triangle A'EP$ 的面积 为 8, $\triangle D'PH$ 的面积为 2, 则矩形 $ABCD$ 的长为 ()



A. $6\sqrt{5}+10$

B. $6\sqrt{10}+5\sqrt{2}$

C. $3\sqrt{5}+10$

D. $3\sqrt{10}+5\sqrt{2}$

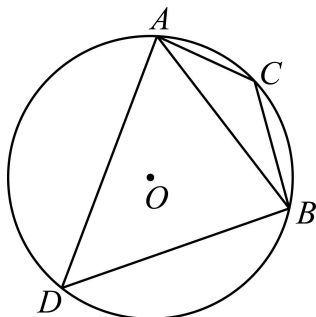
第 II 卷 (非选择题)

二、填空题 (本大题共 8 小题, 共 24.0 分)

11. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - kx - 6 = 0$ 的有一个根为 $x = 3$, 则 $k =$ _____.

12. 已知 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, 相似比为 1:2, 则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的周长比为 _____.

13. 如图, $\odot O$ 中, 已知 $\angle ACB = 130^\circ$, 则 $\angle D =$ _____.

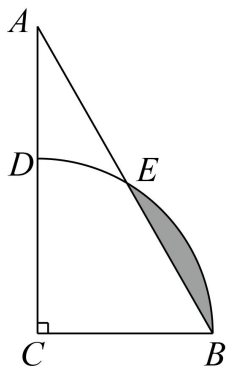


14. 2022 年 10 月 16 日上午, 举世瞩目的中共二十大召开. 非凡十年、沧桑巨变. 我国人均 GDP 从约 3.6 万元增加到 8.1 万元 (新华网). 假如每一个 5 年里人均增长率不变, 则这个人均增长率约为多少? 答: _____.

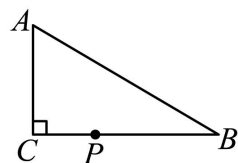
15. 对于任意实数 a 、 b , 定义一种运算: $a \oplus b = ab - 1$, 若 $x \oplus (x - 2) = 2$, 则 x 的值为 _____.

16. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $BC = 2$. 以点 C 为圆心, CB 长为半径画弧, 分别交 AC , AB 于点 D , E , 则图中阴影部分的面积为 _____ (结果保

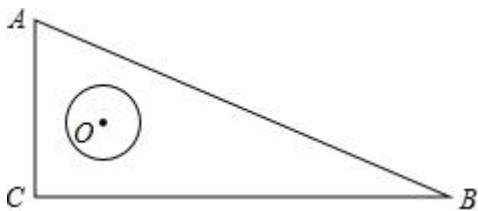
留 π).



17. P 是 $\triangle ABC$ 边上的任一点 (P 不与 A 、 B 、 C 重合), 过点 P 的一条直线截 $\triangle ABC$, 如果截得的三角形与 $\triangle ABC$ 相似, 我们称这条直线为过点 P 的 $\triangle ABC$ 的“相似线”. $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, 当点 P 是边 BC 上一个三等分点时 ($PB > PC$), 过点 P 的 $\triangle ABC$ 的“相似线”最多有_____条.



18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC : BC : AB = 5 : 12 : 13$, $\odot O$ 在 $\triangle ABC$ 内自由移动, 若 $\odot O$ 的半径为 1, 且圆心 O 在 $\triangle ABC$ 内所能到达的区域的面积为 $\frac{10}{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的周长为_____.



三、解答题 (本大题共 10 小题, 共 96.0 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

19. 解方程

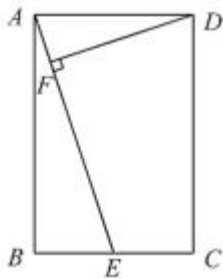
(1) $x^2 + 4x - 5 = 0$

(2) $4x^2 = (x-3)^2$

20. 在等腰 $\triangle ABC$ 中, 三边分别为 a 、 b 、 c , 其中 $a = 4$, 若关于 x 的方程

$x^2 + (b+2)x + 6 - b = 0$ 有两个相等的实数根, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

21. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, E 是 BC 的中点, $DF \perp AE$, 垂足为 F .



(1) 求证: $\triangle ABE \sim \triangle DFA$;

(2) 若 $AB=6$, $BC=4$, 求 DF 的长.

22. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 是锐角三角形 ($AC < AB$).

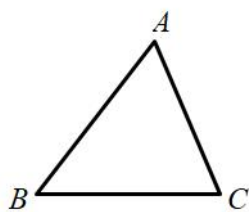


图1

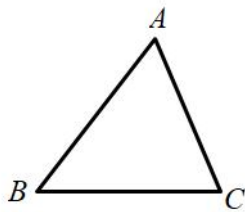


图2

(1) 请在图 1 中用无刻度的直尺和圆规作图: 作直线 l , 使 l 上的各点到 B 、 C 两点的距离相等; 设直线 l 与 AB 、 BC 分别交于点 M 、 N , 作一个圆, 使得圆心 O 在线段 MN 上, 且与边 AB 、 BC 相切; (不写作法, 保留作图痕迹)

(2) 在 (1) 的条件下, 若 $BM = \frac{5}{3}$, $BC=2$, 则 $\odot O$ 的半径为_____.

23. 阅读下面的例题: 分解因式: x^2+2x-1 .

解: 令 $x^2+2x-1=0$ 得到一个关于 x 的一元二次方程. $\because a=1, b=2, c=-1$,

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}. \text{ 解得 } x_1 = -1 + \sqrt{2}, \quad x_2 = -1 - \sqrt{2};$$

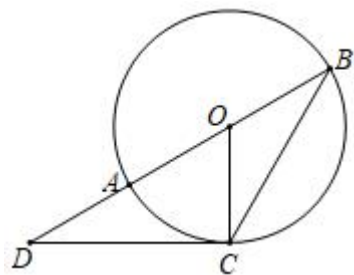
$$\therefore x^2 + 2x - 1 = (x - x_1)(x - x_2) = [x - (-1 + \sqrt{2})][x - (-1 - \sqrt{2})] = (x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2}).$$

这种因式分解的方法叫求根法, 请你利用这种方法完成下面问题:

(1) 已知代数式 $x^2 - 2x - k$ 对应的方程解为 -3 和 5 , 则代数式 $x^2 - 2x - k$ 分解后为_____;

(2) 将代数式 $x^2 - 3x + 1$ 分解因式.

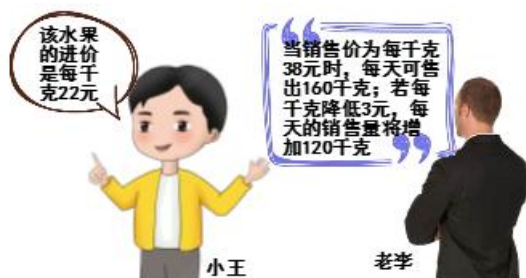
24. 如图, DB 过 $\odot O$ 的圆心, 交 $\odot O$ 于点 A 、 B , DC 是 $\odot O$ 的切线, 点 C 是切点, 已知 $\angle D = 30^\circ$, $DC = \sqrt{3}$.



