

2022-2023 学年江苏省无锡市新吴区新城实验中学九年级（上）

期中数学试卷

一、选择题（本大题共 10 小题，共 30 分。在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 下列方程为一元二次方程的是()

- A. $y + x = 0$ B. $2x + 1 = 0$ C. $x^2 + \frac{2}{x} = 5$ D. $4x^2 = 1$

2. 若 $\odot O$ 的半径为 4cm ，点 A 到圆心 O 的距离为 5cm ，那么点 A 与 $\odot O$ 的位置关系是()

- A. 点 A 在圆外 B. 点 A 在圆上 C. 点 A 在圆内 D. 不能确定

3. 下列图形，一定相似的是()

- A. 两个直角三角形 B. 两个等腰三角形 C. 两个等边三角形 D. 两个菱形

4. 下列说法：①优弧比劣弧长；②三点可以确定一个圆；③长度相等的弧是等弧；④经过圆内的一个定点可以作无数条弦；其中不正确的个数是()

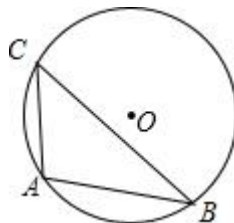
- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

5. 若关于 x 的方程 $x^2 - x - m = 0$ 没有实数根，则 m 的值可以为()

- A. -1 B. $-\frac{1}{4}$ C. 0 D. 1

6. 如图， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， $\angle C = 45^\circ$ ， $AB = 2$ ，则 $\odot O$ 的半径为()

- A. 1
B. $2\sqrt{2}$
C. 2
D. $\sqrt{2}$

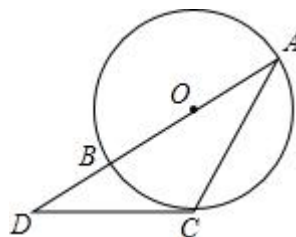


7. 某厂一月份生产某机器 100 台，计划二、三月份共生产 280 台。设二、三月份每月的平均增长率为 x ，根据题意列出的方程是()

- A. $100(1+x)^2 = 280$
B. $100(1+x) + 100(1+x)^2 = 280$
C. $100(1-x)^2 = 280$
D. $100 + 100(1+x) + 100(1+x)^2 = 280$

8. 图 O 的直径 $AB = 2$ 点 D 在 AB 的延长线， DC 与 $\odot O$ 相于点 C ，连 AC 。若 $\angle A = 3^\circ$ CD 为()

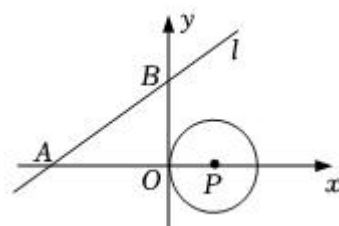
- A. $\frac{1}{3}$
B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$



C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

D. $\sqrt{3}$

9. 如图, 直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3}$ 与 x 轴、 y 轴分别相交于 A 、 B 两点, 圆心 P 的坐标为 $(2, 0)$. $\odot P$ 与 y 轴相切于点 O , 若将 $\odot P$ 沿 x 轴向左移动, 当 $\odot P$ 与该直线相交时, 横坐标为整数的点 P 的个数是()



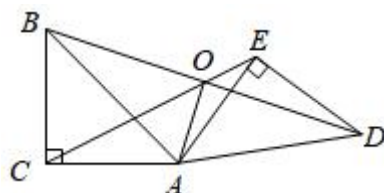
A. 5

B. 6

C. 7

D. 8

10. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC = 4$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 沿顺时针方向旋转后得到 $\triangle ADE$, 直线 BD 、 CE 相交于点 O , 连接 AO . 则下列结论中:



- ① $\triangle ABD \sim \triangle ACE$; ② $\angle COD = 135^\circ$; ③ $AO \perp BD$;
④ $\triangle AOC$ 面积的最大值为 8. 其中正确的有()

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

二、填空题 (本大题共 8 小题, 共 24 分)

11. 若 $\frac{x}{y} = \frac{8}{3}$, 则 $\frac{x-y}{y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

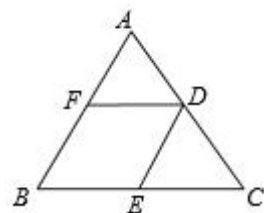
12. 在比例尺为 1: 10000 的地图上, 相距 7.5cm 的两地 A 、 B 的实际距离为 $\underline{\hspace{2cm}}$ m.

13. 设 α 、 β 是方程 $x^2 - x - 3 = 0$ 的两个实数根, 则 $\alpha + \beta = \underline{\hspace{2cm}}$.

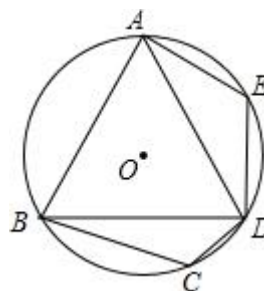
14. 已知圆锥的底面圆半径为 3, 母线长为 5, 则圆锥的侧面积是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $DE \parallel AB$, $DF \parallel BC$, 如果 $\frac{AF}{FB} = \frac{2}{3}$, 那

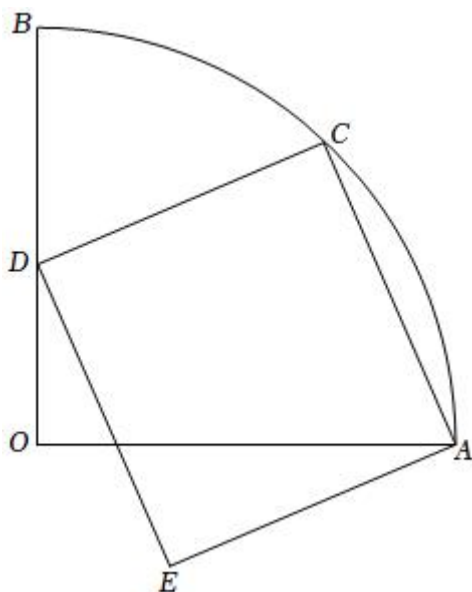
么 $\frac{CE}{CB} = \underline{\hspace{2cm}}$.



