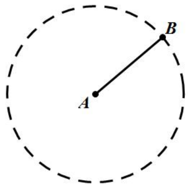
专题2.4　辅助圆定点定长

模型方法

模型一：定点定长作圆

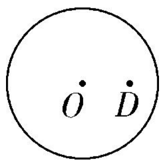
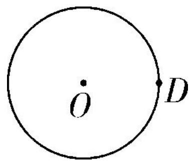
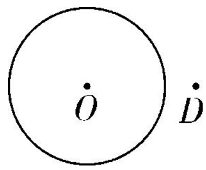
点 A 为定点，点 B 为动点，且 AB 长度固定，

则点 B 的轨迹是以点 A 为圆心，AB 长为半径的圆



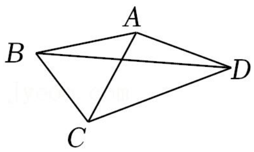
模型二：点圆最值

已知平面内一定点 D 和 O，点 E 是 O 上一动点，设点 O 与点 D 之间距离为 d， O 半径为 r.

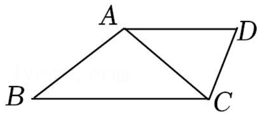
位置关系	点 D 在 O 内	点 D 在 O 上	点 D 在 O 外
图示			
DE 的最大值	$d+r$	$2r$	$d+r$
此时点 E 的位置	连接 DO 并延长交 O 于点 E		
DE 的最小值	$r-d$	0	$d-r$
此时点 E 的位置	连接 OD 并延长交 O 于点 E	点 E 与点 D 重合	连接 OD 交 O 于点 E

【典例1】如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AC=AD$，$\angle CAD=2\angle BAC$，若$\angle$

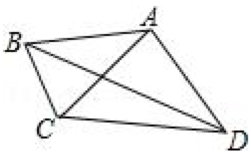
$BCD=105°$，则$\angle BDC=$________.



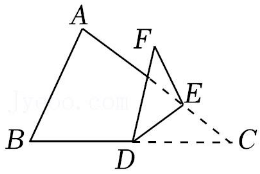
【变式 1-1】如图，在四边形 $ABCD$ 中，$90° < \angle BAD < 180°$，$AB=AC=AD$，请画出满足条件时点 C 的轨迹.



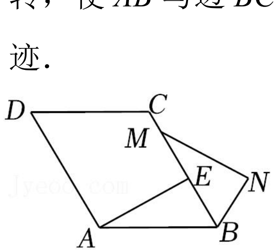
【变式 1-2】如图，四边形 $ABCD$ 中，$AB=AC=AD$，若$\angle CAD=76°$，则$\angle CBD=$____度.



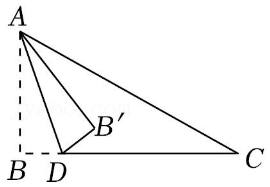
【典例 2】如图，在△ABC 中，点 D 是边 BC 的中点，点 E 是边 AC 上的任意一点（点 E 不与点 C 重合），沿 DE 翻折△DCE 使点 C 落在点 F 处，请画出点 F 的轨迹.



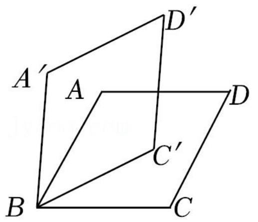
【变式 2-1】如图，在▱$ABCD$ 中，$AE\perp BC$ 于点 E，将△AEB 绕点 B 顺时针旋转，使 AB 与边 BC 重合，得到△MNB，请画出在旋转过程中点 M 的运动轨迹.



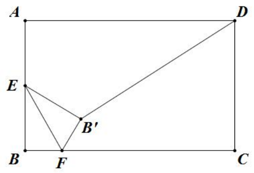
【变式 2-2】如图，在 Rt△*ABC* 中，∠*ABC*＝90°，*AB*＝4，*D* 是 *BC* 边上一动点，将△*ABD* 沿 *AD* 对折，得到△*AB'D*，当点 *B'*落在 *AC* 边上时，点 *D* 停止运动，若 $AB'=\frac{1}{2}AC$，则在点 *D* 的运动过程中，点 *B'*的运动路径长为 ______.



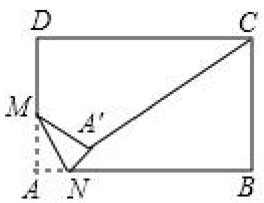
【变式 2-3】如图，在菱形 *ABCD* 中，∠*ABC*＝60°，*BC*＝3，将菱形 *ABCD* 绕点 *B* 逆时针旋转，得到菱形 *A'BC'D'*，求出当点 *D'*在 *BA* 的延长线上时，点 *C'*运动的路径长.



