

专题 2.3 圆切线的判定与性质综合（3 大类题型）



重难点题型归纳

【题型 1 证圆的切线-有公共点：连半径，证垂直】

【题型 2 证圆的切线-没有公共点：作垂直，证半径】

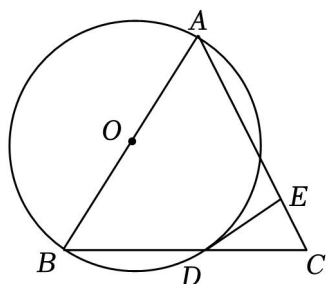
【题型 3 圆切线的判定与性质综合】



满分必练

【题型 1 证圆的切线-有公共点：连半径，证垂直】

1. （2023 春•保德县校级期中）如图， $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ，以 AB 为直径作 $\odot O$ ，与 BC 交于点 D ，过 D 作 AC 的垂线，垂足为 E 。求证： DE 是 $\odot O$ 切线。



【答案】见解答。

【解答】证明：连接 OD ，

$$\because \angle BAC = 2\angle BAD, \angle BOD = 2\angle BAD,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle BOD,$$

$$\therefore OD \parallel AC,$$

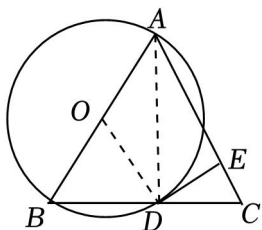
又 $\because DE \perp AC$,

$$\therefore \angle AED = 90^\circ,$$

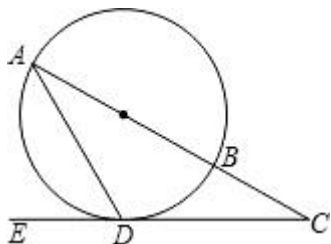
$$\therefore \angle ODE = \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{半径 } OD \perp DE,$$

$$\therefore DE \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线.}$$



2. (2022 秋·大连期末) 如图, 在 $\odot O$ 中, AB 是直径, AD 是弦, $\angle ADE=60^\circ$, $\angle C=30^\circ$. 求证: CD 是 $\odot O$ 的切线.



【答案】见试题解答内容

【解答】解: 连 OD , 如图,

$$\because \angle ADE=60^\circ, \angle C=30^\circ,$$

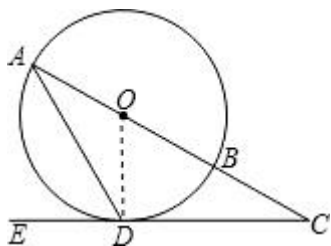
$$\therefore \angle A = \angle ADE - \angle C = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ,$$

$$\text{又} \because OD=OA,$$

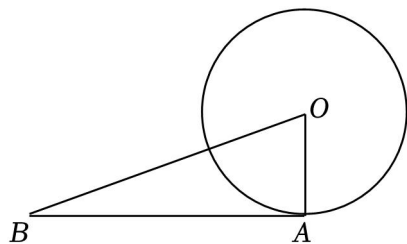
$$\therefore \angle ODA = \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle EDO = 90^\circ,$$

所以 CD 是 $\odot O$ 的切线.



3. (2022 秋·龙川县校级期末) 如图, OA 是 $\odot O$ 的半径, $\angle B=20^\circ$, $\angle AOB=70^\circ$. 求证: AB 是 $\odot O$ 的切线.



【答案】见解答.

【解答】证明：∵ $\angle AOB = 70^\circ$ ， $\angle B = 20^\circ$ ，

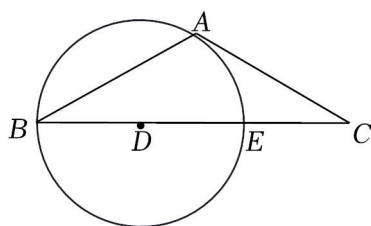
∴ $\angle OAB = 180^\circ - \angle B - \angle AOB = 90^\circ$ ，

∴ $OA \perp AB$ ，

∵ OA 是 $\odot O$ 的半径，

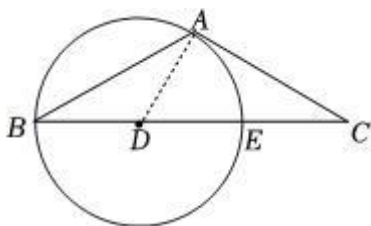
∴ AB 是 $\odot O$ 的切线.

4. (2022 秋•利通区期末) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 120^\circ$ ，点 D 在 BC 边上， $\odot D$ 经过点 A 和点 B 且与 BC 边相交于点 E ，求证： AC 是 $\odot D$ 的切线.



【答案】见解析.

【解答】证明：连接 AD ，



∵ $AB = AC$ ， $\angle BAC = 120^\circ$ ，

∴ $\angle B = \angle C = 30^\circ$ ，

在 $\odot D$ 中， $AD = BD$ ，

∴ $\angle BAD = \angle B = 30^\circ$ ，

∴ $\angle ADC = 60^\circ$ ，

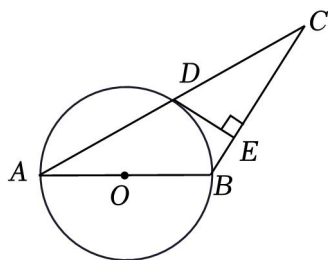
∴ $\angle DAC = 180^\circ - \angle ADC - \angle C = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$ ，

∴ $AD \perp AC$ ，

又∵ DA 是半径，

∴ AC 是 $\odot D$ 的切线.

5. (2022 秋•天河区校级期末) 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， AC 的中点 D 在 $\odot O$ 上， $DE \perp BC$ 于 E 。求证： DE 是 $\odot O$ 的切线.



