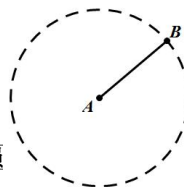


专题 2.4 辅助圆定点定长

模型方法

模型一：定点定长作圆

点 A 为定点，点 B 为动点，且 AB 长度固定，
则点 B 的轨迹是以点 A 为圆心，AB 长为半径的圆



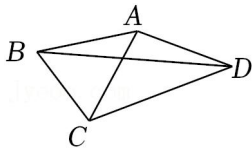
模型二：点圆最值

已知平面内一定点 D 和 $\odot O$ ，点 E 是 $\odot O$ 上一动点，设点 O 与点 D 之间距离为 d， $\odot O$ 半径为 r.

位置关系	点 D 在 $\odot O$ 内	点 D 在 $\odot O$ 上	点 D 在 $\odot O$ 外
图示			
DE 的最大值	$d+r$	$2r$	$d+r$
此时点 E 的位置	连接 DO 并延长交 $\odot O$ 于点 E		
DE 的最小值	$r-d$	0	$d-r$
此时点 E 的位置	连接 OD 并延长交 $\odot O$ 于点 E	点 E 与点 D 重合	连接 OD 交 $\odot O$ 于点 E

满分必练

【典例 1】如图，在四边形 ABCD 中， $AB=AC=AD$ ， $\angle CAD=2\angle BAC$ ，若 $\angle BCD=105^\circ$ ，则 $\angle BDC=$ _____.



【解答】解：以 A 为圆心， AB 为半径画圆，

$$\therefore \angle CAD = 2\angle CBD, \quad \angle BAC = 2\angle BDC,$$

$$\therefore \angle CAD = 2\angle BAC,$$

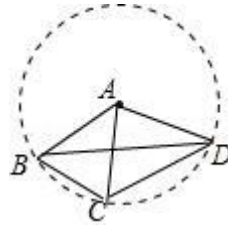
$$\therefore \angle CBD = 2\angle BDC,$$

$$\therefore \angle CBD + \angle BDC + \angle BCD = 180^\circ,$$

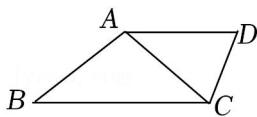
$$\therefore 3\angle CBD + 105^\circ = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle CBD = 25^\circ.$$

故答案为： 25° .

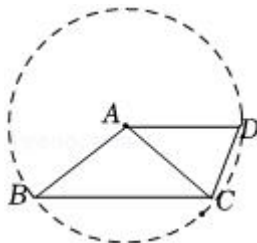


【变式 1-1】如图，在四边形 $ABCD$ 中， $90^\circ < \angle BAD < 180^\circ$ ， $AB = AC = AD$ ，
请画出满足条件时点 C 的轨迹.



【解答】解： $\because AB = AC = AD$,

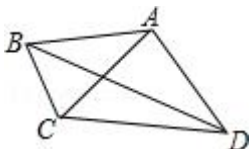
$\therefore$ 点 C 在以 A 为圆心， AB 为半径的圆上运动，



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 中， $90^\circ < \angle BAD < 180^\circ$ ，

$\therefore$ 点 C 的运动轨迹为 $\widehat{BD}$ (不与 B 、 D 重合) .

【变式 1-2】如图，四边形 $ABCD$ 中， $AB = AC = AD$ ，若 $\angle CAD = 76^\circ$ ，则 $\angle CBD =$ ____度.



