江苏省无锡市无锡金桥双语实验学校2022-2023学年九年级上学期期中数学试题

（考试时间：120分钟 满分：150分）

一、选择题（本大题共有10小题，每小题3分，共30分，在每小题所给出的四个选项中，只有一项是正确的)

1．下列方程是一元二次方程的是（　　）

A．$x-2=0$　　B．$xy+1=0$　　C．$x^2-\frac{1}{x}-3=0$　　D．$x^2-4x-1=0$

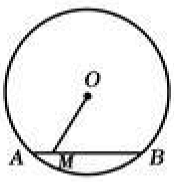
2．若x：（$x+y$）＝3：5，则x：y＝（　　）

A．$\frac{3}{2}$　　B．$\frac{3}{8}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{8}{5}$

3．若⊙P的半径为4，圆心P的坐标为（-3，4），则平面直角坐标系的原点O与⊙P的位置关系是（　　）

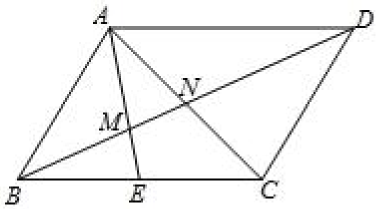
A．在⊙P内　　B．在⊙P上　　C．在⊙P外　　D．无法确定

4. 如图，⊙O的弦AB=6，M是AB上任意一点，且OM最小值为4，⊙O的半径为（　　）



A．5　　B．4　　C．3　　D．2

5．如图，在▱$ABCD$中，E为BC的中点，连接AE、AC，分别交BD于M、N，则BM：DN等于（　　）



A．1：2　　B．1：3　　C．2：3　　D．3：4

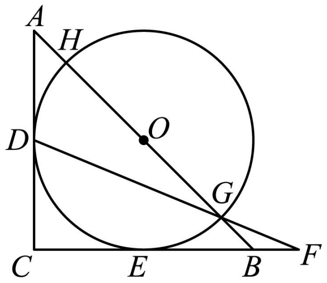
6．以下命题：①经过三点一定可以作一个圆； ②优弧一定大于劣弧；③等弧所对的圆周角相等； ④平分弦的直径垂直于弦；其中正确的个数是（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

7．已知a，b是关于x的一元二次方程$x^2+(2m+3)x+m^2=0$的两个不相等的实数根，且满足$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=-1$，则$m$的值是（　　）

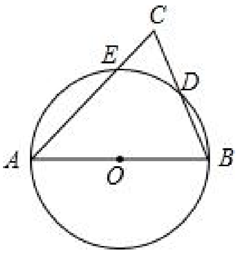
A．﹣3或1　　　　B．3或﹣1　　　　C．3　　　　D．1

8．如图，$\triangle ABC$是等腰直角三角形，$AC=BC=2$，以斜边AB上的点O为圆心的圆分别与AC，BC相切于点D，E，与AB分别交于点G，H，且DG的延长线和CB的延长线交于点F，则CF的长为（　　）



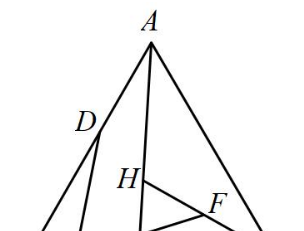
A．1　　　　B．$2\sqrt{2}+1$　　　　C．$1+\sqrt{2}$　　　　D．$2+\sqrt{2}$

9．如图，AB为⊙O的直径，AC交⊙O于E点，BC交⊙O于D点，$CD=BD$，$\angle C=70°$，现给出以下四个结论：①$\angle A=45°$；②$AC=AB$；③$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$；④$2CE\cdot AB=BC^2$，其中正确结论有（　　）



A．1个　　　　B．2个　　　　C．3个　　　　D．4个

10．如图，等边$\triangle ABC$中，D、E分别在AB、BC边上，且$AD=2BE=6$，将DE绕点E顺时针旋转$60°$，得到EF，取EF中点G，连接AG，延长CF交AG于点H．若$2AH=5HG$，则BD长是(　　)



A．$3\sqrt{2}$　　　　B．9　　　　C．$2\sqrt{2}$　　　　D．3

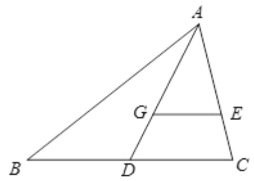
二、填空题（本大题共有 8 小题，每小题 3 分，共 24 分，不需写出解答过程，请把答案直接填写在横线上）．

11．若关于 x 的一元二次方程 $x^2-4x=0$ 的根是__________．

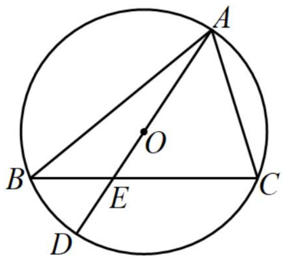
12．在一张比例尺为 1∶200000 的地图上，A、B 两地间的图上距离为 3 厘米，则两地间的实际距离是_________千米．

13．某厂一月份生产某机器 100 台，计划三月份生产 144 台．设二、三月份每月的平均增长率相同，则二、三月份每月的平均增长率为_______．

14．如图，点 G 是△ABC 的重心，AG 的延长线交 BC 于点 D，过点 G 作 $GE // BC$ 交 AC 于点 E，如果 BC＝12，那么线段 GE 的长为_______．

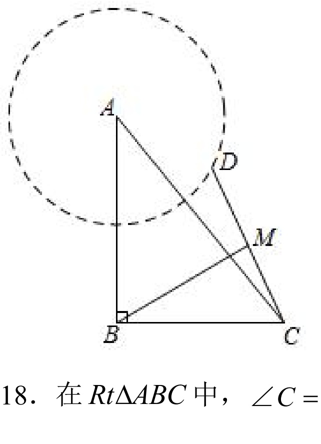


15．如图，$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，$AB=BC$，直径 AD 交 BC 于点 E，若 $\angle B=40^\circ$，则 $\angle AEC$ 的度数为 ___°．



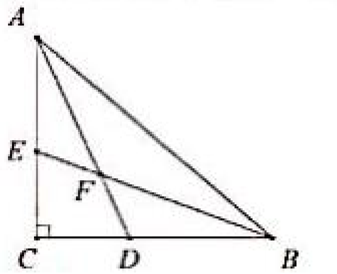
16．已知：m2﹣2m﹣1=0，n2+2n﹣1=0 且 mn≠1，则 $\dfrac{mn+n+1}{n}$ 的值为_____．

17．如图，在 Rt△ABC 中，∠ABC＝90°，AB＝12，BC＝5，点 D 是半径为 4 的⊙A 上一动点，点 M 是 CD 的中点，则 BM 的取值范围是______．



18．在 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，AD 平分 $\angle CAB$，BE 平分 $\angle ABC$，AD、BE 相交于点 F，

且 $AF=4, EF=\sqrt{2}$，则 $AC=$__________.