【答案】见试题解答内容

【解答】证明：连接 OD ，

$\because AO=OB$ ， D 为 AC 的中点，

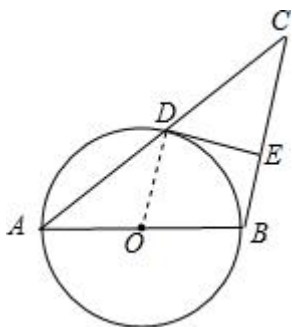
$\therefore OD \parallel BC$ ，

$\because DE \perp BC$ ，

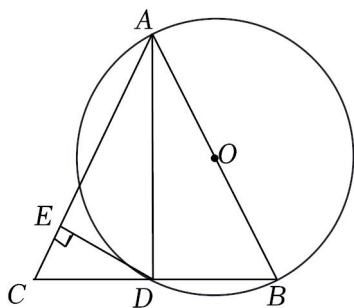
$\therefore DE \perp OD$ ，

$\because OD$ 是 $\odot O$ 的半径，

$\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线．

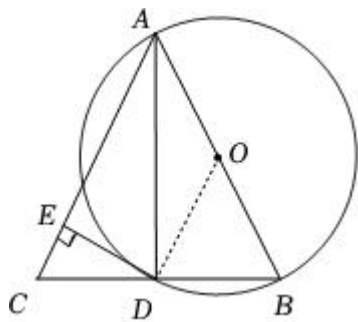


6. （2022 秋•阿瓦提县校级期末）已知： AB 是 $\odot O$ 的直径， BD 是 $\odot O$ 的弦，延长 BD 到点 C ，使 $AB=AC$ ，连结 AC ，过点 D 作 $DE \perp AC$ ，垂足为 E ．求证： DE 为 $\odot O$ 的切线．



【答案】证明过程见解答．

【解答】证明：如图，连接 OD ．



$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ADB = 90^\circ$,

$\because AB = AC$,

$\therefore CD = BD$,

$\because OA = OB$,

$\therefore OD \parallel AC$.

$\therefore \angle ODE = \angle CED$.

$\because DE \perp AC$,

$\therefore \angle CED = 90^\circ$.

$\therefore \angle ODE = 90^\circ$,

$\therefore OD \perp DE$,

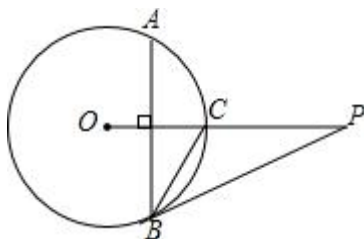
$\because OD$ 是 $\odot O$ 的半径,

$\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线.

7. (2022•昭平县一模) 如图, AB 是 $\odot O$ 的弦, $OP \perp AB$ 交 $\odot O$ 于 C , $OC = 2$, $\angle ABC = 30^\circ$.

(1) 求 AB 的长;

(2) 若 C 是 OP 的中点, 求证: PB 是 $\odot O$ 的切线.



【答案】 见试题解答内容

【解答】 (1) 解: 连接 OA 、 OB , 如图,

$\because \angle ABC = 30^\circ$, $OP \perp AB$,

$$\therefore \angle AOC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle OAD = 30^\circ,$$

$$\therefore OD = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2} \times 2 = 1,$$

$$\therefore AD = \sqrt{3}OD = \sqrt{3},$$

$$\text{又} \because OP \perp AB,$$

$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore AB = 2\sqrt{3};$$

$$(2) \text{证明: 由 (1) } \angle BOC = 60^\circ,$$

$$\text{而 } OC = OB,$$

$$\therefore \triangle OCB \text{ 为等边三角形},$$

$$\therefore BC = OB = OC, \angle OBC = \angle OCB = 60^\circ,$$

$$\therefore C \text{ 是 } OP \text{ 的中点},$$

$$\therefore CP = CO = CB,$$

$$\therefore \angle CBP = \angle P,$$

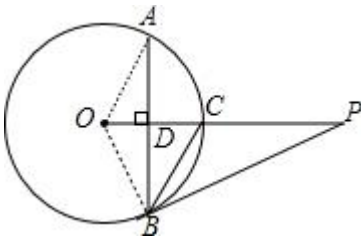
$$\text{而 } \angle OCB = \angle CBP + \angle P,$$

$$\therefore \angle CBP = 30^\circ$$

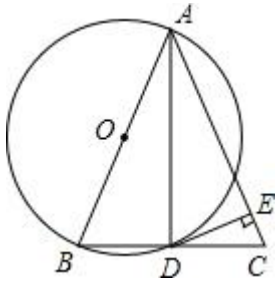
$$\therefore \angle OBP = \angle OBC + \angle CBP = 90^\circ,$$

$$\therefore OB \perp BP,$$

$$\therefore PB \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线}.$$



8. (2022•漳州模拟) 已知: $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 以 AB 为直径的 $\odot O$ 交 BC 于点 D , 过点 D 作 $DE \perp AC$ 于点 E . 求证: DE 是 $\odot O$ 的切线.



【答案】见试题解答内容

【解答】证明：连接 OD ，

$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径，

$\therefore AD \perp BC$ ，又 $AB = AC$ ，

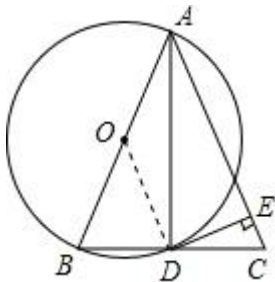
$\therefore BD = DC$ ，

$\because BO = OA$ ，

$\therefore OD \parallel AC$ ，

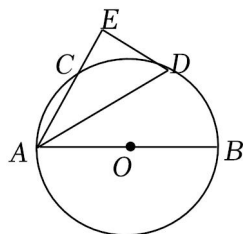
$\therefore \angle ODE = 180^\circ - \angle AED = 90^\circ$ ，

$\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线．



9. (2022 秋•芜湖期末) 如图， AB 为 $\odot O$ 的直径，点 C, D 在 $\odot O$ 上， $\widehat{AC} = \widehat{CD} = \widehat{DB}$ ， $DE \perp AC$ ．