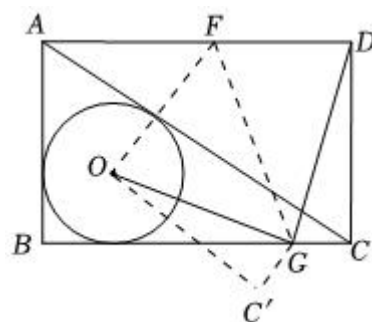
16. 如图, 在 $\odot O$ 的内接四边形 $ABCD$ 中, $AB = AD$, 若点 E 在 $\widehat{AD}$ 上, 若 $\angle E = 110^\circ$, 则 $\angle C = \underline{\hspace{2cm}}$.



17. 如图, 扇形 AOB 中, $\angle AOB = 90^\circ$, 点 C 为 $\widehat{AB}$ 的中点, 以 AC 为边向左侧作面积为 24 的正方形 $ACDE$, 顶点 D 恰好落在 OB 上, 则扇形 AOB 的面积为_____.



18. 如图, AC 是矩形 $ABCD$ 的对角线, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆, 现将矩形 $ABCD$ 按如图所示的方式折叠, 使点 D 与点 O 重合, 折痕为 FG , 点 F 、 G 分别在 AD 、 BC 上, 连结 OG 、 DG , 若 $OG \perp DG$, 且 $\odot O$ 的半径长为 1, 则 $BC - AB$ 的值_____, $CD + DF$ 的值_____.



三、解答题 (本大题共 9 小题, 共 76 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

19. 解方程.

(1) $(x + 3)^2 = 25$;

(2) $x^2 - 6x - 2 = 0$ (配方法);

(3) $2x^2 - 4x + 1 = 0$;

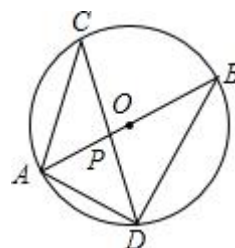
(4) $x(x - 2) = 2 - x$.

20. 已知: $\square ABCD$ 的两边 AB 、 AD 的长是关于 x 的方程 $x^2 - mx + m - 1 = 0$ 的两个实数根.

- (1) 当 m 为何值时, 四边形 $ABCD$ 是菱形? 求出这时菱形的边长;
- (2) 若 AB 的长为 3, 那么 $\square ABCD$ 的周长是多少?

21. 如图, 在 $\odot O$ 中, 直径 AB 与弦 CD 相交于点 P , $\angle CAB = 45^\circ$, $\angle APD = 75^\circ$.

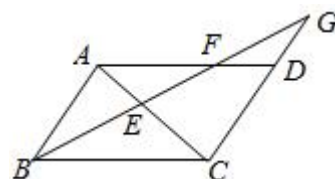
- (1) 求 $\angle B$ 的大小;
- (2) 已知圆心 O 到 BD 的距离为 3, 求 AD 的长.



22. 如图，在 $\square ABCD$ 中， G 是 CD 延长线上一点，连接 BG 交 AC ， AD 于 E ， F 。

(1) 求证： $\triangle ABE \sim \triangle CGE$ ；

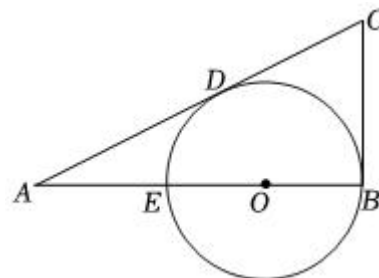
(2) 若 $AF = 2FD$ ，求 $\frac{BE}{EG}$ 的值。



23. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle ABC = 90^\circ$ ，在 AB 上取一点 E ，以 BE 为直径的 $\odot O$ 恰与 AC 相切于点 D ，若 $AE = 4\text{cm}$ ， $\angle A = 30^\circ$ 。

(1) 求 $\odot O$ 的半径；

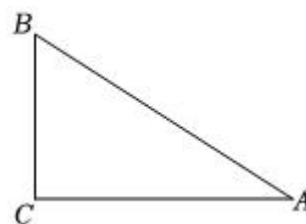
(2) 求出由线段 CD 、 CB 与劣弧 BD 围成的图形面积。



24. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 E 、 F 分别是边 AB 、 BC 上的两个点，点 B 关于直线 EF 的对称点 P 恰好落在边 AC 上且满足 $EP \perp AC$ 。

(1) 请你利用无刻度的直尺和圆规画出对称轴 EF ；（保留作图痕迹，不写作法）

(2) 若 $BC = 3$ ， $AC = 4$ ，则线段 $EP =$ _____。



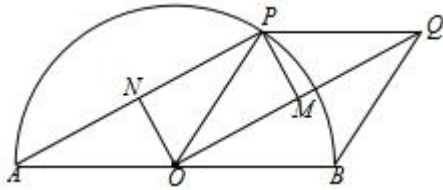
25. 无锡阳山水蜜桃是中国国家地理标志产品，软香可口、汁多味甜，有“水做的骨肉”美誉。某水果批发商销售阳山水蜜桃，每箱成本是 50 元，经过调查发现：销售单价是 60 元时，

平均每天的销量是 80 箱，当销售单价每提高 5 元，平均每天就少售出 10 箱，但销售单价不得超过 90 元.

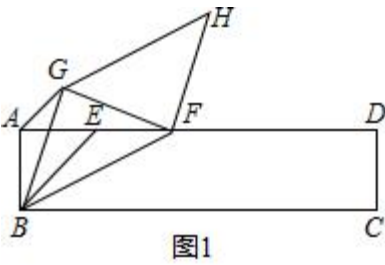
- (1) 若销售单价为 65 元，求每天的销售利润；
- (2) 要使每天销售阳山水蜜桃盈利 1200 元，水蜜桃属于易坏食品，批发商想要尽快销售水蜜桃，那么每箱水蜜桃的售价应为多少元？

26. 如图，已知 AB 为半圆 O 的直径， P 为半圆上的一个动点 (不含端点)，以 OP 、 OB 为一组邻边作 $\square POBQ$ ，连接 OQ 、 AP ，设 OQ 、 AP 的中点分别为 M 、 N ，连接 PM 、 ON .