(1) 求证: $\triangle BOC \sim \triangle BCD$;

(2) 求 $\triangle BCD$ 的周长.

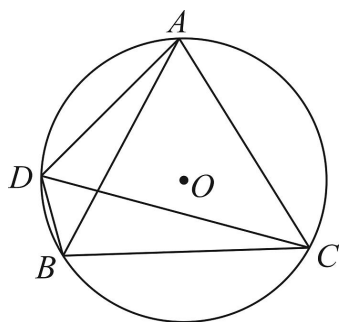
25. 国庆期间, 某水果超市调查某种水果的销售情况, 图中反映的是调查员小王与超市老李的对话:



根据他们的对话, 解决下面所给问题:

老李透露: 他每天租金、损耗等要开支 240 元; 若超市每天还要获得 3400 元的销售利润, 又要尽可能让顾客得到实惠, 则这种水果的售价应定为多少元?

26. 如图, $\odot O$ 为等边 $\triangle ABC$ 的外接圆, 半径为 2, 点 D 在劣弧上运动 (不与点 A, B 重合), 连接 DA, DB, DC .

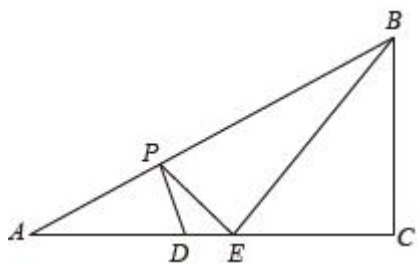


(1) 求证: DC 是 $\angle ADB$ 的平分线;

(2) 设线段 DC 的长为 x , 请你通过计算用含 x 的代数式表示四边形 $ADBC$ 的面积 S ;

(3) 若点 M, N 分别在线段 CA, CB 上运动 (不含端点), 经过探究发现, 点 D 运动到每一个确定的位置, $\triangle DMN$ 的周长有最小值, 随着点 D 的运动, $\triangle DMN$ 的周长的最小值也会发生变化, 则在 $\triangle DMN$ 周长的所有最小值中的最大值为_____.

27. 已知: 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 2$, $AC = 4$, P 是斜边 AB 上的一个动点, $PD \perp AB$ 交边 BC 于点 D (点 D 与点 A, C 都不重合), E 是射线 DC 上一点, 且 $\angle EPD = \angle A$, 设 A, P 两点的距离为 x , $\triangle BEP$ 的面积为 y .



- (1) 求证: $AE = 2PE$;
- (2) 求 y 关于 x 的函数关系式, 并写出它的定义域;
- (3) 当 $\triangle BEP$ 与 $\triangle ABC$ 相似时, 求 $\triangle BEP$ 的面积.

28. 在直角坐标系中, 矩形 $OABC$ 的边 OA 、 OC 在坐标轴上, B 点坐标是 $(4, 2)$, M 、 N 分别是边 OA 、 OC 上的点. 将 $\triangle OMN$ 沿着直线 MN 翻折, 若点 O 的对应点是 O' .

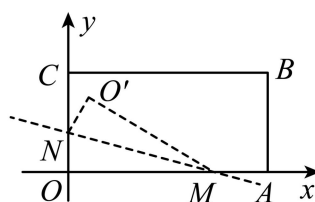
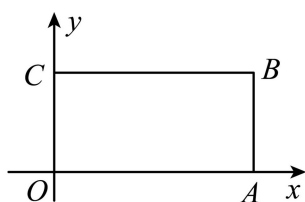
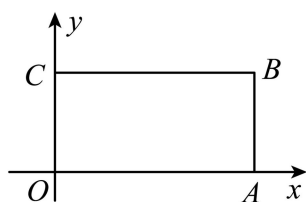


图1

图2

- (1) ①若 N 与 C 重合, M 是 OA 的中点, 则 O' 的坐标是_____;
- ② $MN \parallel AC$, 若翻折后 O' 在 AC 上, 求 MN 的解析式.
- (2) 已知 M 坐标是 $(3, 0)$, 若 $\triangle MNO'$ 的外接圆与线段 BC 有公共点, 求 N 的纵坐标 n 的取值范围.

1. C

【分析】根据一元二次方程的定义逐个判断即可. 只含有一个未知数, 并且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫一元二次方程.

【详解】解: A. 方程 $ax^2 + 2 = 0$, 当 $a = 0$, 不是一元二次方程, 故本选项不符合题意;

B. $x^2 - 2x - 3$ 是代数式, 故本选项不符合题意;

C. $x^2 + 1 = 0$ 是一元二次方程, 故本选项符合题意;

D. $xy + 1 = 0$ 含有两个未知数, 不是一元二次方程, 故本选项不符合题意;

故选: C.

【点睛】本题考查了一元二次方程的定义, 能熟记一元二次方程的定义是解此题的关键.

2. D

【分析】根据相似三角形的判定逐一进行判断即可.

【详解】解: $\because \angle B = \angle ACD, \angle A = \angle A$,

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ACD$, 故选项 A 不符合题意;

$\because \angle ADC = \angle ACB, \angle A = \angle A$,

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ACD$, 故选项 B 不符合题意;

$\because AC^2 = AD \cdot AB$,

$\therefore \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC}$,

$\because \angle A = \angle A$,

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ACD$, 故选项 C 不符合题意;

$\angle A$ 不是已知的比例线段的夹角, 故不能判定 $\triangle ABC \sim \triangle ACD$, 故选项 D 符合题意.

故选: D.

【点睛】本题主要考查了相似三角形的判定, 熟练掌握相似三角形的判定是解题的关键.

3. B

【分析】根据勾股定理求出 AC 的长度, 再根据圆心到直线的距离与圆的半径之间的关系进行判断即可.

【详解】解: $\angle C = 90^\circ, AB = 5, BC = 4$,

$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$,

$\therefore$ 圆心到直线的距离为: 3, 等于圆的半径,

$\therefore \odot A$ 与 BC 相切.

故选 B.

【点睛】本题考查直线与圆的位置关系. 熟练掌握根据圆心到直线的距离与圆的半径的大小关系确定直线与圆的位置关系是解题的关键.

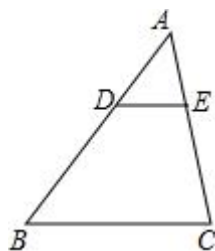
4. C

【分析】根据比例的性质以及相似三角形的性质可得 $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{2}{5}$.