求证： DE 是 $\odot O$ 的切线．

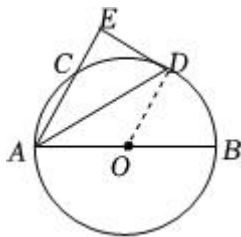


【答案】见解析．

【解答】证明：连接 OD ，

$\because \widehat{AC} = \widehat{CD} = \widehat{DB}$ ，

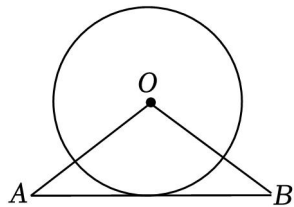
$\therefore \angle BOD = \frac{1}{3} \times 180^\circ = 60^\circ$,
 $\therefore \widehat{CD} = \widehat{DB}$,
 $\therefore \angle EAD = \angle DAB = \frac{1}{2} \angle BOD = 30^\circ$,
 $\therefore OA = OD$,
 $\therefore \angle ADO = \angle DAB = 30^\circ$,
 $\therefore DE \perp AC$,
 $\therefore \angle E = 90^\circ$,
 $\therefore \angle EAD + \angle EDA = 90^\circ$,
 $\therefore \angle EDA = 60^\circ$,
 $\therefore \angle EDO = \angle EDA + \angle ADO = 90^\circ$,
 $\therefore OD \perp DE$,
 $\therefore OD$ 是 $\odot O$ 的半径 ,
 $\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线 .



【题型 2 证圆的切线- 没有公共点：作垂直，证半径】

10. （2022 秋•长乐区期中）如图，在 $\triangle OAB$ 中， $OA = OB = 5$ ， $AB = 8$ ， $\odot O$ 的半径为 3.

求证： AB 是 $\odot O$ 的切线.



【答案】证明见解析.

【解答】证明：如图，过 O 作 $OC \perp AB$ 于 C ，

$\therefore OA = OB$ ， $AB = 8$ ，

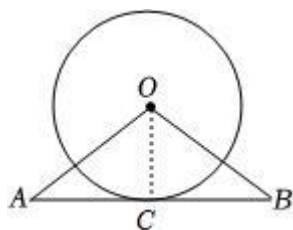
$\therefore AC = \frac{1}{2} AB = 4$ ，

在 $\text{Rt}\triangle OAC$ 中, $OC = \sqrt{OA^2 - AC^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$,

$\therefore \odot O$ 的半径为 3,

$\therefore OC$ 为 $\odot O$ 的半径,

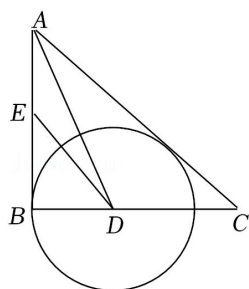
$\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的切线.



11. (2022·八步区一模) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC$ 的角平分线交 BC 于点 D , E 为 AB 上一点, $DE = DC$, 以 D 为圆心, DB 的长为半径作 $\odot D$, $AB = 5$, $BE = 3$.

(1) 求证: AC 是 $\odot D$ 的切线;

(2) 求线段 AC 的长.



【解答】(1) 证明: 过点 D 作 $DF \perp AC$ 于 F ;

$\because AB$ 为 $\odot D$ 的切线,

$\therefore \angle B = 90^\circ$,

$\therefore AB \perp BC$,

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$, $DF \perp AC$,

$\therefore BD = DF$,

$\therefore AC$ 与 $\odot D$ 相切;

(2) 解: 在 $\triangle BDE$ 和 $\triangle DCF$ 中;

$$\begin{cases} BD = DF \\ DE = DC \end{cases},$$

$\therefore \text{Rt}\triangle BDE \cong \text{Rt}\triangle DCF$ (HL),

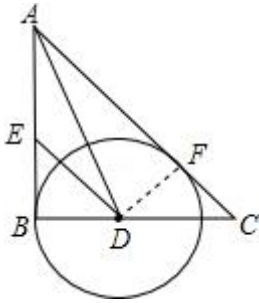
$\therefore EB = FC$.

$$\because AB=AF,$$

$$\therefore AB+EB=AF+FC,$$

$$\text{即 } AB+EB=AC,$$

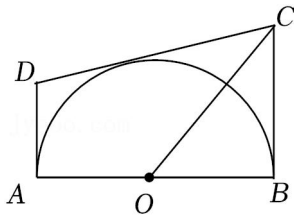
$$\therefore AC=5+3=8.$$



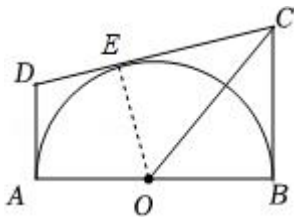
12. (秋•莆田期末) 如图, 半圆 O 的直径是 AB , AD 、 BC 是两条切线, 切点分别为 A 、 B , CO 平分 $\angle BCD$.

(1) 求证: CD 是半圆 O 的切线.

(2) 若 $AD=20$, $CD=50$, 求 BC 和 AB 的长.



【解答】(1) 证明: 过点 O 作 $OE \perp CD$, 垂足为点 E ,



$\because BC$ 是半圆 O 的切线, B 为切点,

$\therefore OB \perp BC$,

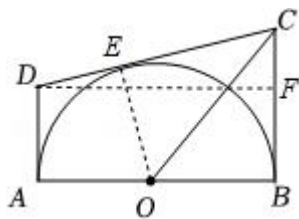
$\because CO$ 平分 $\angle BCD$,

$\therefore OE = OB$,

$\because OB$ 是半圆 O 的半径,

$\therefore CD$ 是半圆 O 的切线;