- (1) 试判断四边形 $OMPN$ 的形状，并说明理由.
- (2) 若点 P 从点 B 出发，以每秒 15° 的速度，绕点 O 在半圆上逆时针方向运动，设运动时间为 ts .
 - ① 试求：当 t 为何值时，四边形 $OMPN$ 的面积取得最大值？并判断此时直线 PQ 与半圆 O 的位置关系 (需说明理由)；
 - ② 是否存在这样的 t ，使得点 Q 落在半圆 O 内？若存在，请直接写出 t 的取值范围；若不存在，请说明理由.



27. 如图，矩形 $ABCD$ ， $AB = 2$ ， $BC = 10$ ，点 E 为 AD 上一点，且 $AE = AB$ ，点 F 从点 E 出发，向终点 D 运动，速度为 1cm/s ，以 BF 为斜边在 BF 上方作等腰直角 $\triangle BFG$ ，以 BG 、 BF 为邻边作 $\square BFHG$ ，连接 AG . 设点 F 的运动时间为 t 秒.



- (1) 试说明： $\triangle ABG \sim \triangle EBF$ ；
- (2) 当点 H 落在直线 CD 上时，求 t 的值；
- (3) 点 F 从 E 运动到 D 的过程中，直接写出 HC 的最小值.

答案和解析

1. 【答案】D

【解析】解：A. 方程 $y + x = 0$ 是二元一次方程，不是一元二次方程，故本选项不符合题意；
B. 方程 $2x + 1 = 0$ 是一元一次方程，不是一元二次方程，故本选项不符合题意；
C. 方程 $x^2 + \frac{2}{x} = 5$ 是分式方程，不是整式方程，不是一元二次方程，故本选项不符合题意；
D. 方程 $4x^2 = 1$ 是一元二次方程，故本选项符合题意；
故选：D.

2. 【答案】A

【解析】解： $\because \odot O$ 的半径为 $4cm$ ，点 A 到圆心 O 的距离为 $5cm$ ， $5cm > 4cm$ ，
 $\therefore$ 点 A 在圆外.
故选：A.

3. 【答案】C

【解析】解：A. 两个直角三角形，对应角不一定相等，对应边不一定成比例，不符合相似的定义，故 A 选项不符合题意；
B. 两个等腰三角形的对应角不一定相等，对应边不一定成比例，不符合相似的定义，故 B 选项不符合题意；
C. 两个等边三角形的对应角一定相等，对应边一定成比例，符合相似的定义，故 C 选项符合题意；
D. 两个菱形，对应边成比例，对应角不一定相等，不符合相似的定义，故 D 选项不符合题意；
故选：C.

4. 【答案】C

【解析】解：①优弧比劣弧长，不一定，在同圆或等圆中结论成立，故①错误.
②三点可以确定一个圆，错误，应该是过不在同一直线上的三个点确定一个圆. 故②错误.
③长度相等的弧是等弧，错误，长度相等的弧不一定相等，等弧的长度相等，故③错误.
④经过圆内的一个定点可以作无数条弦，故④正确.
故选：C.

5. 【答案】A

【解析】

【分析】

本题考查了一元二次方程根的判别式，需要掌握一元二次方程没有实数根相当于判别式小于零．
根据关于 x 的方程 $x^2 - x - m = 0$ 没有实数根，判断出 $\Delta < 0$ ，求出 m 的取值范围，再找出符合条件的 m 的值．

【解答】

解： $\because$ 关于 x 的方程 $x^2 - x - m = 0$ 没有实数根，

$$\therefore \Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-m) = 1 + 4m < 0,$$

$$\text{解得：} m < -\frac{1}{4},$$

故选 A.

6. 【答案】D

【解析】解：连接 AO ，并延长交 $\odot O$ 于点 D ，连接 BD ，

$$\because \angle C = 45^\circ, \therefore \angle D = 45^\circ,$$

$$\because AD \text{ 为 } \odot O \text{ 的直径, } \therefore \angle ABD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle D = 45^\circ,$$

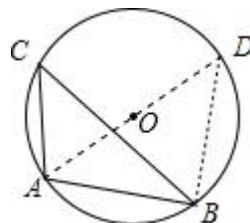
$$\because AB = 2, \therefore BD = 2,$$

$$\therefore AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \odot O \text{ 的半径 } AO = \frac{AD}{2} = \sqrt{2}.$$

故选 D.

连接 AO ，并延长交 $\odot O$ 于点 D ，连接 BD ，由圆周角定理可得 $\angle D$ 与 $\angle ABD$ 的度数，再由勾股定理即可解答．



7. 【答案】B

【解析】

【分析】

本题可根据增长率的一般规律找到关键描述语，列出方程，平均增长率问题，一般形式为

$a(1+x)^2 = b$ ， a 为起始时间的有关数量， b 为终止时间的有关数量．主要考查增长率问题，一般用增长后的量 = 增长前的量 $\times (1 + \text{增长率})$ ，如果设二、三月份每月的平均增长率为 x ，根据“计划二、三月份共生产 280 台”，即可列出方程．

【解答】

解：设二、三月份每月的平均增长率为 x ，

则二月份生产机器为： $100(1+x)$ ，

三月份生产机器为： $100(1+x)^2$ ；

又知二、三月份共生产 280 台，

所以，可列方程： $100(1+x) + 100(1+x)^2 = 280$.

故选 B.

8. 【答案】D

【解析】解：右图所示，连 C，OC，

$$\therefore \angle BOC = 90^\circ,$$

$$\therefore AB = ,$$

$\therefore AB$ 是径，

$$\therefore D = \sqrt{OD^2 - OC^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore OD = 2,$$

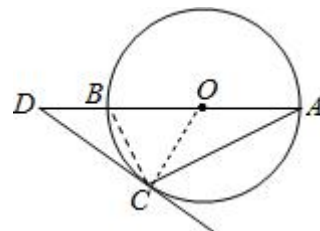
$$\therefore \angle D = \angle CBA - D = 60 - 30^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore OC = 1,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle A = 30^\circ, \quad \angle C = 90^\circ,$$

选 D.