【答案】38

【解答】解： $\because AB = AC = AD$,

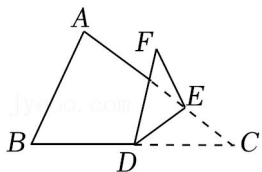
$\therefore$ 点 B ， C ， D 可以看成是以点 A 为圆心， AB 为半径的圆上的三个点，

$\therefore \angle CBD$ 是弧 CD 对的圆周角， $\angle CAD$ 是弧 CD 对的圆心角；

$\therefore \angle CAD = 76^\circ$ ，

$\therefore \angle CBD = \frac{1}{2} \angle CAD = \frac{1}{2} \times 76^\circ = 38^\circ$ 。

【典例 2】如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 是边 BC 的中点，点 E 是边 AC 上的任意一点（点 E 不与点 C 重合），沿 DE 翻折 $\triangle DCE$ 使点 C 落在点 F 处，请画出点 F 的轨迹。



【解答】解： $\because DF = DC$ ，

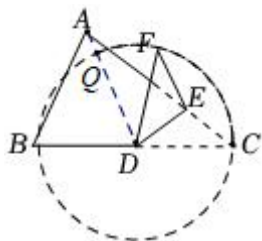
$\therefore$ 则点 F 在以点 D 为圆心 DC 为半径的圆上运动，

当点 E 与 A 重合时， AD 与 $\odot D$ 交于 Q ，

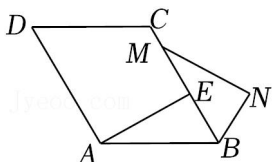
则 $\widehat{CQ}$ 即为点 F 的运动轨迹。

$\angle FDE = \angle CDE = \angle CDA$ ，则轨迹为优弧 MQC ，满足 $\angle MDA = \angle CDA$ ，

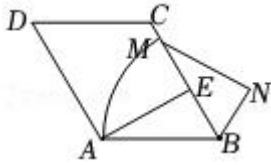
此时点 F 的轨迹为 $\widehat{QBC}$ 。



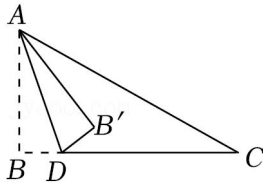
【变式 2-1】如图，在 $\square ABCD$ 中， $AE \perp BC$ 于点 E ，将 $\triangle AEB$ 绕点 B 顺时针旋转，使 AB 与边 BC 重合，得到 $\triangle MNB$ ，请画出在旋转过程中点 M 的运动轨迹。



【解答】解：如图，弧 AM 即为所求。



【变式 2-2】如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC=90^\circ$ ， $AB=4$ ， D 是 BC 边上一动点，将 $\triangle ABD$ 沿 AD 对折，得到 $\triangle AB'D$ ，当点 B' 落在 AC 边上时，点 D 停止运动，若 $AB'=\frac{1}{2}AC$ ，则在点 D 的运动过程中，点 B' 的运动路径长为 _____.



【答案】 $\frac{4}{3}\pi$

【解答】解：由折叠知 $AB'=AB$ ，

$$\because AB'=\frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore AB=\frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore \sin C=\frac{1}{2},$$

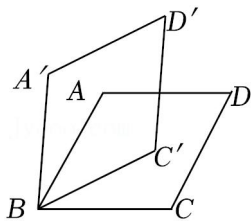
$$\therefore \angle C=30^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC=60^\circ,$$

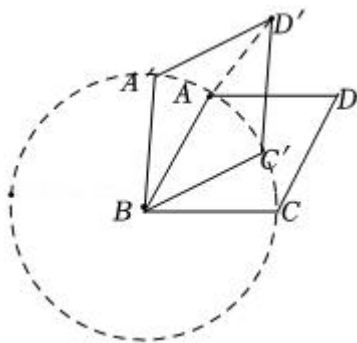
$$\therefore \text{点 } B' \text{ 的运动路径长为 } \frac{60\pi \times 4}{180} = \frac{4}{3}\pi,$$

故答案为： $\frac{4}{3}\pi$

【变式 2-3】如图，在菱形 $ABCD$ 中， $\angle ABC=60^\circ$ ， $BC=3$ ，将菱形 $ABCD$ 绕点 B 逆时针旋转，得到菱形 $A'BC'D'$ ，求出当点 D' 在 BA 的延长线上时，点 C 运动的路径长.