(2) 解: 过点 D 作 $DF \perp BC$, 垂足为点 F ,



$$\therefore \angle DFB = 90^\circ,$$

$\because AD$ 是半圆 O 的切线，切点为 A ，

$$\therefore \angle DAO = 90^\circ,$$

$$\because OB \perp BC,$$

$$\therefore \angle OBC = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ADFB$ 是矩形，

$$\therefore AD = BF = 20, DF = AB,$$

$\because AD, CD, BC$ 是半圆 O 的切线，切点分别为 A, E, B ，

$$\therefore DE = AD = 20, EC = BC,$$

$$\because CD = 50,$$

$$\therefore EC = CD - DE = 50 - 20 = 30,$$

$$\therefore BC = 30,$$

$$\therefore CF = BC - BF = 10,$$

在 $\text{Rt}\triangle CDF$ 中，由勾股定理得：

$$DF = \sqrt{DC^2 - CF^2} = \sqrt{50^2 - 10^2} = 20\sqrt{6},$$

$$\therefore AB = DF = 20\sqrt{6},$$

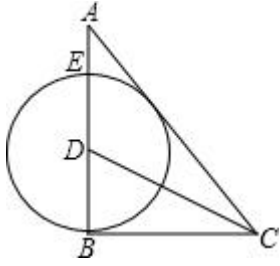
$$\therefore BC \text{ 的长为 } 30, AB \text{ 的长为 } 20\sqrt{6}.$$

【题型 3 圆切线的判定与形式综合】

13. (2023•银川校级四模) 如图 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， CD 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 D ，以点 D 为圆心， BD 为半径作 $\odot D$ 交 AB 于点 E 。

(1) 求证： $\odot D$ 与 AC 相切；

(2) 若 $AC = 5$ ， $BC = 3$ ，试求 AE 的长。



【答案】见试题解答内容

【解答】（1）证明：过 D 作 $DF \perp AC$ 于 F ，

$$\because \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore AB \perp BC,$$

$\because CD$ 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 D ，

$$\therefore BD = DF,$$

$\therefore \odot D$ 与 AC 相切；

（2）解：设圆的半径为 x ，

$$\because \angle B = 90^\circ, BC = 3, AC = 5,$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = 4,$$

$\because AC, BC$ ，是圆的切线，

$$\therefore BC = CF = 3,$$

$$\therefore AF = AB - CF = 2,$$

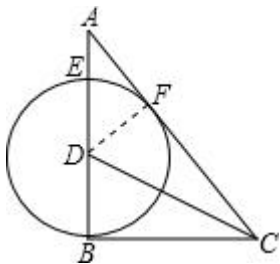
$$\because AB = 4,$$

$$\therefore AD = AB - BD = 4 - x,$$

在 $\text{Rt}\triangle AFD$ 中， $(4 - x)^2 = x^2 + 2^2$ ，

$$\text{解得：} x = \frac{3}{2},$$

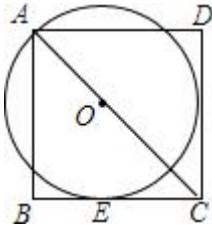
$$\therefore AE = 4 - 3 = 1.$$



14. (2022 秋•五莲县期中) 如图, O 为正方形 $ABCD$ 对角线上一点, 以点 O 为圆心, OA 长为半径的 $\odot O$ 与 BC 相切于点 E .

(1) 求证: CD 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若正方形 $ABCD$ 的边长为 10, 求 $\odot O$ 的半径.



【答案】见试题解答内容

【解答】(1) 证明: 连接 OE , 并过点 O 作 $OF \perp CD$.

$\because BC$ 切 $\odot O$ 于点 E ,

$\therefore OE \perp BC$, $OE = OA$,

又 $\because AC$ 为正方形 $ABCD$ 的对角线,

$\therefore \angle ACB = \angle ACD$,

$\therefore OF = OE = OA$,

即: CD 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 解: $\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 10,

$\therefore AB = BC = 10$, $\angle B = 90^\circ$, $\angle ACB = 45^\circ$,

$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10\sqrt{2}$,

$\because OE \perp BC$,

$\therefore OE = EC$,

设 $OA = r$, 则 $OE = EC = r$,

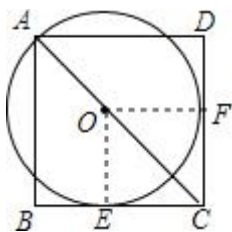
$\therefore OC = \sqrt{OE^2 + EC^2} = \sqrt{2}r$,

$\because OA + OC = AC$,

$\therefore r + \sqrt{2}r = 10\sqrt{2}$,

解得: $r = 20 - 10\sqrt{2}$.

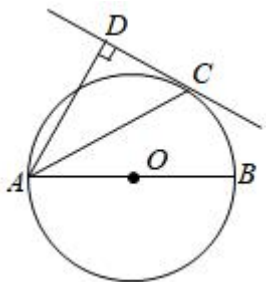
$\therefore \odot O$ 的半径为: $20 - 10\sqrt{2}$.



15. (2023•甘南县一模) 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 C 在 $\odot O$ 上, $AD \perp DC$ 于点 D , AC 平分 $\angle DAB$.

(1) 求证: 直线 CD 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $AB=4$, $\angle DAB=60^\circ$, 求 AD 的长.



【答案】见试题解答内容

【解答】(1) 证明: 连接 OC , 如图 1 所示:

$$\because OA=OC,$$

$$\therefore \angle OAC=\angle OCA,$$

$$\because AC \text{ 平分 } \angle DAB,$$

$$\therefore \angle DAC=\angle OAC,$$

$$\therefore \angle OCA=\angle DAC,$$

$$\therefore OC \parallel AD,$$

$$\because AD \perp DC,$$

$$\therefore CD \perp OC,$$

又 $\because OC$ 是 $\odot O$ 的半径,

$\therefore$ 直线 CD 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 解: 连接 BC , 如图 2 所示:

$$\because AB \text{ 是 } \odot O \text{ 的直径},$$

$$\therefore \angle ACB=90^\circ,$$

$$\because AC \text{ 平分 } \angle DAB, \angle DAB=60^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC=\angle BAC=30^\circ,$$

$$\therefore BC = \frac{1}{2}AB = 2, \quad AC = \sqrt{3}BC = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore AD \perp DC,$$