先 B，OC 由 AB 是直径，可知 $\angle BCA = 90^\circ$ ，而 $\angle A = 30^\circ$ ，易求 $\angle CBA$ ，又 DC 线，用弦切角定理可知 $\angle CB = \angle A = 30^\circ$ ，再利用角形角质可 D 切线质得 $\angle = \angle A = 30^\circ$ ， $\angle OCD = 90^\circ$ ，易得 OD，由勾股定理可 CD.



9. 【答案】C

【解析】解：令 $y = 0$ ，则 $\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3} = 0$ ，

解得 $x = -6$ ，

则 A 点坐标为 $(-6, 0)$ ；

令 $x = 0$ ，则 $y = 2\sqrt{3}$ ，

则 B 点坐标为 $(0, 2\sqrt{3})$ ，

$$\therefore \tan \angle BAO = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle BAO = 30^\circ,$$

作 $\odot P'$ 与 $\odot P''$ 切 AB 于 D、E，

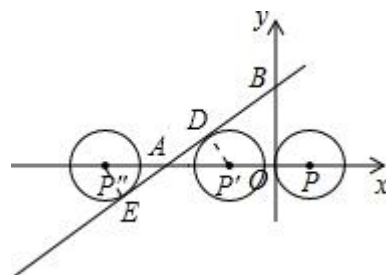
连接 $P'D$ 、 $P''E$ ，则 $P'D \perp AB$ 、 $P''E \perp AB$ ，

则在 $\text{Rt}\triangle ADP'$ 中， $AP' = 2 \times DP' = 4$ ，

同理可得， $AP'' = 4$ ，

则 P' 横坐标为 $-6 + 4 = -2$ ， P'' 横坐标为 $-6 - 4 = -10$ ，

$\therefore P$ 横坐标 x 的取值范围为： $-10 < x < -2$ ，



∴点 P 横坐标为 $-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3$ 共 7 个,

故选: C .

求出函数与 x 轴、 y 轴的交点坐标, 求出函数与 x 轴的夹角, 计算出当 $\odot P$ 与 AB 相切时点 P 的坐标, 判断出 P 的横坐标的取值范围.

10. 【答案】 C

【解析】解: 由旋转性质可知, $AC = BC = AE = DE = 4$, $AB = AD = 4\sqrt{2}$,

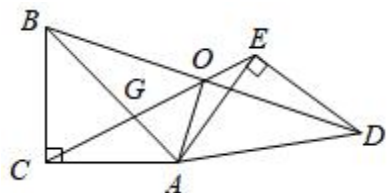
$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \sqrt{2}.$$

$$\therefore \angle DAE = \angle CAB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE + \angle EAB = \angle CAB + \angle EAB, \text{ 即 } \angle DAB = \angle EAC.$$

故 $\triangle ABD \sim \triangle ACE$, 故①正确;

设 AB 、 CE 交于点 G , 如图.



由 $\triangle ABD \sim \triangle ACE$, 可得 $\angle DBA = \angle ECA$,

$$\text{又 } \angle EGB = \angle CGA,$$

$$\therefore \angle BOC = \angle BAC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle COD = 135^\circ, \text{ 故②正确;}$$

由 $\angle BOC = \angle BAC = 45^\circ$, 可知 A 、 C 、 B 、 O 四点共圆,

由圆内接四边形性质知 $\angle BOA + \angle BCA = 180^\circ$,

则 $\angle BOA = 90^\circ$, 即 $AO \perp BD$.

故③正确;

以 AC 作 $\triangle AOC$ 底边, 则 O 到 AC 距离为高, 设高为 h ,

当 h 最大时, $\triangle AOC$ 面积才最大.

∵ A 、 C 、 B 、 O 四点共圆, 且 $\angle BCA = 90^\circ$,

故 AB 为此圆直径, 当 h 垂直 AC 通过圆心的时候, h 最大,

$$\text{此时 } h = 2\sqrt{2} + 2,$$

$$\text{故 } \triangle AOC \text{ 的面积最大值为 } \frac{1}{2} \times 4 \times h = 4\sqrt{2} + 4,$$

故④错误.

故正确的一共有 3 个,

故选: C .

由旋转性质证明 $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ 即可判断①；由 $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ ，可得 $\angle DBA = \angle ECA$ ， $\angle OGB = \angle CGA$ ，进而 $\angle BOC = \angle BAC = 45^\circ$ 即可判断②；证明 $\triangle ABD$ 为等腰三角形即可判断③；通过 $A、C、B、F$ 四点共圆，当 $O、G、C$ 三点一线且垂直 AC 通过圆心的时候，可得 $\triangle AOC$ 的高最大，从而 $\triangle AOC$ 的面积最大，进而判断④。

11. 【答案】 $\frac{5}{3}$

【解析】解： $\because \frac{x}{y} = \frac{8}{3}$ ，

$$\therefore x = \frac{8}{3}y,$$

$$\therefore \frac{x-y}{y} = \frac{\frac{8}{3}y-y}{y} = \frac{5}{3};$$

故答案为： $\frac{5}{3}$ 。

根据比例的性质得出 $x = \frac{8}{3}y$ ，再代入要求的式子进行计算即可。

本题考查了比例的基本性质，比较简单，用 y 表示出 x 是解题关键。

12. 【答案】 750

【解析】解：设 AB 的实际距离为 x cm，

$\because$ 比例尺为 1：10000，

$\therefore 7.5：x = 1：10000$ ，

解得 $x = 75000$ ，

$$75000\text{cm} = 750\text{m}.$$

故答案为： 750。

设 AB 的实际距离为 x cm，根据比例尺的定义得到 $7.5：x = 1：10000$ ，利用比例的性质求得 x 的值，注意单位统一。

13. 【答案】 1

【解析】解： $\because \alpha、\beta$ 是方程 $x^2 - x - 3 = 0$ 的两个实数根，

$$\therefore \alpha + \beta = 1.$$

故答案为： 1。

利用“两根之和等于 $-\frac{b}{a}$ ”，可求出 $\alpha + \beta$ 的值。

14. 【答案】 15π

【解析】解：圆锥的侧面积 $= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi$.