【详解】解: $\because \frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$,

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{2}{5},$$

$$\therefore DE \parallel BC,$$



$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{2}{5},$$

故选: C.

【点睛】本题考查相似三角形的判定和性质, 比例的性质等知识, 熟练掌握相似三角形的判定和性质是解题的关键, 属于基础题, 中考常考题型.

5. B

【分析】圆锥的侧面积=底面周长 $\times$ 母线长 $\div 2$, 把相应数值代入即可求解.

【详解】圆锥的侧面积= $2\pi \times 3 \times 5 \div 2 = 15\pi$.

故选: B.

【点睛】本题考查了圆锥的计算, 解题的关键是弄清圆锥的侧面积的计算方法, 特别是圆锥的底面周长等于圆锥的侧面扇形的弧长.

6. D

【分析】利用圆的内接四边形对角互补可直接得解.

【详解】解: $\because \triangle ABC$ 的逆时针旋转 30° 得到 $\triangle DEF$,

$\therefore \triangle DEF$ 也是等边三角形,

$$\therefore \angle DEF = 60^\circ,$$

在 $\odot O$ 的内接四边形 $ADEF$ 中， $\angle DEF + \angle DAF = 180^\circ$ ，

$$\therefore \angle DAF = 180^\circ - \angle DEF = 120^\circ,$$

故选：D.

【点睛】本题考查圆的内接四边形的性质，掌握圆的内接四边形对角互补是解题的关键.

7. C

【分析】根据圆的相关概念和性质，逐一进行判断即可.

【详解】解：①圆中弦的垂直平分线一定经过圆心，说法正确，不符合题意；

②过半径的末端，且与半径垂直的直线是圆的切线，原说法错误，符合题意；

③在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弦也相等，原说法错误，符合题意；

④圆内接四边形有无数个，原说法错误，符合题意；

综上，②③④说法不正确.

故选 C.

【点睛】本题考查垂径定理，切线的定义，等角对等弦，圆内接四边形. 熟练掌握相关知识点是解题的关键.

8. A

【分析】连接 BC ，根据直径所对的圆周角是直角求出 $\angle ACB$ ，根据直角三角形两锐角互余求出 $\angle B$ ，再根据翻折的性质得到 $\widehat{AC}$ 所对的圆周角为 $\angle B$ ， $\widehat{ABC}$ 所对的圆周角为 $\angle ADC$ ， $\angle B = \angle CDB = 68^\circ$ ，最后由三角形外角的性质即可得出结论.

【详解】解：如图，连接 BC ，

$\because AB$ 是直径，

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\because \angle BAC = 22^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 90^\circ - \angle BAC = 90^\circ - 22^\circ = 68^\circ.$$

根据翻折的性质， $\widehat{AC}$ 所对的圆周角为 $\angle B$ ， $\widehat{ABC}$ 所对的圆周角为 $\angle ADC$ ，

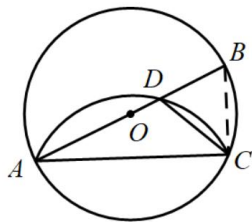
$$\therefore \angle ADC + \angle B = 180^\circ,$$

$$\because \angle ADC + \angle BDC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle CDB = 68^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle CDB - \angle CAD = 68^\circ - 22^\circ = 46^\circ$$

故选：A.



【点睛】本题考查的是直径所对的圆周角是直角和翻折变换等知识，掌握相关定理是解答此题的关键.

9. B

【详解】解：对于直线 $y = kx - 3k + 4 = k(x - 3) + 4$ ，无论 k 为何值时，恒经过点 $(3, 4)$ ，记为点 D ，

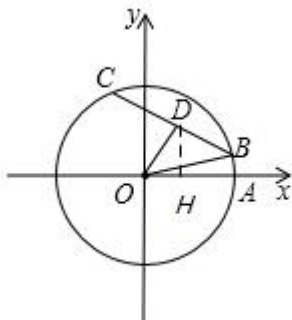
过点 D 作 $DH \perp x$ 于点 H ，则有 $OH = 3, DH = 4, OD = \sqrt{OH^2 + DH^2} = 5$ ，

$\because$ 点 $A(13, 0), \therefore OA = 13, \therefore OB = OA = 13$ ，

由于过圆内定点 D 的所有弦中，与 OD 垂直的弦最短，如图所示
根据垂径定理及勾股定理可得，

BC 的最小值为 $2BD = 2\sqrt{OB^2 - OD^2} = 2 \times \sqrt{13^2 - 5^2} = 24$

故选：B



10. D

【分析】设 $AB = CD = x$ ，由翻折可知： $PA' = AB = x$ ， $PD' = CD = x$ ，因为 $\triangle A'EP$ 的面积为 4，

$\triangle D'PH$ 的面积为 1，推出 $D'H = \frac{1}{2}x$ ，由 $S_{\triangle D'PH} = \frac{1}{2}D'P \cdot D'H = \frac{1}{2}A'P \cdot D'H$ ，可解得 $x = 2\sqrt{2}$ ，分别求出 PE 和 PH ，从而得出 AD 的长.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AB = CD, AD = BC$ ，

设 $AB=CD=x$,

由翻折可知: $PA'=AB=x$, $PD'=CD=x$,

$\because \triangle A'EP$ 的面积为 8, $\triangle D'PH$ 的面积为 2,

又 $\because \angle FPG = 90^\circ$, $\angle A'PF = \angle D'PG = 90^\circ$,

$\therefore \angle A'PD' = 90^\circ$, 则 $\angle A'PE + \angle D'PH = 90^\circ$,

$\therefore \angle A'PE = \angle D'HP$,

$\therefore \triangle A'EP \sim \triangle D'PH$,

$\therefore A'P^2 : D'H^2 = 8 : 2$,

$\therefore A'P : D'H = 2 : 1$,

$\because A'P = x$,

$\therefore D'H = \frac{1}{2}x$,

$\because S_{\triangle D'PH} = \frac{1}{2} D'P \cdot D'H = \frac{1}{2} A'P \cdot D'H$, 即 $\frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{1}{2}x = 2$,

$\therefore x = 2\sqrt{2}$ (负根舍去),

$\therefore AB = CD = 2\sqrt{2}$, $D'H = DH = \sqrt{2}$, $D'P = A'P = CD = 2\sqrt{2}$, $A'E = 2D'P = 4\sqrt{2}$,

$\therefore PE = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{10}$, $PH = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{10}$,

$\therefore AD = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{10} + \sqrt{10} + \sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{10}$,

故选 D.

【点睛】本题考查翻折变换, 矩形的性质, 勾股定理, 相似三角形的判定和性质等知识, 解题的关键是学会利用参数解决问题, 属于中考填空题中的压轴题.

11. 1

【分析】根据方程根的含义求解即可, 满足方程成立的未知数的值为方程的根.