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore CD = \frac{1}{2}AC = \sqrt{3}, \quad AD = \sqrt{3}CD = 3.$$

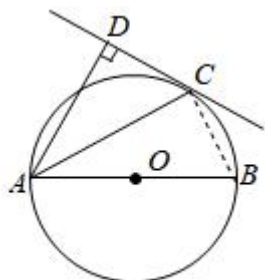


图 2

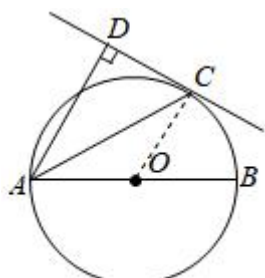
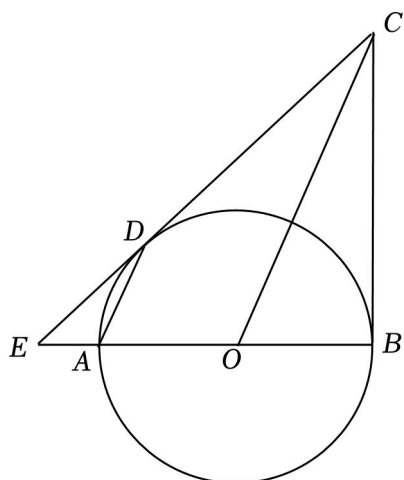


图 1

16. (2023•夹江县模拟) 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, $BC \perp AB$ 于点 B , D 是 $\odot O$ 上异于 A 、 B 的一个动点, 连接 AD , 过 O 作 $OC \parallel AD$ 交 BC 于点 C .

(1) 求证: CD 是 $\odot O$ 的切线;

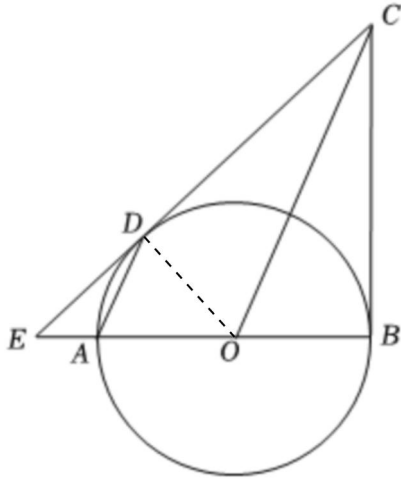
(2) 若 $EA = 1$, $ED = 3$, 求 $\odot O$ 的半径.



【答案】 (1) 见解答;

(2) 4.

【解答】解：（1）如图，连接 OD ，



由 $OD=OA$ 得： $\angle OAD=\angle ODA$ ，

$\because OC \parallel AD$ ，

$\therefore \angle DOC=\angle ODA$ ，

$\angle BOC=\angle OAD$ ，

$\therefore \angle DOC=\angle BOC$ ，

又 $\because OD=OB$ ， $OC=OC$ ，

$\therefore \triangle ODC \cong \triangle OBC$ ，

$\therefore \angle ODC=\angle OBC$ ，

$\because BC \perp AB$ ，

$\therefore \angle ODC=\angle OBC=90^\circ$ ，

又 $\because D$ 在 $\odot O$ 上，

$\therefore CD$ 是 $\odot O$ 的切线；

（2）设 $\odot O$ 的半径为 x ，

则： $OD=x$ ， $OA=x+1$ ，

$\because CD$ 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore \angle ODE=90^\circ$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ODE$ 中，由勾股定理得： $ED^2+OD^2=OE^2$ ，

$\therefore 3^2+x^2=(x+1)^2$ ，

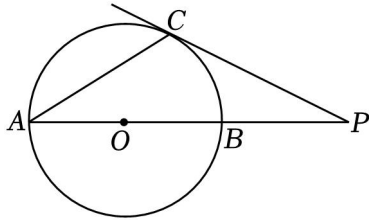
解得： $x=4$ ，

$\therefore \odot O$ 的半径为 4.

17. (2022 秋•盘山县期末) 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, AC 是 $\odot O$ 的弦, 过点 C 的直线与 AB 的延长线相交于点 P , 且 $AC=PC$, $\angle P=30^\circ$.

(1) 求证: PC 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $AB=6$, 求 PC 的长.



【答案】(1) 证明见解析;

(2) $3\sqrt{3}$.

【解答】(1) 证明: 如图所示, 连接 OC ,

$$\because AC=PC, \angle P=30^\circ,$$

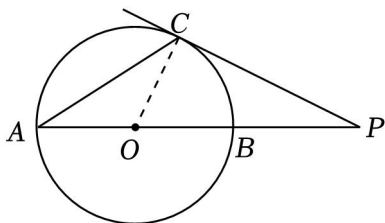
$$\therefore \angle A = \angle P = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = 2\angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle PCO = 180^\circ - \angle P - \angle POC = 90^\circ, \text{ 即 } OC \perp PC,$$

$\because OC$ 是 $\odot O$ 的半径,

$\therefore PC$ 是 $\odot O$ 的切线;



(2) 解: $\because AB=6$ 且 AB 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore OC = \frac{1}{2}AB = 3,$$

在 $\text{Rt}\triangle POC$ 中, $\angle PCO=90^\circ$, $\angle P=30^\circ$,

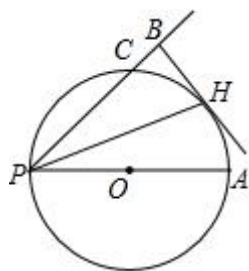
$$\therefore OP = 2OC = 6,$$

$$\therefore PC = \sqrt{OP^2 - OC^2} = 3\sqrt{3}.$$

18. (2023 春•东营期末) 如图, 在 $\odot O$ 中, PA 是直径, PC 是弦, PH 平分 $\angle APB$ 且与 $\odot O$ 交于点 H , 过 H 作 $HB \perp PC$ 交 PC 的延长线于点 B .