故答案为 15π .

利用圆锥的侧面展开图为一扇形，这个扇形的弧长等于圆锥底面的周长，扇形的半径等于圆锥的母线长和扇形的面积公式求解.

15. **【答案】** $\frac{3}{5}$

【解析】

【分析】

根据 $DF \parallel BC$ ，得出 $\frac{AD}{DC} = \frac{AF}{FB} = \frac{2}{3}$ ，再根据 $DE \parallel AB$ 列出比例式，计算即可.

【解答】

解： $\because DF \parallel BC$ ， $\frac{AF}{FB} = \frac{2}{3}$ ，

$$\therefore \frac{AD}{DC} = \frac{AF}{FB} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{CD}{CA} = \frac{3}{5},$$

$$\because DE \parallel AB,$$

$$\therefore \frac{CE}{CB} = \frac{CD}{CA} = \frac{3}{5},$$

故答案为： $\frac{3}{5}$.

16. **【答案】** 140°

【解析】解： $\because$ 四边形 $ABDE$ 是 $\odot O$ 的内接四边形，

$$\therefore \angle ABD = 180^\circ - \angle E = 70^\circ,$$

$$\because AB = AD,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ABD = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = 180^\circ - 70^\circ \times 2 = 40^\circ,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形，

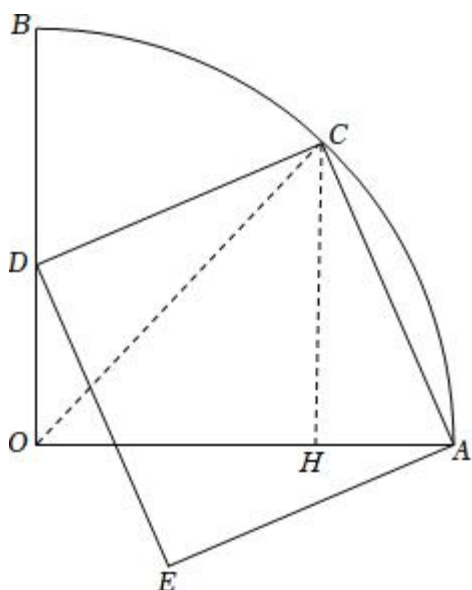
$$\therefore \angle C = 180^\circ - \angle BAD = 140^\circ,$$

故答案为： 140° .

根据圆内接四边形的性质求出 $\angle ABD$ ，根据等腰三角形的性质、三角形内角和定理求出 $\angle BAD$ ，根据圆内接四边形的性质计算，得到答案.

17. **【答案】** $(6 + 3\sqrt{2})\pi$

【解析】解：过点 C 作 $CH \perp OA$ 于点 H ，连接 OC ，如图所示：



则 $\angle OHC = 90^\circ$ ，

$\because$ 扇形 AOB 中， $\angle AOB = 90^\circ$ ，点 C 为 $\widehat{AB}$ 的中点，

$\therefore \angle AOC = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle OCH = 45^\circ$ ，

$\therefore OH = CH$ ，

设 $OH = CH = x$ ，

根据勾股定理，得 $OC = \sqrt{2}x$ ，

$\therefore OA = \sqrt{2}x$ ，

$\therefore AH = (\sqrt{2} - 1)x$ ，

$\because$ 以 AC 为边向左侧作面积为 24 的正方形 $ACDE$ ，

$\therefore AC^2 = 24$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AHC$ 中，根据勾股定理，得 $(\sqrt{2} - 1)^2 x^2 + x^2 = 24$ ，

$\therefore x^2 = 12 + 6\sqrt{2}$ ，

$\therefore OC^2 = 2x^2 = 24 + 12\sqrt{2}$ ，

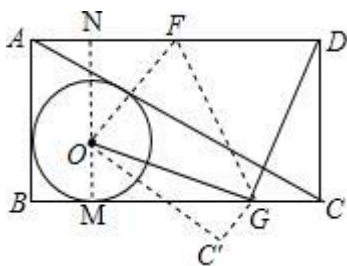
$\therefore$ 扇形 AOB 的面积 $= \frac{1}{4}\pi OC^2 = (6 + 3\sqrt{2})\pi$ ，

故答案为： $(6 + 3\sqrt{2})\pi$ 。

过点 C 作 $CH \perp OA$ 于点 H ，连接 OC ，根据已知条件可知 $\angle AOC = 45^\circ$ ，设 $OH = CH = x$ ，根据勾股定理，得 $OC = \sqrt{2}x$ ，在 $\text{Rt}\triangle AHC$ 中，根据勾股定理，得 $(\sqrt{2} - 1)^2 x^2 + x^2 = 24$ ，求出 $x^2 = 12 + 6\sqrt{2}$ ，进一步求扇形 AOB 的面积即可。

18. 【答案】25

【解析】解：如图，设 $\odot O$ 与 BC 的切点为 M ，连接 MO 并延长 MO 交 AD 于点 N ，



$\therefore$ 将矩形 $ABCD$ 按如图所示的方式折叠，使点 D 与点 O 重合，折痕为 FG ，

$\therefore OG = DG$ ，

$\therefore OG \perp DG$ ，

$\therefore \angle MGO + \angle DGC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle MOG + \angle MGO = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle MOG = \angle DGC$ ，

在 $\triangle OMG$ 和 $\triangle GCD$ 中，

$$\begin{cases} \angle OMG = \angle DCG = 90^\circ \\ \angle MOG = \angle DGC \\ OG = DG \end{cases},$$

$\therefore \triangle OMG \cong \triangle GCD (AAS)$ ，

$\therefore OM = GC = 1$ ， $CD = GM = BC - BM - GC = BC - 2$ 。

$\therefore AB = CD$ ，

$\therefore BC - AB = 2$ ；

设 $AB = a$ ， $BC = b$ ， $AC = c$ ， $\odot O$ 的半径为 r ，

$\odot O$ 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的内切圆可得 $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$ ，

$\therefore c = a + b - 2$ 。

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，由勾股定理可得 $a^2 + b^2 = (a + b - 2)^2$ ，