三、解答题（本大题共有10小题，共96分，解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

19．解下列方程：

(1) $2x^2-5x+1=0$（配方法）

(2) $\left(x+2\right)^2=3x+6$

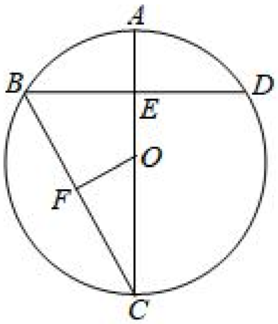
(3) $x^2+4x+2=0$（用公式法）

(4) $\left(x+2\right)^2-10\left(x+2\right)+25=0$

20．如图，AC 是⊙O 的直径，弦 $BD\perp AO$ 于 E，连接 BC，过点 O 作 $OF\perp BC$ 于 F，若 $BD=8$cm，$AE=2$cm，

（1）求⊙O 的半径；

（2）求 O 到弦 BC 的距离．



21．（1）如图1，网格中每个小正方形的边长为1，点A，B 均在格点上．请借助网格，仅用无刻度的直尺在 AB 上作出点 P，使 $AP=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$．

（2）⊙O 为 $\triangle ABC$ 的外接圆，请仅用无刻度的直尺，依下列条件分别在图2，图3的圆中画出一条弦，使这条弦将 $\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分（保留作图痕迹，不写作法，请下结论注明你所画的弦）．

①如图2，$AC=BC$；②如图3，P 为圆上一点，直线 $l\perp OP$ 且 $l\parallel BC$．

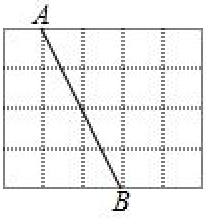


图1

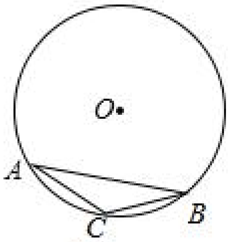


图2

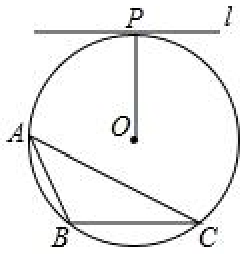


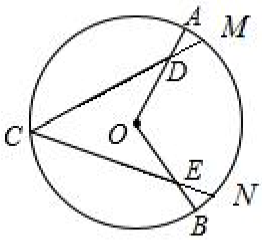
图3

22．已知关于 x 的方程：（k－2）x^2－kx＋2＝0．

（1）若该方程有一个根是 2，求该方程的另一个根；

（2）证明：无论 k 取何值，该方程总有实数根．

23. 如图,在⊙O 中,点 C 是优弧 ACB 的中点,D、E 分别是 OA、OB 上的点,且 AD=BE,弦 CM、CN 分别过点 D、E.



(1)求证：CD=CE．

(2)求证：$\widehat{AM}=\widehat{BN}$．

24．如图 1，$\triangle ABC$ 中，BD，CE 是 $\triangle ABC$ 的高．

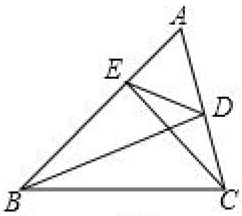


图1

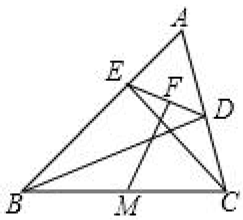
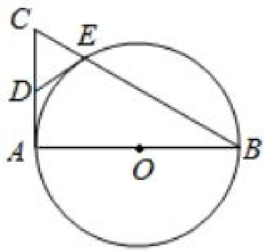


图2

(1)V ADE 与 $\triangle ABC$ 相似吗？为什么？

(2)如图 2，若 $\frac{BD}{AB}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，$DE=12$，$DE$ 的中点为 F，BC 的中点为 M，连接 FM，求 FM 的长．

25．如图，AB 是⊙O 的直径，AC 是⊙O 的切线，BC 交⊙O 于点 E．



（1）若 D 为 AC 的中点，证明：DE 是⊙O 的切线；

（2）若 $CA=6$，$CE=3.6$，求⊙O 的半径 OA 的长．

26．“新冠”疫情蔓延全球，口罩成了人们的生活必需品．某药店销售普通口罩和 $N95$ 口罩，今年 8 月份的进价如表：

	普通口罩	$N95$ 口罩
进价（元/包）	8	20

(1)计划 $N95$ 口罩每包售价比普通口罩贵16元，7 包普通口罩和 3 包 $N95$ 口罩总售价相同，求普通口罩和 $N95$ 口罩每包售价；

(2)按（1）中售价销售一段时间后，发现普通罩的日均销售量为 120 包，当每包售价降价 0.5 元时，日均销售量增加 10 包．该药店秉承让利于民的原则，对普通口罩进行降价销售，但要保证当天的利润为320元，求此时普通口罩每包售价；

(3)疫情期间，该药店进货 2 万包 $N95$ 口罩，进价不变，店长向当地医院捐赠了 a 包 $(6000\le a\le 7000)$ 该款口罩，剩余的 $N95$ 口罩向市民销售．若这 2 万包口罩的利润率等于 10%，则 $N95$ 口罩每包售价是________元．(直接写出答案，售价为整数元)

27．若一个三角形一条边的平方等于另两条边的乘积，我们把这个三角形叫做比例三角形．

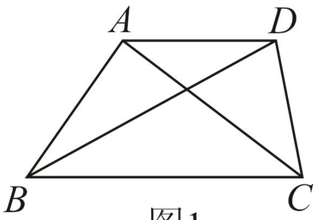


图1

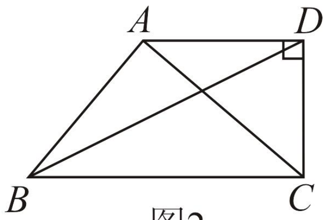


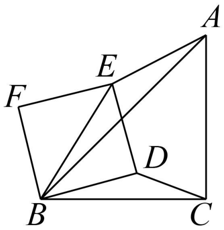
图2

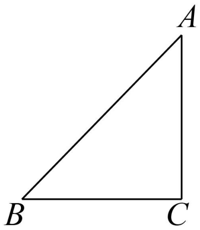
⑴已知△ABC是比例三角形，$AB=2$，$BC=3$，请直接写出所有满足条件的 AC 的长；

⑵如图 1，在四边形 ABCD 中，$AD//BC$，对角线 BD 平分∠ABC，∠BAC＝∠ADC.求证：△ABC是比例三角形．

(3) 如图 2，在(2)的条件下，当$\angle ADC=90^{\circ}$时，求$\frac{BD}{AC}$的值．

28．如图，在$Rt\triangle ABC$中，$AC=BC=4$，$\angle ACB=90^{\circ}$，正方形$BDEF$的边长为 2，将正方形$BDEF$绕点B旋转一周，连接AE、BE、CD．