(1) 求证: HB 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $HB=4$, $BC=2$, 求 $\odot O$ 的直径.



【答案】见试题解答内容

【解答】证明：(1) 如图，连接 OH ,

$\because PH$ 平分 $\angle APB$,

$\therefore \angle HPA = \angle HPB$,

$\because OP = OH$,

$\therefore \angle OHP = \angle HPA$,

$\therefore \angle HPB = \angle OHP$,

$\therefore OH \parallel BP$,

$\because BP \perp BH$,

$\therefore OH \perp BH$,

$\therefore HB$ 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 如图，过点 O 作 $OE \perp PC$, 垂足为 E ,

$\because OE \perp PC$, $OH \perp BH$, $BP \perp BH$,

$\therefore$ 四边形 $EOHB$ 是矩形,

$\therefore OE = BH = 4$, $OH = BE$,

$\therefore CE = OH - 2$,

$\because OE \perp PC$

$\therefore PE = EC = OH - 2 = OP - 2$,

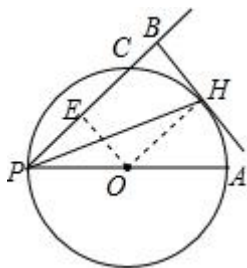
在 $\text{Rt}\triangle POE$ 中, $OP^2 = PE^2 + OE^2$,

$\therefore OP^2 = (OP - 2)^2 + 16$

$\therefore OP = 5$,

$\therefore AP = 2OP = 10$,

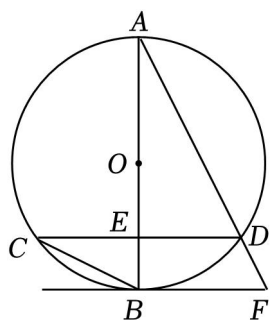
$\therefore \odot O$ 的直径是 10.



19. (2023·汉中市模拟) 如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, 弦 $CD \perp AB$, 垂足为点 E , 直线 BF 与 AD 延长线交于点 F , 且 $\angle AFB = \angle ABC$.

(1) 求证: 直线 BF 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $CD = 12$, $BE = 3$, 求 $\odot O$ 的半径.



【答案】(1) 证明见解析; (2) $\frac{15}{2}$.

【解答】(1) 证明: $\because \widehat{AC} = \widehat{AC}$,

$$\therefore \angle ABC = \angle ADC,$$

$$\because \angle AFB = \angle ABC,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle AFB,$$

$$\therefore CD \parallel BF,$$

$$\because CD \perp AB,$$

$$\therefore AB \perp BF,$$

$\because OB$ 为 $\odot O$ 的半径.

$\therefore$ 直线 BF 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 解: 设 $\odot O$ 的半径为 R , 连接 OD , 如图,

$$\because AB \perp CD, CD = 12,$$

$$\therefore CE = DE = \frac{1}{2}CD = 6,$$

$$\because BE = 3,$$

$$\therefore OE = R - 3,$$

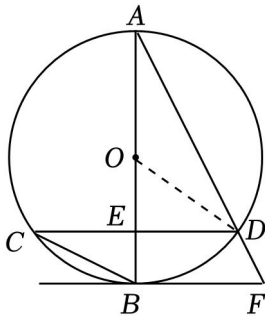
在 $\text{Rt}\triangle OED$ 中,

$$\therefore OE^2 + DE^2 = OD^2,$$

$$\therefore R^2 = (R - 3)^2 + 6^2,$$

$$\text{解得: } R = \frac{15}{2}.$$

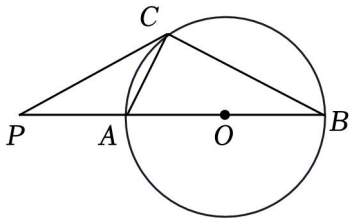
即 $\odot O$ 的半径为 $\frac{15}{2}$.



20. (2022 秋·斗门区期末) 如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, P 在 BA 的延长线上, C 为圆上一点, 且 $\angle ACP = \angle OBC$.

(1) 求证: PC 与 $\odot O$ 相切;

(2) 若 $PA = 4$, $PC = BC$, 求 $\odot O$ 的半径.



【答案】(1) 见解析;

(2) 4.

【解答】(1) 证明: 连接 OC , 则 $OC = OB$,

$$\therefore \angle OBC = \angle OCB,$$

$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACP = \angle OBC,$$

$$\therefore \angle ACP = \angle OCB,$$

$$\therefore \angle OCP = \angle OCA + \angle ACP = \angle OCA + \angle OCB = \angle ACB = 90^\circ,$$

$\therefore PC$ 经过 $\odot O$ 的半径 OC 的外端, 且 $PC \perp OC$,

$\therefore PC$ 与 $\odot O$ 相切.

(2) 解: $\because PC = BC$,

$$\therefore \angle P = \angle B,$$

$$\because \angle ACP = \angle B,$$

$$\therefore \angle ACP = \angle P,$$

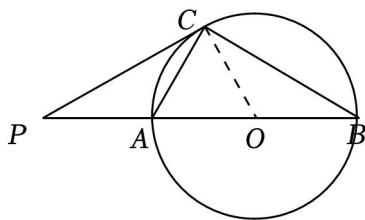
$$\therefore CA = PA = 4,$$

$$\because \angle OCP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACO + \angle ACP = 90^\circ, \angle AOC + \angle P = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACO = \angle AOC,$$

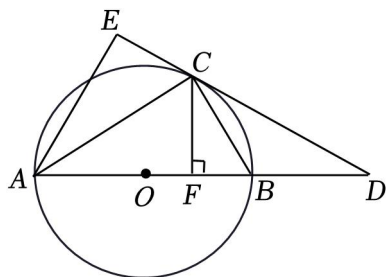
$$\therefore CA = OA = OC = 4.$$



21. (2023•黑龙江模拟) 如图, 已知 $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, AB 是 $\odot O$ 的直径, D 是 AB 延长线的一点, $AE \perp CD$ 交 DC 的延长线于 E , $CF \perp AB$ 于 F , 且 $CE = CF$.