【解答】解：如图，



由旋转的性质可知, $BC=BC'$,

$\therefore$ 点 C' 在以点 B 为圆心, BC 长为半径的圆上运动,

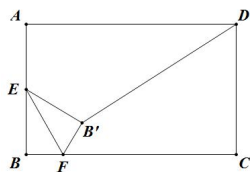
当点 D' 在 BA 的延长线上时, $\angle ABC' = \angle D'BC' = \angle CBC$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle ABC = 60^\circ$,

$\therefore \angle CBC = 30^\circ$, $BC = AB = 3$,

$\therefore$ 点 C' 运动的路径长为 $\frac{30\pi \times 3}{180} = \frac{\pi}{2}$.

【典例 3】 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $AD = 6$, E 是 AB 边的中点, F 是线段 BC 边上的动点, 将 $\triangle EBF$ 沿 EF 所在的直线折叠得到 $\triangle EB'F$, 连接 $B'D$, 求 $B'D$ 的最小值。



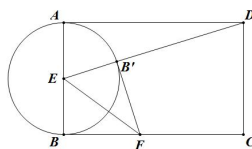
解: 如图, 点 E 为圆心, EB' 为半径作圆,

当点 E , B' , D 三点共线时 $B'D$ 的值最小。

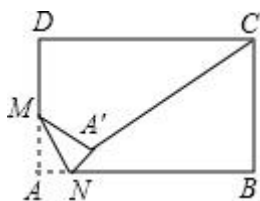
$$\because \angle A = 90^\circ, AE = \frac{1}{2}AB = 2, AD = 6$$

$$\therefore DE = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10},$$

$$\therefore B'D = DE - EB' = 2\sqrt{10} - 2$$



【变式 3-1】 (锦州) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 3$, $BC = 2$, M 是 AD 边的中点, N 是 AB 边上的动点, 将 $\triangle AMN$ 沿 MN 所在直线折叠, 得到 $\triangle A'MN$, 连接 $A'C$, 则 $A'C$ 的最小值是 _____.



【考点】翻折变换（折叠问题）；矩形的性质．版权所有

【解答】解：∵四边形 $ABCD$ 是矩形

$$\therefore AB=CD=3, BC=AD=2,$$

∵ M 是 AD 边的中点，

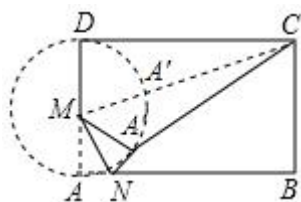
$$\therefore AM=MD=1$$

∵ 将 $\triangle AMN$ 沿 MN 所在直线折叠，

$$\therefore AM=A'M=1$$

∴ 点 A' 在以点 M 为圆心， AM 为半径的圆上，

∴ 如图，当点 A' 在线段 MC 上时， $A'C$ 有最小值，

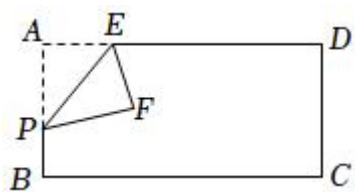


$$\therefore MC = \sqrt{MD^2 + CD^2} = \sqrt{10}$$

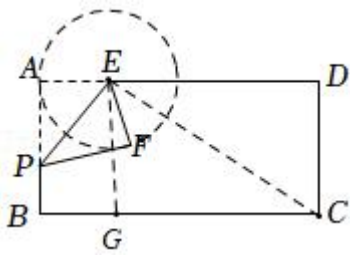
$$\therefore A'C \text{ 的最小值} = MC - MA' = \sqrt{10} - 1$$

故答案为： $\sqrt{10} - 1$

【变式 3-2】如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB=4$ ， $BC=8$ ， P 是直线 AB 上的一个动点， $AE=2$ ， $\triangle APE$ 沿 PE 翻折形成 $\triangle FPE$ ，连接 PF 、 EF ，则 FC 的最小值是 _____，点 F 到线段 BC 的最短距离是 _____。