【详解】解: 把 $x = 3$ 代入 $x^2 - kx - 6 = 0$,

得: $9 - 3k - 6 = 0$,

解得 $k = 1$.

故答案是 1.

【点睛】此题考查了一元二次方程的根, 解题的关键是理解一元二次方程根的含义.

12. 1:2

【分析】相似三角形的周长比等于相似比, 根据性质直接可得答案.

【详解】解：∵ $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ，相似比为1:2，

∴ $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的周长比等于相似比1:2.

故答案为：1:2.

【点睛】本题考查的是相似三角形的性质，掌握“相似三角形的周长之比等于相似比”是解本题的关键.

13. 50

【分析】根据内接四边形的性质可知 $\angle D + \angle ACB = 180^\circ$ ，即可求解.

【详解】∵ 在 $\odot O$ 的内接四边形 $ABCD$ 中，有 $\angle D + \angle ACB = 180^\circ$ ，

又∵ $\angle ACB = 130^\circ$ ，

∴ $\angle D = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$ ，

故答案为：50.

【点睛】本题考查了圆内接四边形的性质，掌握圆内接四边形的对角互补，是解答本题的关键.

14. 50%

【分析】设每一个5年里人均增长率为 x ，根据题意列出一元二次方程，解方程即可求解.

【详解】解：设每一个5年里人均增长率为 x ，根据题意得，

$$3.6(1+x)^2 = 8.1,$$

解得 $x_1 = 0.5 = 50\%$, $x_2 = -2.5$ (舍去),

故答案为：50%.

【点睛】本题考查了一元二次方程的应用，根据题意列出方程是解题的关键.

15. 3 或 -1

【分析】根据 $a \oplus b = ab - 1$ ，由 $x \oplus (x - 2) = 2$ ，可得： $x(x - 2) - 1 = 2$ ，据此求出 x 的值为多少即可.

【详解】解：∵ $x \oplus (x - 2) = 2$ ，

$$\therefore x(x - 2) - 1 = 2,$$

$$\therefore x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$\therefore (x - 3)(x + 1) = 0$$

解得 $x_1 = 3$, $x_2 = -1$.

故答案为：3 或 -1.

【点睛】此题主要考查了实数的新定义运算，解一元二次方程，解题的关键是要熟练掌握利用因式分解法求解一元二次方程.

16. $\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$

【分析】连接 CE ，由扇形 CBE 面积 - 三角形 CBE 面积求解.

【详解】解：连接 CE ，

$$\because \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 90^\circ - \angle A = 60^\circ,$$

$$\because CE = CB,$$

$\therefore \triangle CBE$ 为等边三角形，

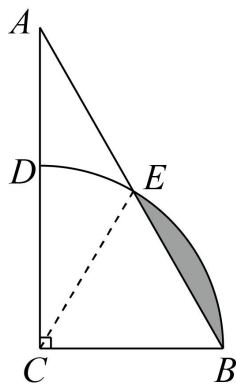
$$\therefore \angle ECB = 60^\circ, \quad BE = BC = 2,$$

$$\therefore S_{\text{扇形}CBE} = \frac{2^2 \times 60\pi}{360} = \frac{2}{3}\pi,$$

$$\because S_{\triangle BCE} = \frac{\sqrt{3}}{4}BC^2 = \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{阴影部分的面积为 } \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}.$$

故答案为： $\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$.



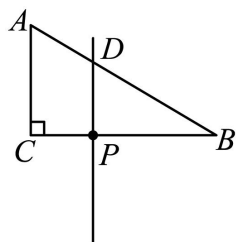
【点睛】本题考查扇形的面积与等边三角形的性质与判定，解题关键是判断出三角形 CBE 为等边三角形与扇形面积的计算.

17. 4

【分析】根据相似线的定义，可知截得的三角形与 $\triangle ABC$ 有一个公共角，分①公共角为 $\angle A$ 时；②公共角为 $\angle B$ 时；③公共角为 $\angle C$ 时；三种情况进行讨论，即可得出答案.

【详解】解：①当公共角为 $\angle A$ 时，不存在；

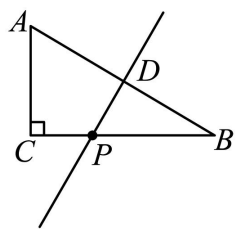
②公共角为 $\angle B$ 时，过点 P 作 $PD \perp BC$ ，交 AB 于点 D ，如图所示：



$$\because \angle DPB = \angle C = 90^\circ, \quad \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \triangle BPD \sim \triangle BCA;$$

过点 P 作 $PD \perp AB$ 于点 D ，如图所示：

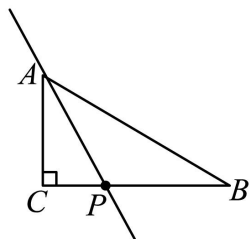


$$\because \angle PDB = \angle C = 90^\circ, \quad \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \triangle BPD \sim \triangle BAC;$$

③公共角为 $\angle C$ 时，

连接 AP ，如图所示：



$$\because \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore AB = 2AC,$$

设 $AC = a$ ，则 $AB = 2a$ ，

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{3}a,$$

$\because$ 点 P 是边 BC 上一个三等分点， $BP > CP$ ，

$$\therefore CP = \frac{1}{3}BC = \frac{\sqrt{3}}{3}a,$$

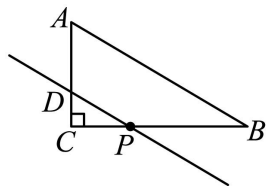
$$\therefore \frac{CP}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{AC}{BC} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \frac{CP}{AC} = \frac{AC}{BC},$$

$$\because \angle C = \angle C,$$

$$\therefore \triangle ACP \sim \triangle BCA;$$

过点 P 作 $PD \parallel AB$ ，交 AC 于点 D ，如图所示：



$$\because PD \parallel AB,$$

$$\therefore \angle DPC = \angle B, \quad \angle PDC = \angle A,$$

$$\therefore \triangle CDP \sim \triangle CAB;$$

综上分析可知，过点 P 的 $\triangle ABC$ 的“相似线”最多有 4 条.

故答案为：4.

【点睛】本题主要考查了相似三角形的判定，平行线的性质，勾股定理，解题的关键是熟练掌握三角形相似的判定方法.