(1) 求证: DE 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $AB = 10$, $BD = 3$, 求 AE 的长.



【答案】 (1) 见解析; (2) $\frac{65}{8}$.

【解答】 (1) 证明: (1) 连接 OC ;

$\because AE \perp CD$, $CF \perp AB$, 又 $CE = CF$,

$$\therefore \angle 1 = \angle 2.$$

$$\because OA = OC,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle 3, \angle 1 = \angle 3.$$

$$\therefore OC \parallel AE.$$

$$\therefore OC \perp CD.$$

$\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线.

$$(2) \text{ 解: } \because OC \perp ED, AB = 10, BD = 3,$$

$$\therefore OB = OC = 5.$$

$$CD = \sqrt{OD^2 - OC^2} = \sqrt{39},$$

$$\because S_{\triangle OCD} = \frac{1}{2} OC \cdot CD = \frac{1}{2} OD \cdot CF,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times 5 \times \sqrt{39} = \frac{1}{2} (5+3) \cdot CF,$$

$$\therefore CF = \frac{5\sqrt{39}}{8},$$

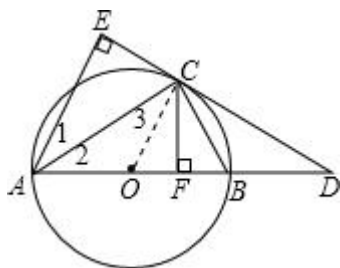
$$\therefore OF = \sqrt{OC^2 - FC^2} = \frac{25}{8},$$

$$\therefore AF = OA + OF = 5 + \frac{25}{8} = \frac{65}{8},$$

在 $\text{Rt}\triangle AEC$ 和 $\text{Rt}\triangle AFC$ 中, $CE = CF, AC = AC,$

$$\therefore \text{Rt}\triangle AEC \cong \text{Rt}\triangle AFC \text{ (HL)},$$

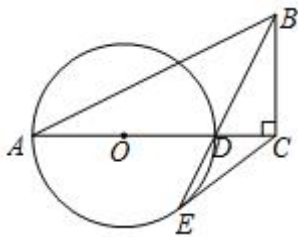
$$\therefore AE = AF = \frac{65}{8}.$$



22. (2023·宿豫区三模) 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 点 D 在 AC 边上, 以 AD 为直径作 $\odot O$ 交 BD 的延长线于点 E , $CE = BC$.

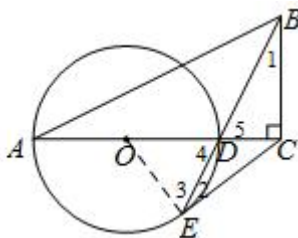
(1) 求证: CE 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $CD = 2, BD = 2\sqrt{5}$, 求 $\odot O$ 的半径.



【答案】见试题解答内容

【解答】解：（1）如图，连接 OE ，



$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 5 = 90^\circ.$$

$$\because CE = BC,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2.$$

$$\because OE = OD,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 4.$$

$$\text{又} \because \angle 4 = \angle 5,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 5,$$

$$\therefore \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ, \text{ 即 } \angle OEC = 90^\circ,$$

$$\therefore OE \perp CE.$$

$$\because OE \text{ 是 } \odot O \text{ 的半径},$$

$$\therefore CE \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线}.$$

$$(2) \text{ 在 } \text{Rt}\triangle BCD \text{ 中, } \angle DCB = 90^\circ, CD = 2, BD = 2\sqrt{5},$$

$$BC = CE = 4.$$

$$\text{设 } \odot O \text{ 的半径为 } r, \text{ 则 } OD = OE = r, OC = r + 2,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle OEC \text{ 中, } \angle OEC = 90^\circ,$$

$$\therefore OE^2 + CE^2 = OC^2,$$

$$\therefore r^2 + 4^2 = (r + 2)^2,$$

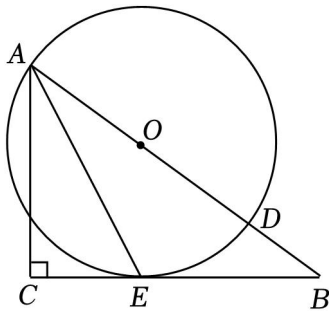
$$\text{解得 } r = 3,$$

$\therefore \odot O$ 的半径为 3.

23. (2023•东港区校级三模) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 E , 点 D 在 AB 上, 且以 AD 为直径的 $\odot O$ 经过点 E .

(1) 求证: BC 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 当 $AD=3BD$, 且 $BE=4$ 时, 求 $\odot O$ 的半径.



【答案】(1) 证明见解析; (2) 3.

【解答】(1) 证明: 连接 OE ,

$$\because OA=OE,$$

$$\therefore \angle OAE=\angle OEA,$$

$$\because AE \text{ 平分 } \angle BAC,$$

$$\therefore \angle BAE=\angle CAE,$$

$$\therefore \angle OEA=\angle CAE,$$

$$\therefore OE \parallel AC,$$

$$\because \angle C=90^\circ,$$

$$\therefore \angle OEC=90^\circ,$$

$$\therefore OE \perp BC,$$

$$\because OE \text{ 为半径},$$

$$\therefore BC \text{ 是 } \odot O \text{ 切线};$$

$$(2) \text{ 解: } \because AD=3BD,$$

$$\text{设 } BD=2x,$$

$$\text{则 } AD=6x,$$

$$\therefore AO=OD=OE=3x,$$

$$\therefore OB=5x,$$

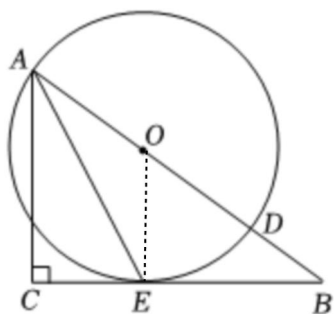
$$\text{在 } \text{Rt}\triangle OBE \text{ 中, 根据勾股定理得: } OE^2+BE^2=OB^2,$$