整理得 $2ab - 4a - 4b + 4 = 0$ ，

又 $\therefore BC - AB = 2$ 即 $b = 2 + a$ ，代入可得 $2a(2 + a) - 4a - 4(2 + a) + 4 = 0$ ，

解得 $a_1 = 1 - \sqrt{3}$ (舍去)， $a_2 = 1 + \sqrt{3}$ ，

$\therefore BC + AB = 2\sqrt{3} + 4$ ，

$\therefore AB = 1 + \sqrt{3}$ ， $BC = 3 + \sqrt{3}$ ，

再设 $DF = x$ ，在 $\text{Rt}\triangle ONF$ 中， $FN = 3 + \sqrt{3} - 1 - x$ ， $OF = x$ ， $ON = 1 + \sqrt{3} - 1$ ，

由勾股定理可得 $(2 + \sqrt{3} - x)^2 + (\sqrt{3})^2 = x^2$ ，

解得 $x = 4 - \sqrt{3}$ ，

$\therefore CD + DF = \sqrt{3} + 1 + 4 - \sqrt{3} = 5$ ，

故答案为：2，5。

设 $\odot O$ 与 BC 的切点为 M ，连接 MO 并延长 MO 交 AD 于点 N ，根据折叠的性质得到 $OG = DG$ ，根据全等三角形的性质得到 $OM = GC = 1$ ， $CD = GM = BC - BM - GC = BC - 2$ 。设 $AB = a$ ， $BC = b$ ， $AC = c$ ， $\odot O$ 的半径为 r ，推出 $\odot O$ 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的内切圆可得 $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$ ，根据勾股定理得到 $BC + AB = 2\sqrt{3} + 4$ ，再设 $DF = x$ ，在 $\text{Rt}\triangle ONF$ 中， $FN = 3 + \sqrt{3} - 1 - x$ ， $OF = x$ ， $ON = 1 + \sqrt{3} - 1$ ，由勾股定理可得 $x = 4 - \sqrt{3}$ ，于是得到结论。

19.【答案】解：(1) $(x + 3)^2 = 25$ ，

$$\therefore x + 3 = \pm 5,$$

$$\therefore x_1 = 2, \quad x_2 = -8;$$

$$(2)x^2 - 6x - 2 = 0,$$

$$x^2 - 6x = 2,$$

$$x^2 - 6x + 9 = 11, \text{ 即 } (x - 3)^2 = 11,$$

$$\therefore x - 3 = \pm\sqrt{11},$$

$$\therefore x_1 = 3 + \sqrt{11}, \quad x_2 = 3 - \sqrt{11};$$

$$(3)2x^2 - 4x + 1 = 0,$$

$$x^2 - 2x = -\frac{1}{2},$$

$$x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{2}, \text{ 即 } (x - 1)^2 = \frac{1}{2},$$

$$\therefore x - 1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore x_1 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$(4)x(x - 2) = 2 - x,$$

$$x(x - 2) + (x - 2) = 0,$$

$$\therefore (x - 2)(x + 1) = 0,$$

$$\therefore x - 2 = 0 \text{ 或 } x + 1 = 0,$$

$$\therefore x_1 = 2, \quad x_2 = -1.$$

【解析】(1) 利用直接开平方法求解即可；

(2) 利用配方法求解即可；

(3) 利用配方法求解即可；

(4) 利用因式分解法求解即可。

20.【答案】解：(1) $\because$ $ABCD$ 为菱形，

$$\therefore AB = AD,$$

$\therefore$ 关于 x 的方程 $x^2 - mx + m - 1 = 0$ 有两个相等的实数根，

$$\therefore \Delta = (-m)^2 - 4 \times 1 \times (m - 1) = (m - 2)^2 = 0,$$

$$\text{解得： } m_1 = m_2 = 2,$$

$\therefore$ 当 m 为 2 时，四边形 $ABCD$ 是菱形.

$$\text{将 } m = 2 \text{ 代入原方程得 } x^2 - 2x + 1 = 0, \text{ 即 } (x - 1)^2 = 0,$$

$$\text{解得： } x_1 = x_2 = 1,$$

$\therefore$ 这时菱形的边长为 1.

$$(2) \text{ 将 } x = 3 \text{ 代入原方程得 } 3^2 - 3m + m - 1 = 0,$$

$$\text{解得： } m = 4,$$

$$\therefore \text{原方程为 } x^2 - 4x + 3 = 0,$$

又 $\because$ $ABCD$ 的两边 AB 、 AD 的长是关于 x 的方程 $x^2 - mx + m - 1 = 0$ 的两个实数根，

$$\therefore AB + AD = 4,$$

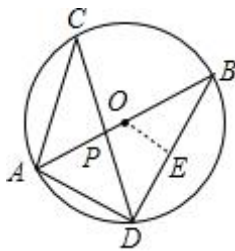
$$\therefore \square ABCD \text{ 的周长是 } 2(AB + AD) = 2 \times 4 = 8.$$

21.【答案】解：(1) $\because \angle CAB = 45^\circ$, $\angle APD = 75^\circ$.

$$\therefore \angle C = \angle APD - \angle CAB = 30^\circ,$$

$\therefore$ 由圆周角定理得： $\angle C = \angle B$,

$$\therefore \angle B = 30^\circ;$$



(2) 过 O 作 $OE \perp BD$ 于 E ,

$\therefore OE$ 过 O ,

$$\therefore BE = DE,$$

$\therefore$ 圆心 O 到 BD 的距离为 3,

$$\therefore OE = 3,$$

$$\therefore AO = BO, DE = BE,$$

$$\therefore AD = 2OE = 6.$$

22.【答案】(1) 证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle CGE,$$

$$\text{又} \because \angle AEB = \angle CGE,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle CGE.$$

(2) 解：设 $FD = m$ ，则 $AF = 2m$ ，

$$\therefore AD = 3m,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$$\therefore AD \parallel BC, \quad BC = AD = 3m,$$

$$\therefore \angle EAF = \angle ECB, \quad \angle AFE = \angle CBE,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle CEB$$

$$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{AF}{BC} = \frac{2}{3},$$

$$\text{又} \because \triangle ABE \sim \triangle CGE,$$

$$\therefore \frac{BE}{EG} = \frac{AE}{EC} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{即 } \frac{BE}{EG} \text{ 的值为 } \frac{2}{3}.$$