备用图

(1)请找出图中与$\triangle ABE$相似的三角形，并说明理由；

(2)求当A、E、F三点在一直线上时CD的长；

(3)设AE的中点为M，连接FM，试求FM长的取值范围．

1．D

【分析】

一元二次方程有三个特点：①只含有一个未知数；②未知数的最高次数是 2；③是整式方程．

【详解】

解：A．$x-2=0$是一元一次方程，故不符合题意；

B．$xy+1=0$含有 2 个未知数，故不符合题意；

C．$x^2-\frac{1}{x}-3=0$ 是分式方程，故不符合题意；

D．$x^2-4x-1=0$是一元二次方程，故符合题意；

故选 D．

【点睛】

本题考查了一元二次方程的定义，方程的两边都是整式，只含有一个未知数，并且整理后未知数的最高次数都是 2，掌握一元二次方程的定义是解题关键．

2．A

【分析】

由比例的基本性质，把比例式转换为等积式后，能用其中一个字母表示另一个字母，达到约分的目的即可．

【详解】

解：由$\frac{x}{x+y}=\frac{3}{5}$得 $5x=3x+3y$，即 $2x=3y$，

所以$\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$．

故选：A．

【点睛】

本题主要考查了比例的性质，关键是掌握内项之积等于外项之积．

3．C

【分析】

首先求得点 O 与圆心 P 之间的距离，然后和圆的半径比较即可得到点 O 与圆的位置关系．

【详解】

由勾股定理得：$OP^2=3^2+4^2=25$，

∴OP=5

∵圆 O 的半径为 4，

∴点 O 在圆 P 外．

故选：C．

【点睛】

本题考查了点与圆的位置关系，求出点到圆心的距离是解决本题的关键．

4．A

【分析】

当 OM⊥AB 时值最小．根据垂径定理和勾股定理求解．

【详解】

解：根据直线外一点到直线的线段中，垂线段最短，知：当 OM⊥AB 时，为最小值 4，

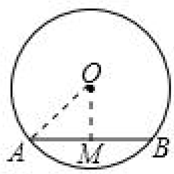
连接 OA，

根据垂径定理，得：BM=$\frac{1}{2}$AB=3，

根据勾股定理，得：OA=$\sqrt{3^2+4^2}$=5，

即⊙O 的半径为 5．

故选：A．



【点睛】

本题考查了垂径定理，主要运用了垂径定理、勾股定理求得半径．特别注意能够分析出 OM 的最小值．

5．C

【分析】

由▱ABCD，推出 AD∥BE，BN=ND，进而推得△ADM∽△EBM，根据相似三角形的性质和 E 为 BC 的中点可证得 $\frac{BM}{MD}=\frac{1}{2}$，即可证得结论．

【详解】

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴AD∥BE，$AD=BC$，$BN=ND$，

∴△ADM∽△EBM，

∴$\frac{BM}{MD}=\frac{BE}{AD}$，

∵E 为 BC 的中点，

∴$BE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD$，

∴$\frac{BM}{MD}=\frac{1}{2}$，

设 BM=1，则 MD=2，BD=3，

∴$DN=\frac{3}{2}$，

∴$\frac{BM}{DN}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$，

故选 C．

【点睛】

本题考查的知识点是相似三角形的判定与性质, 平行四边形的性质，解题关键是证得 $\frac{BM}{MD}=\frac{1}{2}$.

6．B

【分析】

根据确定圆的条件，弧的概念，圆周角定理，垂径定理，逐项分析判断，从而可以解答本题．

【详解】

解：经过同一条直线的三个点，不可以作一个圆，故命题①错误；

不同圆的优弧就不一定大于劣弧，故命题②错误；

等弧所对的圆周角相等，故命题③正确；

平分非直径的弦的直径垂直于弦，故命题④错误；

故选：B．

【点睛】

本题考查了命题和定理，解答本题的关键掌握确定圆的条件，弧的概念，圆周角定理，垂径定理．

7．C

【分析】

根据一元二次方程根与系数的关系，计算出$a+b,ab$再代入分式计算，即可求得m.

【详解】

解：由根与系数的关系得： $a+b=-(2m+3),ab=m^2$，

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=-1$，

即$2m+3=m^2$，

解得：$m=3$或$m=-1$，

而当$m=-1$时，原方程$\Delta=(2m+3)^2-4m^2=1-4=-3<0$，无实数根，不符合题意，应舍去，

$\therefore$ $m=3$

故选C.

【点睛】

本题考查一元二次方程中根与系数的关系应用，求得结果后需进行检验是顺利解题的关键.

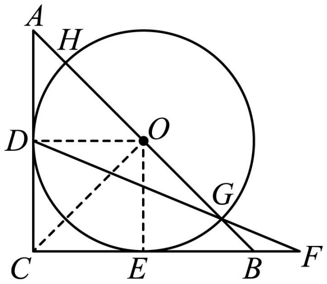
8．C

【分析】

连接CO，DO，EO，证明点O是AB的中点，进而求得BG的长，证明$\angle F=\angle BGF$，可得$BF=BG$，进而即可求解.

【详解】

解：如图，连接CO，DO，EO，



$\because$ $\triangle ABC$是等腰直角三角形，$AC=BC=2$，

$\therefore$ $AB=2\sqrt{2}$，$\angle A=45°$，

$\therefore$ $\triangle ADO$是等腰直角三角形，

$\therefore$ $AD=DO$，

$\because$ AC，BC是$\odot O$的切线，

$\therefore$ $OD\perp AC$，$OE\perp BC$，

又$\angle C=90°$，

∴四边形$CDOE$是矩形，

∵$OD=OE$，

∴四边形$CDOE$是正方形，

∴$\triangle COD$是等腰直角三角形，

∴$\angle AOD+\angle COD=90^\circ$，

∴$CO\perp AB$，

∴O是AB的中点，则$BO=AO=\sqrt{2}$，

∴$DO=\frac{\sqrt{2}}{2}AO=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}=1$，

∴$BG=OB-OG=\sqrt{2}-1$，

∵$DO\parallel BC$，，

∴$\angle F=\angle ODG$，

又$OD=OG$，

∴$\angle ODG=\angle OGD$

∵$\angle OGD=\angle FGB$，，

∴$\angle FGB=\angle F$，

∴$BG=BF=\sqrt{2}-1$，

∴$CF=CB+BF=2+\sqrt{2}-1=1+\sqrt{2}$.

故选：C．

【点睛】

本题考查了切线的性质，勾股定理，等腰直角三角形的性质，等比角对等边，正方形的性质与判定，求得$BG=BF=\sqrt{2}-1$是解题的关键．

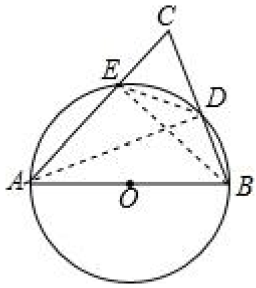
9．B

【分析】

连结AD、BE，DE，如图，根据圆周角定理得∠ADB=90°，则AD⊥BC，加上CD=BD，根据等腰三角形的判定即可得到$AC=AB$；再根据等腰三角形的性质和三角形内角和定理可计算出∠BAC=40°；由AB为直径得到∠AEB=90°，则∠ABE=50°，根据圆周角定理可判断$\overset{\frown}{AE}\neq\overset{\frown}{BE}$；接着证明△CED∽△CBA，利用相似比得到$\frac{CD}{AC}=\frac{CE}{BC}$，然后利用等线段代换即可判断④．

【详解】

解：连接AD，



∵AB是⊙O的直径，

∴∠ADB=90°.