$$\therefore (3x)^2 + 4^2 = (5x)^2,$$

$$\therefore x = 1,$$

$$\therefore OE = 3x = 3,$$

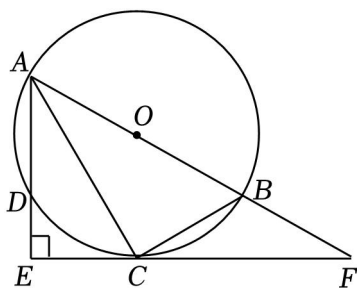
$$\therefore \odot O \text{ 半径为 } 3.$$



24. (2023·泗县校级模拟) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 以 AB 为直径作 $\odot O$, 在 $\odot O$ 上取一点 D , 使 $\widehat{CD} = \widehat{BC}$, 过点 C 作 $EF \perp AD$, 交 AD 的延长线于点 E , 交 AB 的延长线于点 F .

(1) 求证: 直线 EF 是 $\odot O$ 的切线;

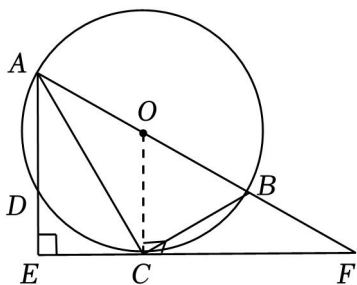
(2) 若 $AB = 10$, $AD = 6$, 求 AC 的长.



【答案】(1) 见详解;

(2) $4\sqrt{5}$.

【解答】(1) 证明: 连接 OC , 如图,



$$\therefore \widehat{CD} = \widehat{CB},$$

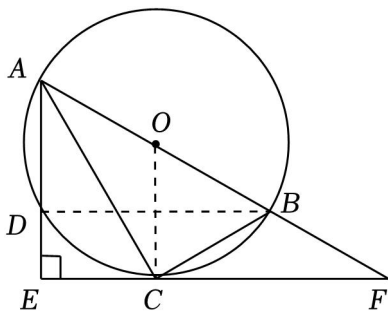
$$\therefore \angle EAC = \angle CAB,$$

$$\because EF \perp AD,$$
$$\therefore \angle EAC + \angle ACE = 90^\circ \quad ,$$
$$\because OC=OA,$$
$$\therefore \angle CAB = \angle OCA,$$
$$\therefore \angle EAC = \angle OCA,$$

$\therefore \angle ACO + \angle ACE = 90^\circ$, 即半径 $OC \perp EF$,

$\therefore EF$ 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 解: 连接 BD , 交 OC 于点 G , 如图,


$$\because AE \perp EF, \quad OC \perp EF,$$
$$\therefore AE \parallel OC,$$

$\because O$ 为 AB 为中点,

$\therefore OG$ 为 $\triangle ABD$ 中位线,

$$\therefore OG = \frac{1}{2}AD = 3, \quad DG = BG,$$
$$\therefore DG = BG = CE, \quad DB \perp OC, \quad GC = OC - OG = 2,$$
$$\because AB=10,$$
$$\therefore OB=5,$$
$$\therefore BG = \sqrt{OB^2 - OG^2} = 4,$$
$$\therefore DG = BG = 4,$$
$$\because AE \perp EF, \quad OC \perp EF, \quad DB \perp OC,$$

$\therefore$ 四边形 $DECG$ 是矩形,

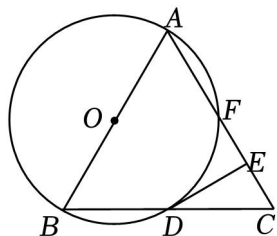
$$\therefore DE = CG = 2, \quad EC = DG = 4,$$
$$\therefore AE = 8,$$

∴在 $\triangle AEC$ 中, $AC = \sqrt{AE^2 + EC^2} = 4\sqrt{5}$.

25. (2023·荔湾区校级一模) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 以 AB 为直径作 $\odot O$, 交 BC 边于点 D , 交 AC 边于点 F , 作 $DE \perp AC$ 于点 E .

(1) 求证: DE 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的边长为2, 求 EF 的长度.



【答案】(1) 证明见解析;

(2) $\frac{1}{2}$.

【解答】(1) 证明: 如图所示, 连接 OD ,

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore \angle B = \angle C = 60^\circ$.

$\because OB = OD$,

$\therefore \angle ODB = \angle B = 60^\circ$.

$\because DE \perp AC$,

$\therefore \angle DEC = 90^\circ$.

$\therefore \angle EDC = 30^\circ$.

$\therefore \angle ODE = 90^\circ$.

$\therefore DE \perp OD$ 于点 D .

$\because$ 点 D 在 $\odot O$ 上,

$\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线;

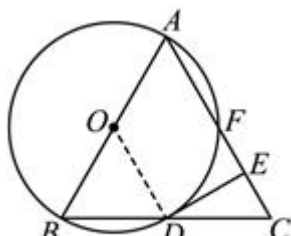


图1

(2) 解: 如图所示, 连接 AD , BF ,

$\because AB$ 为 $\odot O$ 直径,

$$\therefore \angle AFB = \angle ADB = 90^\circ .$$

$$\therefore AF \perp BF, AD \perp BD.$$

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore DC = \frac{1}{2}BC = 1, FC = \frac{1}{2}AC = 1.$$

$$\therefore \angle EDC = 30^\circ ,$$

$$\therefore EC = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore EF = FC - EC = \frac{1}{2}.$$

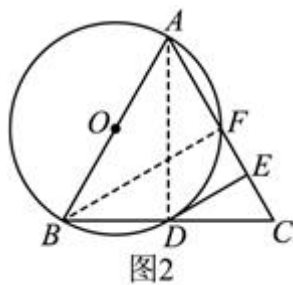


图2