23.【答案】解：(1) 连接 OD 、 ED ，

$\because \odot O$ 与 AC 相切于点 D ，

$$\therefore AC \perp OD,$$

$$\therefore \angle ODA = 90^\circ,$$

$$\because \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD = 60^\circ,$$

$$\because OD = OE,$$

$\therefore \triangle DOE$ 是等边三角形，

$$\therefore OE = DE, \quad \angle OED = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EDA = \angle OED - \angle A = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle EDA = \angle A,$$

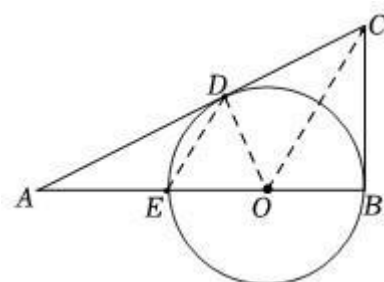
$$\therefore DE = AE = 4\text{cm},$$

$$\therefore OE = 4\text{cm},$$

$\therefore \odot O$ 的半径长为 4cm .

(2) 连接 OC ，

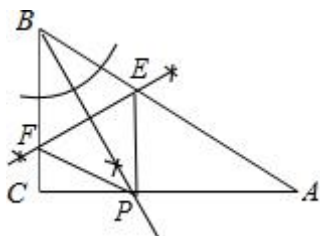
$$\because \angle BOD = 2\angle OED = 120^\circ, \quad \angle ODC = \angle ABC = 90^\circ,$$



$$\begin{aligned}
&\therefore \angle BCD = 360^\circ - \angle BOD - \angle ODC - \angle ABC = 60^\circ, \\
&\therefore BC \perp OB, \text{ } OB \text{ 是 } \odot O \text{ 的半径,} \\
&\therefore BC \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线,} \\
&\therefore CB = CD, \angle OCD = \angle OCB = \frac{1}{2} \angle BCD = 30^\circ, \\
&\therefore OD = OB = 4\text{ cm}, \\
&\therefore OC = 2OD = 8\text{ cm}, \\
&\therefore CB = CD = \sqrt{OC^2 - OD^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}(\text{ cm}), \\
&\therefore S_{\triangle OBC} = S_{\triangle ODC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}(\text{ cm}^2), \\
&\therefore S_{\text{扇形} BOD} = \frac{120}{360} \times \pi \times 4^2 = \frac{16\pi}{3}(\text{ cm}^2), \\
&\therefore S = S_{\triangle OBC} + S_{\triangle ODC} - S_{\text{扇形} BOD} = 8\sqrt{3} + 8\sqrt{3} - \frac{16\pi}{3} = \frac{48\sqrt{3} - 16\pi}{3}(\text{ cm}^2), \\
&\therefore \text{由线段 } CD、CB \text{ 与劣弧 } BD \text{ 围成的图形面积是 } \frac{48\sqrt{3} - 16\pi}{3} \text{ cm}^2.
\end{aligned}$$

24. 【答案】 $\frac{15}{8}$

【解析】解：(1) 如图，直线 EF 即为所求作。



(2) 由作图可知，四边形 $BEFP$ 是菱形，

设 $BE = EP = PF = BF = x$ ，

$\therefore EP \perp AC$ ，

$\therefore \angle APE = \angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore PE \parallel BC$ ，

$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{PE}{BC}$ ，

$\therefore \frac{5-x}{5} = \frac{x}{3}$ ，

$\therefore x = \frac{15}{8}$ ，

故答案为: $\frac{15}{8}$.

25. 【答案】解: (1) $(65 - 50) \times (80 - 10 \times \frac{65 - 60}{5})$

$$= (65 - 50) \times (80 - 10 \times \frac{5}{5})$$

$$= (65 - 50) \times (80 - 10)$$

$$= 15 \times 70$$

$$= 1050(\text{元}).$$

答: 每天的销售利润为 1050 元.

(2) 设每箱水蜜桃的售价为 y 元, 则每箱的销售利润为 $(y - 50)$ 元, 平均每天的销量是

$$(80 - 10 \times \frac{y - 60}{5}) \text{ 箱},$$

依题意得: $(y - 50)(80 - 10 \times \frac{y - 60}{5}) = 1200$,

$$\text{整理得: } y^2 - 150y + 5600 = 0,$$

$$\text{解得: } y_1 = 70, y_2 = 80,$$

又 $\because$ 要尽快销售水蜜桃,

$$\therefore y = 70.$$

答: 每箱水蜜桃的售价应为 70 元.