∵CD=BD，

∴AD是BC的垂直平分线，

∴AC=AB，故②正确；

∵AC=AB，

∴∠ABC=∠C=70°，

∴∠BAC=40°，故①错误；

连接BE，DE，

∵AB为⊙O的直径，

∴∠AEB=90°，

∵∠BAC=40°，

∴∠ABE=50°，

∴∠BAC≠∠ABE，

∴AE≠BE，

∴$\overset{\frown}{AE} \neq \overset{\frown}{BE}$，故③错误；

∵四边形ABDE是圆内接四边形，

∴∠CDE=∠CAB，

∴△CDE∽△CAB，

∴$\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{CE}{BC}$，

∴CE•AC=CD·BC，

∴CE•AB=$\frac{1}{2}$BC·BC，

∴$2CE \cdot AB = BC^2$，故④正确.

故选 B．

【点睛】

本题考查了相似三角形的判定和性质，圆周角定理，根据题意作出辅助线，构造出圆周角是解题的关键．

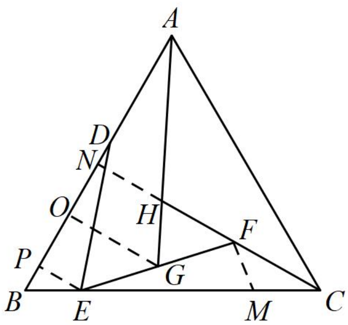
10．B

【分析】

在BC上截取$CM=BE=2$，连接FM，证明$\triangle BDE\cong\triangle MEF\left(SAS\right)$，延长$CH$交$AB$于$N$，作$GO\perp AB$于$O$，$EP\perp AB$于$P$，得出$CN\parallel GO\parallel EP$，根据已知条件得出$ON=\frac{2}{5}AN$，$NP=\frac{4}{5}AN=\frac{4}{5}BN$，继而根据含 30 度角的直角三角形的性质，求得$BP=\frac{3}{2}$，求得$BN=AN=\frac{15}{2}$，根据$AB=2BN=15$，再利用$BD=AB-AD$进行计算即可．

【详解】

解：在BC上截取$CM=BE=2$，连接FM，



∵ $\triangle ABC$为等边三角形，

∴ $AB=BC$，$\angle B=60°$，$AD=2BE=BE+CM$，

∴ $BD=EM$，

∵将线段DE绕点E顺时针旋转$60°$，得到线段EF，

∴ $\angle DEF=60°$，$ED=EF$，

∴ $\angle DEB+\angle MEF=120°$，

而$\angle DEB+\angle BDE=120°$，

∴ $\angle BDE=\angle MEF$，

在$\triangle BDE$和$\triangle MEF$中，

$\begin{cases} BD = ME \\ \angle BDE = \angle MEF \\ DE = EF \end{cases}$，

$\therefore \triangle BDE \cong \triangle MEF\left(SAS\right)$，

$\therefore \angle B = \angle EMF = 60°$，$BE = FM$，

$\therefore MF = CM$，

$\therefore \angle MCF = \angle MFC = \frac{1}{2}\angle EMF = 30°$，

$\therefore CH$ 平分 $\angle ACB$；

延长CH 交 AB 于 N，作 $GO \perp AB$ 于 O， $EP \perp AB$ 于 P，

$\because CH$ 平分 $\angle ACB$

$\therefore CN$ 垂直平分 AB， $AN = BN$，

$\therefore CN \parallel GO \parallel EP$

$\therefore \frac{AN}{NO} = \frac{AH}{HG} = \frac{5}{2}$，即 $ON = \frac{2}{5}AN$，

$\because G$ 点为 EF 的中点，

$\therefore EG = GF$，

$\therefore \frac{NO}{OP} = \frac{FG}{EG} = 1$，

即 $NO = OP$，

$\therefore NP = \frac{4}{5}AN = \frac{4}{5}BN$，

$\therefore BP = BN - NP = BN - \frac{4}{5}BN = \frac{1}{5}BN$，

$\because PE // CN$，

$\therefore \angle BEP = \angle NCB = 30°$，

$\therefore BP = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}\times 3 = \frac{3}{2}$，

$\therefore BN = AN = \frac{15}{2}$，

$\therefore AB = 2BN = 15$，

$\therefore BD = AB - AD = 15 - 6 = 9$．

故选：B．

【点睛】

本题考查了旋转的的性质，等边三角形的性质和平行线分线段成比例定理，全等三角形的判定与性质，正确的添加辅助线是解题的关键

11． $x_1=0,x_2=4$

【分析】

根据因式分解法解一元二次方程即可求解．

【详解】

解：$x^2-4x=0$

$x\left(x-4\right)=0$，

解得 $x_1=0,x_2=4$，

故答案为：$x_1=0,x_2=4$．

【点睛】

本题考查了解一元二次方程，掌握解一元二次方程的方法是解题的关键．

12．6

【分析】

由比例尺的定义：图上距离与实际距离的比叫做比例尺建立等量关系，解这个一元一次方程就可以求出实际距离．

【详解】

解：设两地间的实际距离是 x 厘米

根据题意得，$\frac{3}{x}=\frac{1}{200000}$

$\therefore x=600000$

600000 厘米=6 千米

答：A，B 两地间的实际距离是 6 千米．

故答案为：6．

【点睛】

此题主要考查图上距离、实际距离和比例尺的关系，解答时要注意单位的换算．

13．20％

【分析】

根据一元二次方程的增长率问题公式列出方程，解方程即可得到结论．

【详解】

解：设二、三月份每月的平均增长率为x，根据题意得

100（1+x）^{2}=144，

（1+x）^{2}=1.44，

1+x=±1.2

解得 x_1=0.2，x_2=-2.2（舍）

答：二、三月份每月的平均增长率为20%；

故答案为：20%．

【点睛】

本题考查实际问题与一元二次方程中的增长率问题，找到等量关系列方程是解题的关键．

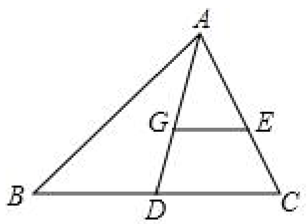
14．4

【分析】

由点G是△ABC重心，$BC=12$，可得 CD = 6，AG：AD=2：3，又由GE∥BC，可证得△AEG∽△ACD，然后由相似三角形的对应边成比例，即可求得线段GE的长．

【详解】

解：∵点G是△ABC重心，$BC=12$，



∴$\text{CD}=\frac{1}{2}BC=6$，$\frac{AG}{GD}=2$，

∵GE∥BC，

∴△AEG∽△ACD，

∴ $\frac{GE}{CD}=\frac{AG}{AD}=\frac{2}{3}$，

∴GE = 4，

故答案为：4．

【点睛】

此题考查了相似三角形的判定与性质以及三角形重心的性质．解题时注意：重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为2：1．

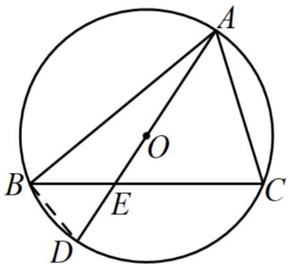
15．60

【分析】

连接BD，根据直径所对的圆周角是直角，以及同弧所对的圆周角相等得出$\angle DCA=\angle DBC=50^\circ$，进而根据等边对等角以及三角形内角和定理求得$\angle ACB=70^\circ$，即可求解.