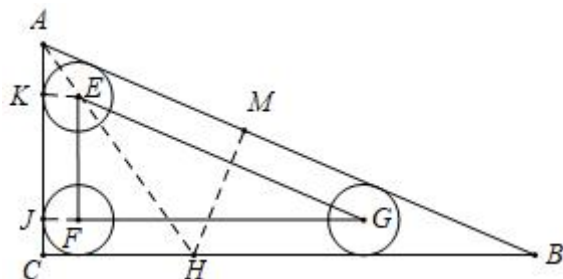
18. 25

【分析】如图，由题意点 O 所能到达的区域是 $\triangle EFG$ ，连接 AE ，延长 AE 交 BC 于 H ，作 $HM \perp AB$ 于 M ， $EK \perp AC$ 于 K ，作 $FJ \perp AC$ 于 J . 利用相似三角形的性质以及三角形的面积公式求出 EF ，再证明 $\triangle HAC \cong \triangle HAM$ (AAS)，推出 $AM = AC = 5m$ ， $CH = HM$ ， $BM = 8m$ ，

设 $CH = HM = x$ ，在 $Rt\triangle BHM$ 中，则有 $x^2 + (8m)^2 = (12m - x)^2$ ，推出 $x = \frac{10}{3}m$ ，由 $EK \parallel CH$ ，

推出 $\frac{EK}{CH} = \frac{AK}{AC}$ ，推出 $\frac{1}{\frac{10}{3}m} = \frac{AK}{5m}$ ，可得 $AK = \frac{3}{2}$ ，求出 AC 即可解决问题.

【详解】解：如图，由题意点 O 所能到达的区域是 $\triangle EFG$ ，连接 AE ，延长 AE 交 BC 于 H ，作 $HM \perp AB$ 于 M ， $EK \perp AC$ 于 K ，作 $FJ \perp AC$ 于 J .



$$\because EG \parallel AB, \quad EF \parallel AC, \quad FG \parallel BC,$$

$$\therefore \angle EGF = \angle ABC, \quad \angle FEG = \angle CAB,$$

$$\therefore \triangle EFG \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore EF : FG : EG = AC : BC : AB = 5 : 12 : 13 ,$$

$$\text{设 } EF = 5k , \quad FG = 12k ,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 5k \times 12k = \frac{10}{3} ,$$

$$\therefore k = \frac{1}{3} \text{ 或 } -\frac{1}{3} (\text{舍弃}) ,$$

$$\therefore EF = \frac{5}{3} ,$$

$\therefore$ 四边形 $EKFJ$ 是矩形,

$$\therefore KJ = EF = \frac{5}{3} ,$$

$$\text{设 } AC = 5m , \quad BC = 12m , \quad AB = 13m ,$$

$$\therefore \angle ACH = \angle AMH = 90^\circ , \quad \angle HAC = \angle HAM , \quad AH = AH ,$$

$$\therefore \triangle HAC \cong \triangle HAM (AAS) ,$$

$$\therefore AM = AC = 5m , \quad CH = HM , \quad BM = 8m , \quad \text{设 } CH = HM = x ,$$

$$\text{在 } Rt\triangle BHM \text{ 中, 则有 } x^2 + (8m)^2 = (12m - x)^2 ,$$

$$\therefore x = \frac{10}{3}m ,$$

$$\therefore EK \parallel CH ,$$

$$\therefore \triangle AKE \sim \triangle ACH ,$$

$$\therefore \frac{EK}{CH} = \frac{AK}{AC} ,$$

$$\therefore \frac{1}{\frac{10}{3}m} = \frac{AK}{5m} ,$$

$$\therefore AK = \frac{3}{2} ,$$

$$\therefore AC = AK + KJ + CJ = \frac{3}{2} + \frac{5}{3} + 1 = \frac{25}{6} ,$$

$$\therefore BC = \frac{1}{5} \times \frac{25}{6} \times 12 = 10 , \quad AB = \frac{1}{5} \times \frac{25}{6} \times 13 = \frac{65}{6} ,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的周长} = AC + BC + AB = \frac{25}{6} + 10 + \frac{65}{6} = 25 ,$$

故答案为 25 .

【点睛】本题考查动点问题, 相似三角形的判定和性质, 全等三角形的判定和性质, 解直角三角形等知识, 解题的关键是理解题意, 学会添加常用辅助线, 构造相似三角形解决问题, 属于中考填空题中的压轴题.

19. (1) $x_1 = -5$, $x_2 = 1$;

(2) $x_1 = -3$, $x_2 = 1$.

【分析】(1) 利用因式分解法求解即可;

(2) 利用直接开平方法求解即可.

【详解】(1) 解: 因式分解得: $(x+5)(x-1)=0$,

$$\therefore x+5=0 \text{ 或 } x-1=0,$$

$$\therefore x_1 = -5, x_2 = 1;$$

(2) 解: 两边直接开平方得: $2x = x-3$ 或 $2x = 3-x$,

$$\therefore x_1 = -3, x_2 = 1.$$

【点睛】本题考查了解一元二次方程, 能够根据方程特点灵活选用不同的解法是解题的关键.

20. 10

【分析】根据一元二次方程和三角形的性质, 计算得 $b=2$, 再根据三角形三边关系和等腰三角形的性质分析, 即可得到答案.

【详解】 $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 + (b+2)x + 6-b = 0$ 有两个相等的实数根

$$\therefore (b+2)^2 - 4(6-b) = 0$$

$$\therefore b^2 + 8b - 20 = 0$$

$$\therefore (b+10)(b-2) = 0$$

$$\therefore b = 2 \text{ 或 } b = -10 \text{ (舍去)}$$

$$\therefore a = 4$$

$$\therefore a^1 = b$$

根据题意, 当 $a=c=4$ 时, $\triangle ABC$ 的周长 $= a+b+c = 10$

当 $b=c=2$ 时, 得 $a=b+c$

$\therefore \triangle ABC$ 不成立

$\therefore \triangle ABC$ 的周长 $= 10$.

【点睛】本题考查了一元二次方程、三角形三边关系、等腰三角形的知识; 解题的关键是熟练掌握一元二次方程、等腰三角形的性质, 从而完成求解.

21. (1) 见解析; (2) $DF = \frac{6\sqrt{10}}{5}$

【分析】根据矩形的性质可得， $\angle B = 90^\circ$ ， $AD \parallel BC$ ．再根据“两直线平行，内错角相等”可得 $\angle AEB = \angle DAF$ ，再由垂直的定义可得 $\angle DFA = 90^\circ$ ．从而得出 $\angle B = \angle DFA$ ，再根据“有两组角对应相等的两个三角形相似”可得出结论；

根据中点的定义可求出 $BE=2$ ，然后根据勾股定理求出 $AE=2\sqrt{10}$ ．再根据相似三角形的性质求解即可．

【详解】证明：(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore \angle B = 90^\circ, \quad AD \parallel BC.$$

$$\therefore \angle AEB = \angle DAF,$$

$$\because DF \perp AE,$$

$$\therefore \angle DFA = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle B = \angle DFA,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle DFA.$$

解：(2) $\because \triangle ABE \sim \triangle DFA$,

$$\therefore \frac{AB}{DF} = \frac{AE}{AD}.$$

$\because BC = 4$ ， E 是 BC 的中点，

$$\therefore BE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 4 = 2.$$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle ABE \text{ 中, } AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}.$$