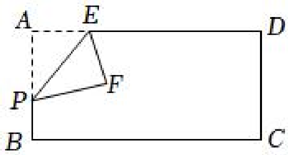
【典例 3】如图，在矩形 ABCD 中，$AB=4$，$AD=6$，E 是 AB 边的中点，F 是线面 BC 边上的动点，将 ΔEBF 沿 EF 所在的直线折叠得到 $\Delta EB'F$，连接 $B'D$，求 $B'D$ 的最小值。



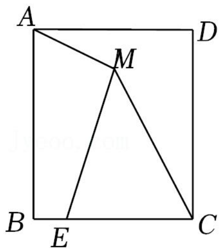
【变式 3-1】（锦州）如图，在矩形 *ABCD* 中，*AB*＝3，*BC*＝2，*M* 是 *AD* 边的中点，*N* 是 *AB* 边上的动点，将△*AMN* 沿 *MN* 所在直线折叠，得到△*A*′*MN*，连接 *A*′*C*，则 *A*′*C* 的最小值是 ______.



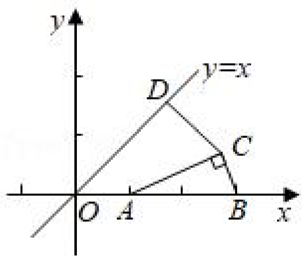
【变式 3-2】如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=8$，P 是直线 AB 上的一个动点，$AE=2$，$\triangle APE$ 沿 PE 翻折形成$\triangle FPE$，连接 PF、EF，则 FC 的最小值是 ________，点 F 到线段 BC 的最短距离是 _____.



【变式 3-3】（2022•武功县模拟）如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$BC=5$，点 E 在 BC 上，且 $CE=4BE$，点 M 为矩形内一动点，使得$\angle CME=45^\circ$，连接 AM，则线段 AM 的最小值为 ______.

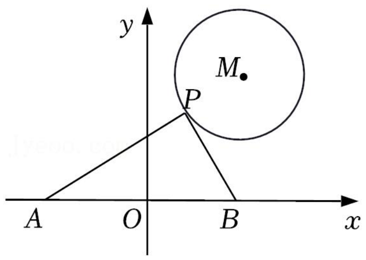


【典例 4】（邗江区期末）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 A（1，0），B（3，0），C 为平面内的动点，且满足$\angle ACB=90^\circ$，D 为直线 $y=x$ 上的动点，则线段 CD 长的最小值为（　　）

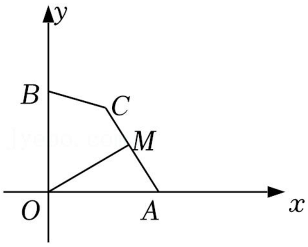


A．1　　　　B．2　　　　C．$\sqrt{2}-1$　　　　D．$\sqrt{2}+1$

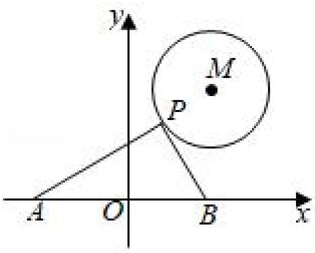
【变式 4-1】（武江区校级期末）如图，⊙M 的半径为 4，圆心 M 的坐标为（5，12），点 P 是⊙M 上的任意一点，$PA\perp PB$，且 PA、PB 与 x 轴分别交于 A、B 两点，若点 A、点 B 关于原点 O 对称，则 AB 的最小值为 _____.



【变式 4-2】（萨尔图区校级期末）如图，点 A，B 的坐标分别为 A（4，0），B（0，4），C 为坐标平面内一点，$BC=2$，点 M 为线段 AC 的中点，连接 OM，OM 的最大值为 ______.



【变式 4-3】（2022•鱼峰区模拟）如图，⊙M 的半径为 2，圆心 M 的坐标为（6，8），点 P 是⊙M 上的任意一点，$PA\perp PB$，且 PA、PB 与 x 轴分别交于 A、B 两点，若点 A、点 B 关于原点 O 对称，则 AB 的最大值为 _______.



【变式 4-4】如图，点 A，B 的坐标分别为 A（4，0），B（0，4），C 为坐标平面内一点，$BC=2$，点 M 为线段 AC 的中点，连接 OM，OM 的最大值为 ______.