【详解】

解：如图，连接BD，



∵ AD是$\odot O$的直径，

∴ Đ$ABD=$ 90°

∵ $\angle B=40^\circ$，

∴ $\angle DBC=50^\circ$

∵ $\overset{\frown}{DC}=\overset{\frown}{DC}$

∴ $\angle DCA=\angle DBC=50^\circ$

∵ $\angle B=40^\circ$，$AB=BC$，

∴ $\angle ACB=\frac{1}{2}\left(180^\circ-40^\circ\right)=70^\circ$

∴ $\angle AEC=180^\circ-\angle EAC-\angle CE=180^\circ-50^\circ-70^\circ=60^\circ$

故答案为：60

【点睛】

本题考查了直径所对的圆周角等于90度，同弧所对的圆周角相等，等边对等角，三角形内角和定理，掌握以上知识是解题的关键.

16．3

【分析】

将 $n^2+2n-1=0$ 变形为$\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}-1=0$.据此可得 m，$\frac{1}{n}$是方程 $x^2-2x-1=0$ 的两根，由一元二次方程的根与系数的关系可得 m+$\frac{1}{n}$=2，代入$\frac{mn+n+1}{n}=m+1+\frac{1}{n}$可得.

【详解】

由 $n^2+2n-1=0$ 可知 $n\neq0$．

∴$1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}=0$．

∴$\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}-1=0$，

又 $m^2-2m-1=0$，且 $mn\neq1$，即 $m\neq\frac{1}{n}$．

∴m，$\frac{1}{n}$是方程 $x^2-2x-1=0$ 的两根．

∴$m+\frac{1}{n}=2$．

∴$\frac{mn+n+1}{n}=m+1+\frac{1}{n}=2+1=3$，

故答案为 3．

【点睛】

本题主要考查根与系数的关系，解题的关键是将方程变形后得出 m，$\frac{1}{n}$是方程 $x^2-2x-1=0$ 的两根．

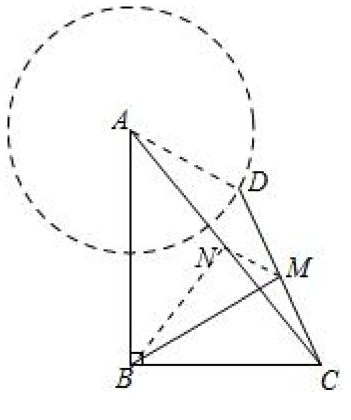
17．$4.5\le BM\le8.5$

【分析】

取 AC 的中点 N，连接 MN，BN．利用直角三角形斜边中线的性质，三角形的中位线定理求出 BN，MN，再利用三角形的三边关系即可解决问题．

【详解】

解：如图，取 AC 的中点 N，连接 MN，BN．



∵∠ABC＝90°，AB＝12，BC＝5，

∴AC＝$\sqrt{12^2+5^2}$＝13，

∵AN＝NC，

∴BN＝$\frac{1}{2}$AC＝6.5，

∵AN＝NC，DM＝MC，

∴MN＝$\frac{1}{2}$AD＝2，

∴BN﹣MN≤BM≤BN+NM，

∴6.5﹣2≤BM≤6.5+2，

∴4.5≤BM≤8.5，

故答案为：4.5≤BM≤8.5．

【点睛】

本题考查直角三角形斜边的中线的性质，三角形的中位线定理，三角形的三边关系等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，属于中考常考题型．

18．$\frac{8\sqrt{10}}{5}$

【详解】

【分析】由已知易得∠AFE=45°，过E作EG⊥AD，垂足为G，根据已知易得EG=FG=1，再根据勾股定理可得AE=$\sqrt{10}$，过F分别作FH⊥AC垂足为H，FM⊥BC垂足为M，FN⊥AB垂足为N，易得CH=FH，根据勾股定理可求出a=$\frac{\sqrt{10}}{5}$，继而可得CH=$\frac{2\sqrt{10}}{5}$，由AC=AE+EH+HC即可求得.

【详解】如图，∵AD、BE分别平分∠CAB和∠CBA，

∴∠1=∠2，∠3=∠4，

∵∠C=90°，∴∠2+∠3=45°，∴∠AFE=45°，

过E作EG⊥AD，垂足为G，

在Rt△EFG中，∠EFG=45°，EF=$\sqrt{2}$，∴EG=FG=1，

在Rt△AEG中，AG=AF-FG=4-1=3，∴AE=$\sqrt{AG^2+EG^2}=\sqrt{10}$，

过F分别作FH⊥AC垂足为H， FM⊥BC垂足为M，FN⊥AB垂足为N，易得CH=FH，

设EH=a，则$FH^2=EF^2-EH^2=2-a^2$，

在Rt△AHF中，$AH^2+HF^2=AF^2$，

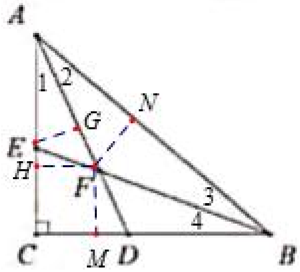
即$\left(\sqrt{10}+a\right)^2+2-a^2=16$，

$\therefore a=\frac{\sqrt{10}}{5}$，

$\therefore CH=FH=\frac{2\sqrt{10}}{5}$，

$\therefore AC=AE+EH+HC=\frac{8\sqrt{10}}{5}$，

故答案为$\frac{8\sqrt{10}}{5}$.



【点睛】本题考查了角平分线的性质，勾股定理的应用等，综合性质较强，正确添加辅助线是解题的关键.

19．(1) $x_1=\frac{5-\sqrt{17}}{4},x_2=\frac{5+\sqrt{17}}{4}$

(2) $x_1=-2,x_2=1$

(3) $x_1=-2+\sqrt{2},x_2=-2-\sqrt{2}$

(4) $x_1=x_2=3$

【分析】

（1）根据配方法解一元二次方程；

（2）利用因式分解法解一元二次方程；

（3）根据公式法解一元二次方程；

（4）将$\left(x+2\right)$看作整体，利用因式分解法解一元二次方程，即可求解.