又 $\because AD = BC = 4$,

$$\therefore \frac{6}{DF} = \frac{2\sqrt{10}}{4},$$

$$\therefore DF = \frac{6\sqrt{10}}{5}.$$

【点睛】本题考查了矩形的性质，相似三角形的判定和性质，掌握相似三角形的判定方法和性质是解题的关键．

22. (1) 见解析; (2) $r = \frac{1}{2}$

【分析】(1) 由题意知直线 l 为线段 BC 的垂直平分线，若圆心 O 在线段 MN 上，且与边 AB 、 BC 相切，则再作出 $\angle ABC$ 的角平分线，与 MN 的交点即为圆心 O ；

(2) 过点 O 作 $OE \perp AB$ ，垂足为 E ，根据 $S_{\triangle BMN} = S_{\triangle BNO} + S_{\triangle BMO}$ 即可求解．

【详解】解：（1）①先作 BC 的垂直平分线：分别以 B, C 为圆心，大于 $\frac{1}{2}BC$ 的长为半径画弧，连接两个交点即为直线 l ，分别交 AB, BC 于 M, N ；

②再作 $\angle ABC$ 的角平分线：以点 B 为圆心，任意长为半径作圆弧，与 $\angle ABC$ 的两条边分别有一个交点，再以这两个交点为圆心，相同长度为半径作弧，连接这两条弧的交点与点 B ，即为 $\angle ABC$ 的角平分线，这条角平分线与线段 MN 的交点即为 O ；

③以 O 为圆心， ON 为半径画圆，圆 O 即为所求；

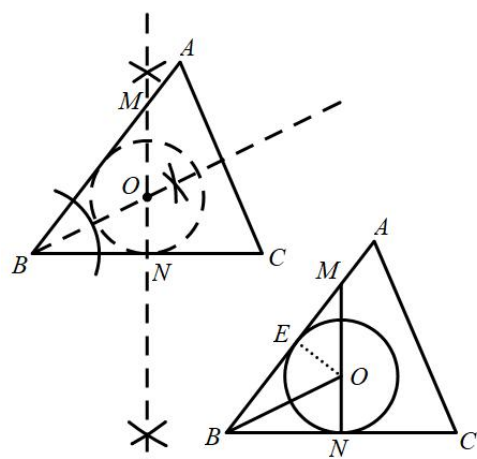
（2）过点 O 作 $OE \perp AB$ ，垂足为 E ，设 $ON = OE = r$

$$\because BM = \frac{5}{3}, BC = 2, \therefore BN = 1, \therefore MN = \frac{4}{3}$$

根据面积法， $\therefore S_{\triangle BMN} = S_{\triangle BNO} + S_{\triangle BMO}$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{4}{3} = \frac{1}{2} \times 1 \cdot r + \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} \cdot r, \text{ 解得 } r = \frac{1}{2},$$

故答案为： $r = \frac{1}{2}$ 。



【点睛】本题考查了尺规作图，切线的性质等内容，解题的关键是掌握线段垂直平分线、角平分线的尺规作图。

23. (1) $(x+3)(x-5)$

(2) $(x - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})(x - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})$

【分析】（1）根据材料所给公式进行分解即可；

（2）利用求根法进行因式分解。

【详解】（1） $\because$ 代数式 $x^2 - 2x - k$ 对应的方程解为 -3 和 5 ,

$$\therefore x^2 - 2x - k = (x - x_1)(x - x_2) = (x + 3)(x - 5);$$

故答案为: $(x + 3)(x - 5)$;

$$(2) \text{ 解: 令: } x^2 - 3x + 1 = 0,$$

$$a = 1, b = -3, c = 1,$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\text{解得 } x_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2};$$

$$\therefore x^2 - 3x + 1 = (x - x_1)(x - x_2) = \left(x - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

【点睛】本题考查求根法因式分解. 理解并掌握题目中的求根法因式分解的方法是解题的关键.

24. (1) 见解析; (2) $\triangle BCD$ 的周长为 $3 + 2\sqrt{3}$

【分析】(1) 由切线的性质可得 $\angle OCD = 90^\circ$, 由外角的性质可得 $\angle BOC = 120^\circ$, 由等腰三角形的性质 $\angle B = \angle OCB = 30^\circ$, 可得 $\angle B = \angle D = 30^\circ$, 可得结论;

(2) 由直角三角形的性质可得 $OC = 1 = OB$, $DO = 2$, 即可求解.

【详解】证明: (1) $\because DC$ 是 $\odot O$ 的切线,

$$\therefore \angle OCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle D = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = \angle D + \angle OCD = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ,$$

$$\therefore OB = OC,$$

$$\therefore \angle B = \angle OCB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle D = \angle OCB,$$

$$\therefore \triangle BOC \sim \triangle BCD;$$

$$(2) \because \angle D = 30^\circ, \quad DC = \sqrt{3}, \quad \angle OCD = 90^\circ,$$

$$\therefore DC = \sqrt{3}OC = \sqrt{3}, \quad DO = 2OC,$$

$$\therefore OC = 1 = OB, \quad DO = 2,$$

$$\therefore \angle B = \angle D = 30^\circ,$$

$$\therefore DC = BC = \sqrt{3},$$

$$\therefore \triangle BCD \text{ 的周长} = CD + BC + DB = \sqrt{3} + \sqrt{3} + 2 + 1 = 3 + 2\sqrt{3}.$$

【点睛】本题考查了相似三角形的判定和性质，切线的性质，直角三角形的性质，灵活运用这些性质进行推理是本题的关键.

25. 每千克 29 元

【分析】设降价 x 元，根据题意列出一元二次方程进行求解即可.

【详解】解：设每千克降 x 元.

由题意得： $(38-x-22)\left(160+\frac{x}{3}\times 120\right)-240=3400$ ，

整理得： $x^2-12x+27=0$ ，

解得： $x=3$ 或 $x=9$ ；

$\because$ 要尽可能让顾客得到实惠，

$\therefore x=9$ ；

$\therefore$ 售价为： $38-9=29$ （元/千克）.

答：这种水果的售价应定为每千克 29 元.

【点睛】本题考查一元二次方程的应用. 根据题意正确的列出方程是解题的关键.