【解答】解：连接 CE ，作 $EG \perp BC$ 于 G ，



$$\because AE=EF=2,$$

$\therefore$ 点 F 在以 E 为圆心, AE 为半径的圆上运动,

在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中, 由勾股定理得,

$$CE=\sqrt{DE^2+CD^2}=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13},$$

$$\therefore FC \text{ 的最小值为 } CE-2=2\sqrt{13}-2,$$

$$\because \angle DAB=\angle ABC=\angle BGE=90^\circ,$$

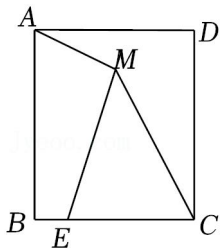
$\therefore$ 四边形 $ABGE$ 是矩形,

$$\therefore EG=AB=4,$$

$\therefore$ 点 F 到线段 BC 的最短距离是 2,

故答案为: $2\sqrt{13}-2, 2$.

【变式 3-3】(2022•武功县模拟) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=6$, $BC=5$, 点 E 在 BC 上, 且 $CE=4BE$, 点 M 为矩形内一动点, 使得 $\angle CME=45^\circ$, 连接 AM , 则线段 AM 的最小值为 _____.



【答案】 $5-2\sqrt{2}$.

【解答】解: 如图, 作 $\triangle EMC$ 的外接圆 $\odot O$, 连接 AO , CO , EO , 作 $OF \perp AB$, $ON \perp BC$,

$$\because BC=5, \text{ 点 } E \text{ 在 } BC \text{ 上, 且 } CE=4BE,$$

$$\therefore BE=1, EC=4,$$

$$\because \angle CME=45^\circ,$$

$$\therefore \angle EOC=90^\circ,$$

$$\therefore OE=OC=2\sqrt{2}, \quad ON=EN=CN=2,$$

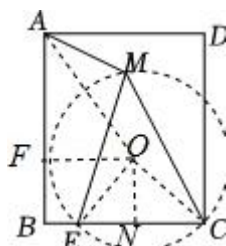
$$\therefore BN=OF=3, \quad AF=6-2=4,$$

$$\text{在 Rt}\triangle AFO \text{ 中, } AO=\sqrt{3^2+4^2}=5,$$

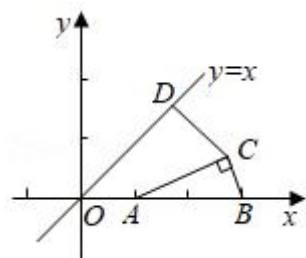
当点 M 是 OA 与 $\odot O$ 的交点时, AM 最小,

$$\therefore AM \text{ 的最小值} = OA - OE = 5 - 2\sqrt{2}.$$

故答案为: $5 - 2\sqrt{2}$.



【典例 4】（邗江区期末）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(1, 0)$ ， $B(3, 0)$ ， C 为平面内的动点，且满足 $\angle ACB=90^\circ$ ， D 为直线 $y=x$ 上的动点，则线段 CD 长的最小值为（ ）



A. 1

B. 2

C. $\sqrt{2}-1$

D. $\sqrt{2}+1$

【解答】解: $\because \angle ACB=90^\circ$,

$\therefore$ 点 C 在以 AB 为直径的圆上,

AB 为直径的圆的圆心为 E 点, 如图,

连接 DE 交 $\odot E$ 于 C' ,

$\because A(1, 0)$, $B(3, 0)$,

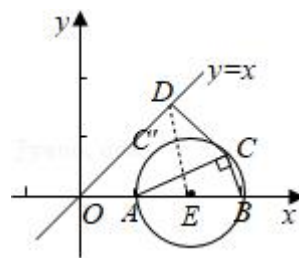
$\therefore AB=2$, $AE=1$,

$\therefore DC \leq DE - CE$ (当且仅当 D 、 C 、 E 共线时取等号)

即 $DC \leq DE - 1$,

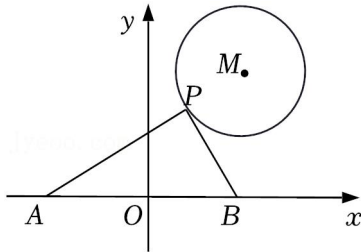
$\because DE \perp$ 直线 $y=x$ 时, DE 最短, DE 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}OE = \sqrt{2}$,

$\therefore$ 线段 CD 长的最小值为 $\sqrt{2}-1$.