26. 【答案】解: (1) 四边形 $OMPN$ 为矩形,

理由如下: $\because$ 四边形 $POBQ$ 为平行四边形,

$$\therefore PQ \parallel OB, PQ = OB,$$

$$\text{又} \because OB = OA,$$

$$\therefore PQ = AO,$$

$$\text{又} \because PQ \parallel OA,$$

$$\therefore \text{四边形 } PQOA \text{ 为平行四边形},$$

$$\therefore PA \parallel QO, PA = QO.$$

又 $\because M$ 、 N 分别为 OQ 、 AP 的中点,

$$\therefore OM = \frac{1}{2}OQ, PN = \frac{1}{2}AP,$$

$$\therefore OM = PN,$$

$$\therefore \text{四边形 } OMPN \text{ 为平行四边形},$$

$$\therefore OP = OA, N \text{ 是 } AP \text{ 的中点},$$

$$\therefore ON \perp AP, \text{ 即 } \angle ONP = 90^\circ,$$

∴ 四边形 $OMPN$ 为矩形；

(2) ① ∵ 四边形 $OMPN$ 为矩形，

$$\therefore S_{\text{矩形}OMPN} = ON \cdot NP = \frac{1}{2} AP \cdot ON,$$

$$\therefore S_{\text{矩形}OMPN} = S_{\triangle AOP},$$

∵ $\triangle AOP$ 的底 AO 为定值，

∴ 当 P 旋转运动 90° (运动至最高点) 时，高取得最大值，此时 $\triangle AOP$ 的面积取得最大值。

$$\therefore t = 90 \div 15 = 6 \text{ 秒}.$$

∴ 当 $t = 6s$ 时，四边形 $OMPN$ 面积最大，

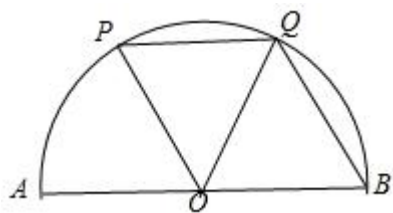
此时， PQ 与半圆 O 相切。

理由如下：∵ $\angle POB = 90^\circ$ ， $PQ \parallel OB$ ，

$$\therefore \angle OPQ = 90^\circ,$$

∴ PQ 与半圆 O 相切；

② 如图，当点 Q 落在半圆 O 上时，



∵ 四边形 $POBQ$ 是平行四边形，

$$\therefore PQ = OB, PO = BQ,$$

$$\text{又} \because OB = OP = OQ,$$

$$\therefore OP = OQ = PQ = BO = BQ,$$

∴ $\triangle POQ$ 是等边三角形， $\triangle BQO$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle POQ = \angle BOQ = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BOP = 120^\circ,$$

$$\therefore t = \frac{120}{15} = 8s,$$

∴ 当 $t = 8s$ 时，点 Q 落在半圆 O 上，

$$\therefore \text{当点 } P \text{ 与点 } A \text{ 重合时，} t = \frac{180}{15} = 12s,$$

∴ 当 $8 < t < 12$ 时，点 Q 落在半圆 O 内。

27. 【答案】 (1) 证明：如图 1 中，

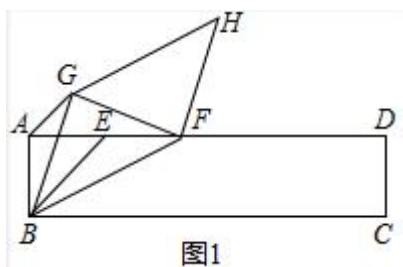


图1

$\because \triangle ABE$ ， $\triangle BGF$ 都是等腰直角三角形，

$$\therefore \frac{AB}{BE} = \frac{BG}{BF} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \angle ABE = \angle GBF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ABG = \angle EBF,$$

$$\therefore \triangle ABG \sim \triangle EBF.$$

(2) 解：如图构建如图平面直角坐标系，

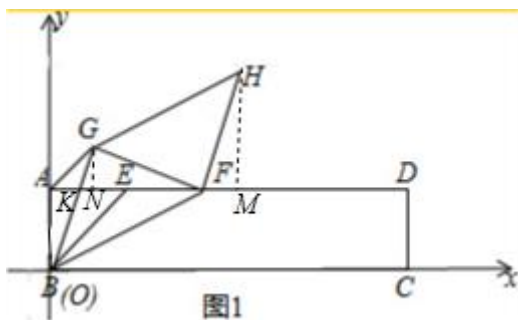


图1

作 $HM \perp AD$ 于 M ， $GN \perp AD$ 于 N 。设 AM 交 BG 于 K 。

$\because \triangle GFH$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore FG = FH, \angle GNF = \angle GFH = \angle HMF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GFN + \angle HFM = 90^\circ, \angle HFM + \angle FHM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GFN = \angle FHM,$$

$$\therefore \triangle GFN \cong \triangle FHM,$$

$$\therefore GN = FM, FN = HM,$$

$$\therefore \triangle ABG \sim \triangle EBF,$$

$$\therefore \frac{AG}{EF} = \frac{AB}{BE} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \angle AGB = \angle EFB, \therefore \angle AKG = \angle BKF,$$

$$\therefore \angle GAN = \angle KBF = 45^\circ,$$

$$\therefore EF = t,$$

$$\therefore AG = \frac{\sqrt{2}}{2}t,$$

$$\therefore AN = GN = FM = \frac{1}{2}t,$$

$$\therefore AM = 2 + \frac{3}{2}t, \quad HM = FN = 2 + \frac{1}{2}t,$$

$$\therefore H(2 + \frac{3}{2}t, 4 + \frac{1}{2}t),$$

$$\text{当点 } H \text{ 在直线 } CD \text{ 上时, } 2 + \frac{3}{2}t = 10, \text{ 解得 } t = \frac{16}{3}.$$

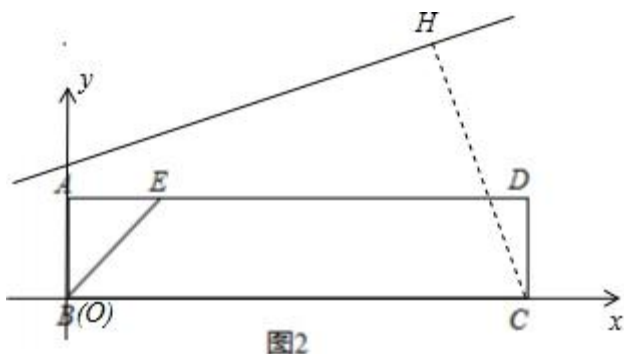
$$(3) \text{ 由 (2) 可知 } H(2 + \frac{3}{2}t, 4 + \frac{1}{2}t),$$

$$\text{令 } x = 2 + \frac{3}{2}t, \quad y = 4 + \frac{1}{2}t,$$

$$\text{消去 } t \text{ 得到 } y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}.$$

$$\therefore \text{点 } H \text{ 在直线 } y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3} \text{ 上运动,}$$

$$\text{如图, 作 } CH \text{ 垂直直线 } y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3} \text{ 垂足为 } H.$$



根据垂线段最短可知, 此时 CH 的长最小,

易知直线 CH 的解析式为 $y = -3x + 30$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = -3x + 30 \\ y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = 8 \\ y = 6 \end{cases},$$

$$\therefore H(8, 6),$$

$$\therefore C(10, 0),$$

$$\therefore CH = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10},$$

$$\therefore HC \text{ 最小值是 } 2\sqrt{10}.$$