26. (1)见解析

$$(2) S = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$$

$$(3) 4\sqrt{3}$$

【分析】(1) 根据等弧所对的圆周角相等即可证明；

(2) 在 DA 延长线上截取 $AH=BD$ ，证明 $\triangle AHC \cong \triangle BDC$ (SAS) 即可求解；

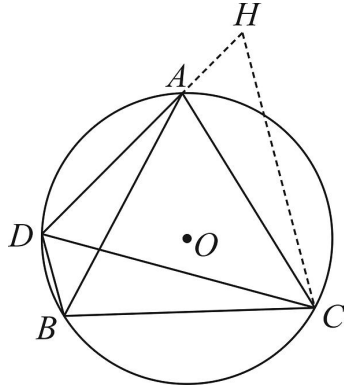
(3) 作点 D 关于直线 AC 的对称点 E ，作点 D 关于直线 BC 的对称点 F ，根据对称性可得出当点 E ，点 M ，点 N ，点 F 四点共线时， $\triangle DMN$ 的周长有最小值，连接 EF ，交 AC 于 M ，交 BC 于 N ，连接 CE ， CF ， DE ， DF ，作 $CP \perp EF$ 于 P ，再证明 $\angle ECF = 120^\circ$ ， $EP = PF$ ，即有 $\angle CEP = 30^\circ$ ，即可得 $PC = \frac{1}{2}EC$ ， $PE = \sqrt{3}PC = \frac{\sqrt{3}}{2}EC$ ，进而有 $EF = 2PE = \sqrt{3}EC = \sqrt{3}CD$ ，则可知 CD 为直径时， CD 有最大值 4，此时 EF 有最大值，问题随之得解.

【详解】(1) $\because$ 在等边 $\triangle ABC$ 中，有 $AC = BC$ ，

$\therefore \angle BDC = \angle ADC$ ，

$\therefore DC$ 是 $\angle ADB$ 的平分线；

(2) 在 DA 延长线上截取 $AH = BD$ ，如图，



在等边 $\triangle ABC$ 中，有 $AC = BC$ ， $\angle ACB = \angle ABC = \angle CAB = 60^\circ$ ，

$$\because \angle ABD = \angle ACD,$$

$$\therefore \angle HAC = \angle ADC + \angle ACD = \angle ADC + \angle ABD,$$

$$\because \angle ADC = \angle ABC,$$

$$\therefore \angle DBC = \angle ABD + \angle ABC = \angle ABD + \angle ADC,$$

$$\therefore \angle DBC = \angle HAC,$$

$$\because AH = BD, \quad AC = BC,$$

$$\therefore \triangle AHC \cong \triangle BDC \text{ (SAS)},$$

$$\therefore HC = DC, \quad \angle DCB = \angle HCA,$$

$$\because \angle DCB + \angle ACD = \angle ACB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle HCA + \angle ACD = 60^\circ,$$

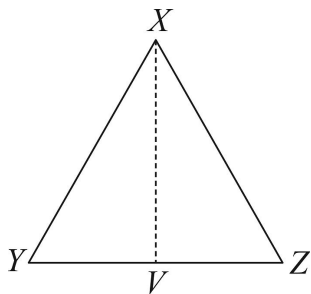
$$\therefore \triangle CDH \text{ 是等边三角形},$$

$$\because \triangle AHC \cong \triangle BDC \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \text{四边形 } ADBC \text{ 的面积即是等边 } \triangle CDH \text{ 的面积, 即 } S_{\text{四边形}ADBC} = S_{\triangle CDH},$$

下面推导等边三角形的面积公式：

正 $\triangle XYZ$ 的边长为 u ，过顶点 x 作 $XV \perp YZ$ ， V 为垂足，如图，



在正 $\triangle XYZ$ 中，有 $\angle Y = 60^\circ$ ， $XZ = XY = YZ = u$ ，

$\because XV \perp YZ$,

$$\therefore YV = VZ = \frac{1}{2}YZ = \frac{1}{2}u, \quad \angle XVY = 90^\circ,$$

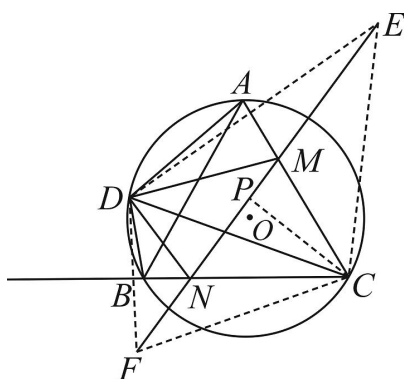
$$\therefore \text{在 Rt}\triangle XVY \text{ 中, 有 } XV = \sqrt{XY^2 - YV^2} = \sqrt{u^2 - \left(\frac{1}{2}u\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}u,$$

$$\therefore \text{正}\triangle XYZ \text{ 的面积为: } S = \frac{1}{2} \times YZ \times XV = \frac{\sqrt{3}}{4}u^2,$$

$\because$ 边长 $DC = x$,

$$\therefore S_{\text{四边形}ADBC} = S_{\triangle CDH} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2;$$

(3) 如图, 作点 D 关于直线 AC 的对称点 E , 作点 D 关于直线 BC 的对称点 F ,



$\because$ 点 D , 点 E 关于直线 AC 对称,

$\therefore EM = DM$, 同理 $DN = NF$,

$\therefore \triangle DMN$ 的周长: $DM + DN + MN = FN + EM + MN$,

$\therefore$ 当点 E , 点 M , 点 N , 点 F 四点共线时, $\triangle DMN$ 的周长有最小值,

则连接 EF , 交 AC 于 M , 交 BC 于 N , 连接 CE , CF , DE , DF , 作 $CP \perp EF$ 于 P ,

即 $\triangle DMN$ 的周长最小值为 EF ,

$\because$ 点 D , 点 E 关于直线 AC 对称,

$\therefore CE = CD$, $\angle ACE = \angle ACD$,

$\because$ 点 D , 点 F 关于直线 BC 对称,

$\therefore CF = CD$, $\angle DCB = \angle FCB$,

$\therefore CD = CE = CF$, $\angle ECF = \angle ACE + \angle ACD + \angle DCB + \angle FCB = 2\angle ACB = 120^\circ$,

$\because CP \perp EF$, $CE = CF$, $\angle ECF = 120^\circ$,

$\therefore EP = PF$, $\angle CEP = 30^\circ$,

$$\therefore PC = \frac{1}{2}EC, \quad PE = \sqrt{3}PC = \frac{\sqrt{3}}{2}EC,$$

$$\therefore EF = 2PE = \sqrt{3}EC = \sqrt{3}CD,$$

$\therefore$ 当 CD 有最大值时, EF 有最大值,

$\because CD$ 为 $\odot O$ 的弦, $\odot O$ 半径为 2,

$\therefore CD$ 为直径时, CD 有最大值 4,

$\therefore$ 最大值为 $4\sqrt{3}$.

即 $\triangle DMN$ 周长的所有最小值中的最大值为 $4\sqrt{3}$.

【点睛】 点评: 本题是圆的综合题, 考查了圆的有关知识, 等边三角形的性质, 旋转的性质, 轴对称的性质等知识, 灵活运用这些性质进行推理是本题的关键.