【详解】

（1）$2x^2-5x+1=0$，

$x^2-\frac{5}{2}x=-\frac{1}{2}$，

$x^2-\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}=\frac{25}{16}-\frac{8}{16}$，

$\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{17}{16}$，

∴ $x-\frac{5}{4}=\pm\frac{\sqrt{17}}{4}$，

解得：$x_1=\frac{5-\sqrt{17}}{4},x_2=\frac{5+\sqrt{17}}{4}$；

（2）$(x+2)^2=3x+6$，

$(x+2)^2=3(x+2)$，

$(x+2)(x+2-3)=0$，

即 $x+2=0$ 或 $x-1=0$，

解得：$x_1=-2,x_2=1$；

（3）$x^2+4x+2=0$，

∵ $a=1,b=4,c=2,\Delta=b^2-4ac=16-8=8>0$，

∴ $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-4\pm2\sqrt{2}}{2}=-2\pm\sqrt{2}$，

解得：$x_1=-2+\sqrt{2},x_2=-2-\sqrt{2}$；

（4）$(x+2)^2-10(x+2)+25=0$，

$\left[(x+2)-5\right]^2=0$，

即 $(x-3)^2=0$，

解得：$x_1=x_2=3$．

【点睛】

本题考查了解一元二次方程，掌握解一元二次方程的方法是解题的关键．

20．（1）5；（2）$\sqrt{5}$

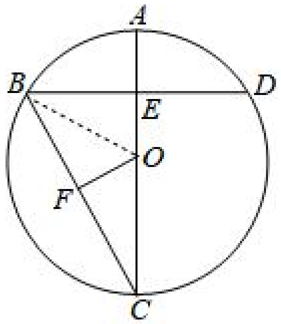
【分析】

（1）连接 OB，设半径为 r，则 $OE=r-2$，构建方程即可解决问题．

（2）根据 $S_{\triangle BCO}=\frac{1}{2}BC\cdot OF=\frac{1}{2}OC\cdot BE$，求解即可．

【详解】

解：（1）连接 OB，设半径为 r，则 $OE=r-2$，



∵AC 是⊙O 的直径，弦 $BD\perp AO$ 于 E，BD＝8cm，

∴BE＝DE＝4，

在 $Rt\triangle OBE$ 中，∵$OE^2+BE^2=OB^2$ ，

∴（r - 2）^{2}＋4^2＝r^2

∴r＝5

（2）∵r＝5，

∴AC＝10，EC＝8，BE＝DE＝4cm，

∴$BC=\sqrt{BE^2+EC^2}=4\sqrt{5}$（cm）

∵$OF\perp BC$，

∴$S_{\triangle}BCO=\frac{1}{2}BC\cdot OF=\frac{1}{2}OC\cdot BE$

∴$4\sqrt{5}\times OF=5\times4$，

∴$OF=\sqrt{5}$.

【点睛】

本题考查了垂径定理和勾股定理，解题的关键是熟记垂径定理和构造△OBE.

21.（1）见解析；（2）①见解析；②见解析

【分析】

（1）利用勾股定理列式求出 $AB=2\sqrt{5}$，然后利用相似三角形的判定与性质构造相似三角形，满足 AP：$BP=2:1$ 即可；

（2）①过点 C 作直径 CD，由于 $AC=BC$，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，根据垂径定理的推理得 CD 垂直平分 AB，所以 CD 将 $\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分；

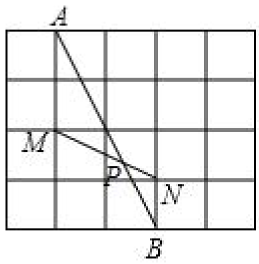
②延长 PO 交 BC 于 E，连接 AE 并延长交⊙O 于点 E，由于直线 l 与⊙O 相切于点 P，根据切线的性质得 $OP\perp l$，而 $l\parallel BC$，则 $PE\perp BC$，根据垂径定理得 $BE=CE$，所以弦 AE 将 $\triangle ABC$

分成面积相等的两部分．

【详解】

（1） $AB=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，作图如图所示；所以，$AP=\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$时，$AP$：$BP=2:1$．

点 P 如图所示．取格点 M，N，连接 MN 交 AB 于 P，则点 P 即为所求；



（2）①如图 2，CD 即为所求；

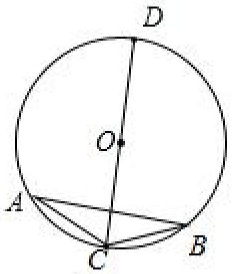


图2

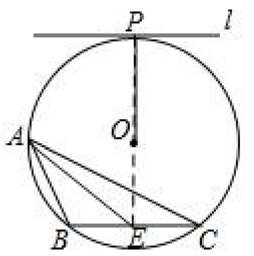


图3

②如图 3，CD 即为所求.

【点睛】

本题考查了相似三角形的性质与判定，垂径定理的应用，掌握垂径定理及其推理是解题的关键.

22.（1）1;（2）见解析.

【分析】

（1）把 x=2 代入方程中得到关于 k 的一元一次方程，解方程求出 k 的值，再把 k 的值代入原方程求出原方程的解即可；

（2）根据根的判别式进行判断即可.

【详解】

解：∵方程有一个根是 2，

∴4（k-2）-2k+2=0

解得：k=3.

∴原方程为：$x^2-3x+2=0$.

解得：$x_1=2$ 或 $x_2=1$．

∴该方程的另一个根为 1；

（2）∵ $\Delta=b^2-4ac=(-k)^2-4(k-2)\times 2$

$=k^2-8k+16$

$=(k-4)^2\ \geq 0$

∴无论 k 取何值，该方程总有实数根．

【点睛】

本题考查了一元二次方程的根的概念，根的判别式及一元二次方程的解法，掌握相关知识是解题的关键．

23．见解析

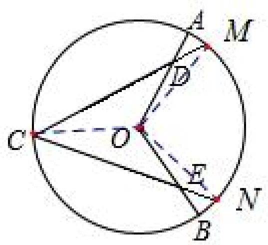
【分析】

(1)连结 CO,证△COD≌△COE,根据全等三角形的性质即可得到 CD=CE．

(2)分别连结 OM,ON,证∠AOM=∠BON，根据圆心角，弧的关系即可证明.

【详解】

(1)连结 CO,



∵在⊙O 中，点 C 是优弧 ACB 的中点，

∴$\angle AOC=\angle BOC$，

∵AD=BE，$OA=OB$，

∴$OD=OE$，

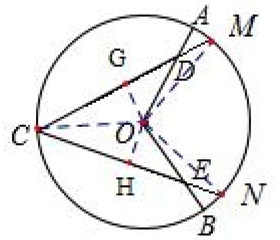
在△COD 和△COE 中，

$$\begin{cases} OC=OC \\ \angle COD=\angle COE \\ OD=OE, \end{cases}$$

∴△COD≌△COE(SAS)，

∴$CD=CE$.