故选：C.

【变式 4-1】（武江区校级期末）如图， $\odot M$ 的半径为 4，圆心 M 的坐标为 (5, 12)，点 P 是 $\odot M$ 上的任意一点， $PA \perp PB$ ，且 PA 、 PB 与 x 轴分别交于 A 、 B 两点，若点 A 、点 B 关于原点 O 对称，则 AB 的最小值为 _____.



【解答】解：连接 OP ，

$\because PA \perp PB$ ，

$\therefore \angle APB = 90^\circ$ ，

$\therefore AO = BO$ ，

$\therefore AB = 2PO$ ，

若要使 AB 取得最小值，则 PO 需取得最小值，

连接 OM ，交 $\odot M$ 于点 P' ，当点 P 位于 P' 位置时， OP' 取得最小值，过点 M 作 $MQ \perp x$ 轴于点 Q ，

则 $OQ = 5$ ， $MQ = 12$ ，

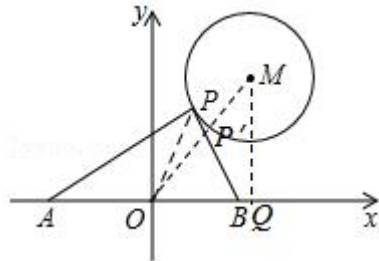
$\therefore OM = 13$ ，

又 $\because MP' = 4$ ，

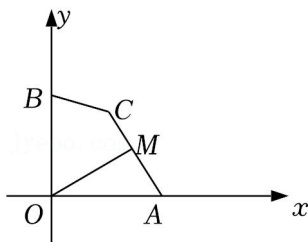
$\therefore OP' = 9$ ，

$\therefore AB = 2OP' = 18$ ，

故答案是：18.



【变式 4-2】（萨尔图区校级期末）如图，点 A 、 B 的坐标分别为 $A(4, 0)$ ， $B(0, 4)$ ， C 为坐标平面内一点， $BC = 2$ ，点 M 为线段 AC 的中点，连接 OM ， OM 的最大值为 _____.



【解答】解：∵ C 为坐标平面内一点， $BC=2$ ，

∴ 点 C 的运动轨迹是在半径为 2 的 $\odot B$ 上，

如图，取 $OD=OA=4$ ，连接 OD ，

∵ 点 M 为线段 AC 的中点，

∴ OM 是 $\triangle ACD$ 的中位线，

$$\therefore OM = \frac{1}{2}CD,$$

∴ OM 最大值时， CD 取最大值，此时 D 、 B 、

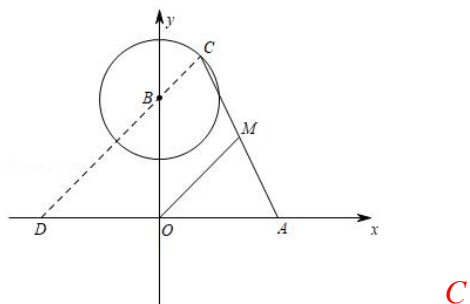
三点共线，

此时在 $\text{Rt}\triangle OBD$ 中， $BD = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ ，

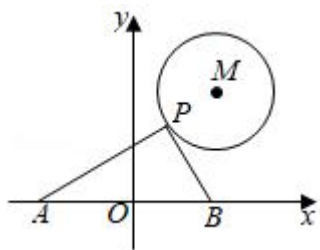
$$\therefore CD = 2 + 4\sqrt{2},$$

$$\therefore OM \text{ 的最大值是 } 1 + 2\sqrt{2}.$$

故答案为： $1 + 2\sqrt{2}$.