27. (1) 见解析

$$(2) y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2\sqrt{5}}{3}x (0 < x < \frac{8\sqrt{5}}{5})$$

$$(3) \frac{25}{16} \text{ 或 } \frac{5}{4}$$

【分析】 (1) 先证明 $\triangle ADP \sim \triangle ABC$, 由相似三角形的对应边成比例即可得出 $\frac{PD}{AP} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$,

再由 $\angle EPD = \angle A$, $\angle PED = \angle AEP$ 可知 $\triangle EPD \sim \triangle EAP$, 然后根据对应边成比例即可求解;

(2) 由 $\triangle EPD \sim \triangle EAP$, 得 $\frac{DE}{PE} = \frac{PD}{AP} = \frac{1}{2}$, 得出 AE 与 DE 的关系, 作 $EH \perp AB$, 由 $PD \parallel HE$ 可得出 $\frac{HE}{PD} = \frac{AE}{AD} = \frac{4}{3}$, 进而可得出 y 与 x 的关系式;

(3) 由 $\triangle PEH \sim \triangle BAC$, 得 $\frac{PE}{HE} = \frac{AB}{AC}$, 当 $\triangle BEP$ 与 $\triangle ABC$ 相似时, 只有两种情形:

$\angle BEP = \angle C = 90^\circ$ 或 $\angle EBP = \angle C = 90^\circ$, 由相似三角形的对应边成比例即可得出答案.

【详解】 (1) 证明: $\because \angle APD = \angle C = 90^\circ$, $\angle A$ 为公共角,

$$\therefore \triangle ADP \sim \triangle ABC, \quad \therefore \frac{PD}{AP} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2},$$

$$\because \angle EPD = \angle A, \quad \angle PED = \angle AEP,$$

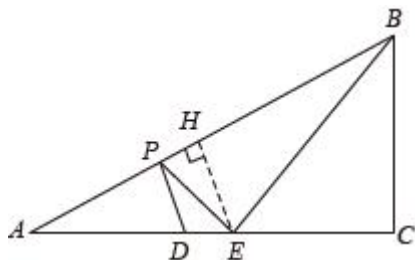
$$\triangle EPD \sim \triangle EAP, \quad \frac{PE}{AE} = \frac{PD}{AP} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AE = 2PE;$$

$$(2) \text{ 解: } \because \triangle EPD \sim \triangle EAP, \quad \frac{DE}{PE} = \frac{PD}{AP} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore PE = 2DE, \quad \therefore AE = 2PE = 4DE,$$

作 $EH \perp AB$ 于点 H ,



$$\because AP = x, \therefore PD = \frac{1}{2}x,$$

$$\because PD \perp AB, PH \perp AB,$$

$$\therefore PD \parallel HE, \therefore \frac{HE}{PD} = \frac{AE}{AD} = \frac{4}{3},$$

$$\therefore HE = \frac{2}{3}x,$$

$$\because AB = 2\sqrt{5}, \therefore y = \frac{1}{2}(2\sqrt{5} - x) \cdot \frac{2}{3}x,$$

$$\text{即 } y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2\sqrt{5}}{3}x (0 < x < \frac{8\sqrt{5}}{5}).$$

$$(3) \text{ 解: } \because PD \parallel HE,$$

$$\therefore \angle PEH = \angle EPD,$$

$$\because \angle EPD = \angle A,$$

$$\therefore \angle PEH = \angle A,$$

$$\therefore \angle PHE = \angle C,$$

$$\therefore \triangle PEH \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore \frac{PE}{HE} = \frac{AB}{AC},$$

$$\therefore PE = \frac{2}{3}x \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{3}x,$$

当 $\triangle BEP$ 与 $\triangle ABC$ 相似时,

$$\text{① 当 } \angle BEP = \angle C = 90^\circ \text{ 时, } \frac{PE}{PB} = \frac{BC}{AC},$$

$$\therefore \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}x}{2\sqrt{5}-x} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\text{解得: } x = \frac{3\sqrt{5}}{4}, \therefore y = \frac{25}{16};$$

$$\text{② 当 } \angle EBP = \angle C = 90^\circ \text{ 时, 同理可得: } y = \frac{5}{4}.$$

综上, 当 $\triangle BEP$ 与 $\triangle ABC$ 相似时, $\triangle BEP$ 的面积为 $\frac{25}{16}$ 或 $\frac{5}{4}$.

【点睛】本题考查了相似三角形的判定与性质，熟练掌握相似三角形的判定与性质是解答本题的关键．在判定两个三角形相似时，应注意利用图形中已有的公共角、公共边等隐含条件，以充分发挥基本图形的作用，寻找相似三角形的一般方法是通过作平行线构造相似三角形．

$$28. (1) \textcircled{1}(2,2), \textcircled{2} y = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$(2) \frac{7}{8} \leq n \leq 2$$

【分析】(1) ①根据折叠的性质证明四边形 $ONOM'$ 为正方形，即可得到 O' 的坐标；②连接 OO' 交 NM 于点 D ，证明 $\triangle OMN \sim \triangle OAC$ ，利用折叠的性质和相似比求出 M, N 的坐标，再利用待定系数法求一次函数解析式即可；

(2) 先确定有一个公共点时，即 $\triangle MNO'$ 的外接圆与线段 BC 相切时， n 的值，此时 n 的值最小，再根据 N 与 C 点重合时， n 的值最大，确定范围即可．

【详解】(1) 解：①如图 1，

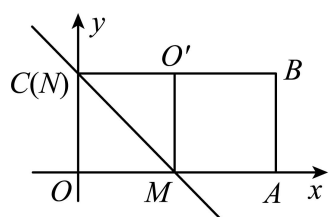


图1

在直角坐标系中，矩形 $OABC$ 的边 OA 、 OC 在坐标轴上， B 点坐标是 $(4, 2)$ ，

$$\therefore OC = 2, OA = 4,$$

若 N 与 C 重合， M 是 OA 的中点，，

$$\text{则： } ON = OM = 2,$$

由折叠的性质得：四边形 $ONOM'$ 为正方形，

$$\therefore O' \text{ 的坐标为 } (2,2);$$

故答案为： $(2,2)$ ；

②连接 OO' 交 NM 于点 D ，如图 2 所示：

$$\therefore \frac{7}{8} \leq n \leq 2.$$

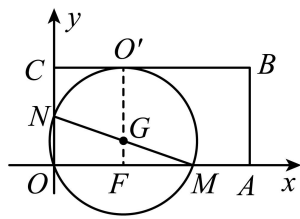


图3

【点睛】本题考查坐标与图形，折叠的性质，正方形的判定和性质，矩形的性质和三角形的外接圆，待定系数法求一次函数的解析式，是一道综合题．熟练掌握相关知识点，根据题意，正确的画出图形，是解题的关键．