(2)分别连结 OM,ON,过点 O 作 $OG\perp CM, OH\perp CN$,



易证$\triangle COG\cong\triangle COH$(SAS)，

得到$CG=CH$,

根据垂径定理得到$CM=CN$,

$CD=CE$.

$\therefore DM=EN$,

$\because \triangle COD\cong\triangle COE$.

$\therefore \angle ODC=\angle OEC$,

$\therefore \angle ODM=\angle OEN$,

又 $OD=OE$，

$\therefore \triangle DOM\cong\triangle EON$(SAS)，

$\angle$AOM=$\angle$BON，

$\widehat{AM}=\widehat{BN}$.

【点睛】

考查全等三角形的判定与性质，掌握全等三角形的判定方法是解题的关键.

24．(1)$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，理由见解析；

(2)$FM=3\sqrt{5}$

【分析】

（1）由题意，BD、CE是高，则$\angle ADB=\angle AEC=90°$，$\angle A$是公共角，即可得出$\triangle ABD\backsim\triangle ACE$，进而可推出$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$，又$\angle A=\angle A$，根据相似三角形的判定定理即可证得；

（2）连接DM、EM，根据等腰三角形的性质可得$EM=DM$，$MF\perp DE$，由已知条件得

$\frac{AD}{AB}=\frac{2}{3}=\frac{DE}{BC}$，进而可求得$EM=DM=9$，由勾股定理即可求出$FM$的长．

【详解】

（1）Q BD、CE是$\triangle ABC$的高．

$\therefore \angle ADB=\angle AEC=90^{\circ}$，

$\because \angle A=\angle A$，

$\therefore \triangle ABD\sim\triangle ACE$，

$\therefore \frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}$，即$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$，

$\because \angle A=\angle A$，

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle ABC$；

（2）连接DM、EM，

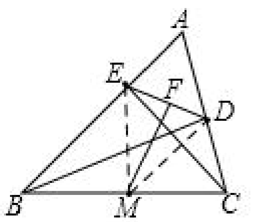


图2

$\because BD$是$\triangle ABC$的高，M为BC的中点，

$\therefore$在$Rt\triangle CBD$中，$MD=\frac{1}{2}BC$，

同理可得$ME=\frac{1}{2}BC$，

$\therefore EM=DM$，

$\because F$是DE的中点，

$\therefore MF\perp DE$，

由$\frac{BD}{AB}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，设$BD=\sqrt{5}k$，$AB=3k$

$\therefore AD=\sqrt{AB^{2}-BD^{2}}=2k$，

$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{2}{3}=\frac{DE}{BC}$，

$\because DE=12$,

$\therefore BC=18$

$\therefore EM = DM = 9$，

$\because MF \perp DE$，且 $FD = FE = \dfrac{1}{2}DE = 6$，

$\therefore FM = \sqrt{EM^2 - FE^2} = \sqrt{9^2 - 6^2} = 3\sqrt{5}$.

$\therefore FM = 3\sqrt{5}$.

【点睛】

本题主要考查了相似三角形的判定和性质，直角三角形斜边上中线的性质以及等腰三角形的判定与性质，综合运用以上知识是解题的关键.

25.（1）证明见解析；（2）$\odot O$ 的半径 OA 的长为 4

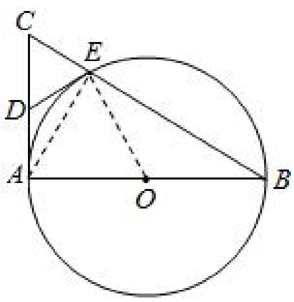
【分析】

（1）连接 AE 和 OE，由直角三角形的性质和圆周角定理易得∠OED=90°，可得 DE 是⊙O 的切线；

（2）在 Rt△ACE 中求得 AE 的长，证得 Rt△ABE～Rt△CAE，利用对应边成比例即可求解.

【详解】

（1）连接 AE，OE，



∵AB 是⊙O 的直径，

∴∠AEB=90°，

∵AC 是圆⊙O 的切线，

∴AC⊥AB，

在直角△AEC 中，

∵D 为 AC 的中点，

∴DE=DC=DA，

∴∠DEA=∠DAE，

∵OE=OA，

∴∠OEA=∠OAE，

∵∠DAE+∠OAE=90°，

∴∠DEA+∠OEA=∠DEO=90°，

∴OE⊥DE，

∴DE 是⊙O 的切线；

（2）∵AB 是⊙O 的直径，

∴∠AEB=∠AEC=90°，

在 Rt△ACE 中， CA=6， CE=3.6=$\frac{18}{5}$，

∴AE=$\sqrt{AC^2-CE^2}=\sqrt{6^2-\left(\frac{18}{5}\right)^2}=\frac{24}{5}$，

∴∠B+∠EAB=90°，

∵∠CAE+∠EAB=90°，

∴∠B=∠CAE，

∴Rt△ABE～Rt△CAE，

∴$\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{CE}$，即$\frac{AB}{6}=\frac{\frac{24}{5}}{\frac{18}{5}}$，

∴$AB=8$，

∴⊙O 的半径 OA=$\frac{1}{2}AB=4$.

【点睛】

本题考查了切线的判定、相似三角形的判定和性质以及勾股定理的应用，掌握切线的判定定理、相似三角形的判定定理和性质定理是解题的关键.

26．(1)普通口罩每包的售价为 12 元，$N95$ 口罩每包的售价为 28 元

(2)普通口罩每包的售价为 10 元

(3)32

【分析】

（1）设普通口罩每包的售价为x元，$N95$口罩每包的售价为y元，根据“$N95$口罩每包售价比普通口罩贵 16 元，7 包普通口罩和 3 包$N95$口罩总售价相同”，即可得出关于x，y的二元一次方程组，解之即可得出结论；

（2）设普通口罩每包的售价降低m元，则此时普通口罩每包的售价为$(12-m)$元，日均销售量为$(120+20m)$包，根据每天的利润＝每包的利润×日均销售量，即可得出关于m的一元二次方程，解之取其正值即可得出结论；

（3）设$N95$口罩每包售价是n元，根据利润＝销售收入－进货成本，即可用含n的代数式表示出a值，结合a的取值范围可得出n的取值范围，再结合a，n均为正整数，即可得出结论.

【详解】

（1）设普通口罩每包的售价为x元，$N95$口罩每包的售价为y元，

依题意，得：$\begin{cases} y-x=16 \\ 7x=3y \end{cases}$，

解得：$\begin{cases} x=12 \\ y=28 \end{cases}$.

答：普通口罩每包的售价为12元，$N95$口罩每包的售价为28元；

（2）设普通口罩每包的售价降低m元，则此时普通口罩每包的售价为$(12-m)$元，日均销售量为$(120+20m)$包，

依题意，得：$(12-m-8)(120+20m)=320$，

整理，得：$m^2+2m-8=0$，

解得：$m_1=2$，$m_2=-4$（不合题意，舍去）.