【变式 4-3】（2022•鱼峰区模拟）如图， $\odot M$ 的半径为 2，圆心 M 的坐标为（6，8），点 P 是 $\odot M$ 上的任意一点， $PA \perp PB$ ，且 PA 、 PB 与 x 轴分别交于 A 、 B 两点，若点 A 、点 B 关于原点 O 对称，则 AB 的最大值为 _____.



【答案】24

【解答】解：连接 OP ，

$$\because PA \perp PB,$$

$$\therefore \angle APB = 90^\circ,$$

$$\because AO = BO,$$

$$\therefore AB = 2PO,$$

若要使 AB 取得最大值，则 PO 需取得最大值，

连接 OM 并延长交 $\odot M$ 于点 P' ，当点 P 位于 P' 位置时， OP' 取得最大值，

过点 M 作 $MQ \perp x$ 轴于点 Q ，

则 $OQ=6$, $MQ=8$,

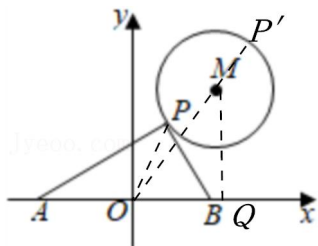
$\therefore OM=10$,

又 $\because MP'=2$,

$\therefore OP'=10+2=12$,

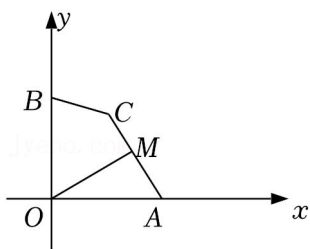
$\therefore AB=2OP'=24$,

故答案为: 24.



【变式 4-4】如图, 点 A, B 的坐标分别为 $A(4, 0)$, $B(0, 4)$, C 为坐标平面内一点,

$BC=2$, 点 M 为线段 AC 的中点, 连接 OM , OM 的最大值为 _____.

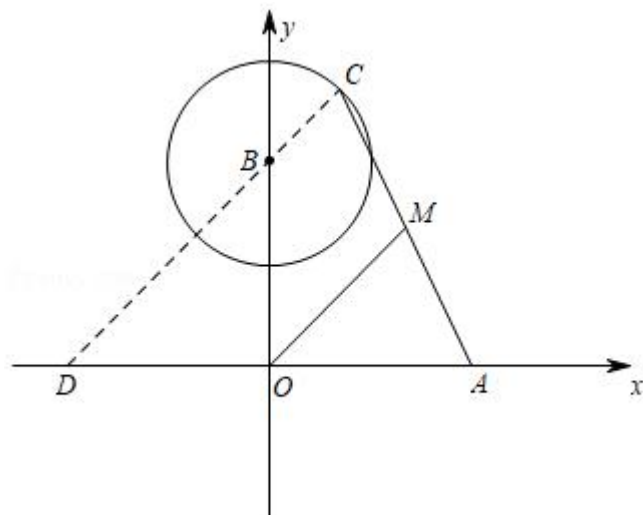


【答案】 $1+2\sqrt{2}$ _

【解答】解: $\because C$ 为坐标平面内一点, $BC=2$,

$\therefore$ 点 C 的运动轨迹是在半径为 2 的 $\odot B$ 上,

如图, 取 $OD=OA=4$, 连接 OD ,



∵点 M 为线段 AC 的中点，

∴ OM 是 $\triangle ACD$ 的中位线，

$$\therefore OM = \frac{1}{2}CD,$$

∴ OM 最大值时， CD 取最大值，此时 D 、 B 、 C 三点共线，

此时在 $\text{Rt}\triangle OBD$ 中， $BD = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ ，

$$\therefore CD = 2 + 4\sqrt{2},$$

$$\therefore OM \text{ 的最大值是 } 1 + 2\sqrt{2}.$$

故答案为： $1 + 2\sqrt{2}$.