$\therefore 12-m=10$.

答：此时普通口罩每包的售价为10元；

（3）设$N95$口罩每包的售价是n元，

依题意，得：$(20000-a)n-20\times 20000=20\times 20000\times 10\%$，$\frac{220}{7}\bullet n\bullet \frac{440}{13}$，

$\therefore a=20000-\frac{440000}{n}$.

$\because 6000\bullet a\bullet 7000$，

$\therefore 6000\bullet 20000-\frac{440000}{n}\bullet 7000$，

又$\because a$和n均为正整数，

$\therefore n=32$.

故答案为：32.

【点睛】

本题考查了二元一次方程组的应用以及一元二次方程的应用，一元一次不等式的应用，根据题意列出方程（组）是解题的关键.

27．(1)当$AC=\frac{4}{3}$或$\frac{9}{2}$或$\sqrt{6}$时，$\triangle ABC$是比例三角形；(2)证明见解析；(3) $\frac{BD}{AC}=\sqrt{2}$.

【分析】

（1）根据比例三角形的定义分$AB^2=BC\cdot AC$、$BC^2=AB\cdot AC$、$AC^2=AB\cdot BC$三种情况分别代入计算可得；

（2）先证△ABC∽△DCA得$CA^2=BC\cdot AD$，再由∠ADB＝∠CBD＝∠ABD知AB＝AD即可得；

（3）作AH⊥BD，由AB＝AD知$BH=\frac{1}{2}BD$，再证△ABH∽△DBC得$AB\cdot BC=BH\cdot DB$，即$AB\cdot BC=\frac{1}{2}BD^2$，结合$AB\cdot BC=AC^2$知$\frac{1}{2}BD^2=AC^2$，据此可得答案.

【详解】

（1）∵△ABC是比例三角形，且AB＝2、BC＝3，

①当$AB^2=BC\cdot AC$时，得：$4=3AC$，解得：$AC=\frac{4}{3}$；

②当$BC^2=AB\cdot AC$时，得：$9=2AC$，解得：$AC=\frac{9}{2}$；

③当$AC^2=AB\cdot BC$时，得：$AC^2=6$，解得：$AC=\sqrt{6}$（负值舍去）；

所以当$AC=\frac{4}{3}$或$\frac{9}{2}$或$\sqrt{6}$时，△ABC是比例三角形；

（2）∵AD∥BC，

∴∠ACB＝∠CAD，

又∵∠BAC＝∠ADC，

∴△ABC∽△DCA，

∴BC：CA＝CA：AD，

即$CA^2=BC\cdot AD$，

∵AD∥BC，

∴∠ADB＝∠CBD，

∵BD平分∠ABC，

∴∠ABD＝∠CBD，

∴∠ADB＝∠ABD，

∴AB＝AD，

∴CA^2＝BC•AB，

∴△ABC 是比例三角形；

（3）如图，过点 A 作 AH⊥BD 于点 H，

∵AB＝AD，

∴BH＝$\frac{1}{2}$BD，

∵AD∥BC，∠ADC＝90°，

∴∠BCD＝90°，

∴∠BHA＝∠BCD＝90°，

又∵∠ABH＝∠DBC，

∴△ABH∽△DBC，

∴AB：DB＝BH：BC，

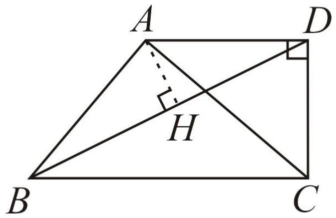
即 AB•BC＝BH•DB，

∴AB•BC＝$\frac{1}{2}$$BD^2$，

又∵AB•BC＝AC^2，

∴$\frac{1}{2}$$BD^2$＝$AC^2$，

∴$\frac{BD}{AC}=\sqrt{2}$．



【点睛】

本题考查了相似三角形的综合问题，理解比例三角形的定义，熟练掌握和运用相似三角形的判定与性质是解题的关键．

28．(1)$\triangle ABE\backsim\triangle CBD$，理由见解析

(2)当A、E、F三点在一直线上时，CD的长为$\sqrt{14}-\sqrt{2}$或$\sqrt{14}+\sqrt{2}$．

(3)$\sqrt{2}\le FM\le 3\sqrt{2}$

【分析】

（1）根据等腰三角形的性质和相似三角形的判定可以判断$\triangle ABE \backsim \triangle CBD$.

（2）根据相似三角形的性质得到$AB=\sqrt{2}BC=4\sqrt{2}$，根据勾股定理得到$AF=2\sqrt{7}$，接下来分两种情形：当点E在线段AF上时，当E在AF延长线上时，即可得到结论；

（3）如图2，延长EF到G使$FG=EF$，连接AG，BG，则$\triangle BFG$是等腰直角三角形，，得到$BG=\sqrt{2}BF=2\sqrt{2}$，连接MF，根据三角形中位线定理得到$AG=2FM$，根据三角形的三边关系即可得出结论.

【详解】

（1）解：$\triangle ABE \backsim \triangle CBD$，

∵在Rt$\triangle ABC$中，$AC=BC=4$，$\angle ACB=90°$，

∴$\angle ABC=\angle EBD=45°$，

∴$\angle ABE=\angle CBD$，

∵$\frac{AB}{BC}=\sqrt{2}$，$\frac{BE}{BD}=\sqrt{2}$，

∴$\frac{AB}{BC}=\frac{BE}{BD}$，

∴$\triangle ABE \backsim \triangle CBD$；

（2）∵$AC=BC=4$，$\angle ACB=90°$，

∴$AB=\sqrt{2}BC=4\sqrt{2}$，

∵当A、E、F三点在一直线上时，

∵$\angle AFB=90°$，

∴$AF=\sqrt{AB^2-BF^2}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2-2^2}=2\sqrt{7}$，

如图1，当点E在线段AF上时，$AE=AF-EF=2\sqrt{7}-2$，

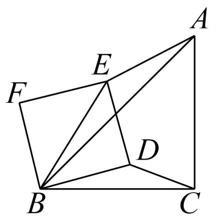


图1

∵$AE=\sqrt{2}CD$，

∴$CD=\frac{\sqrt{2}}{2}AE=\sqrt{14}-\sqrt{2}$；

如图2，当E在AF延长线上时，

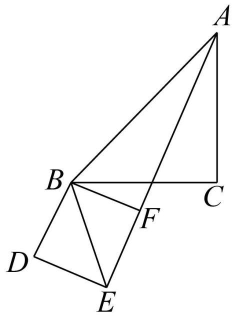


图2

同理，$AE=AF+EF=2\sqrt{7}+2$，

$\therefore CD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AE=\sqrt{14}+\sqrt{2}$，

综上所述，当A、E、F三点在一直线上时，CD的长为$\sqrt{14}-\sqrt{2}$或$\sqrt{14}+\sqrt{2}$；

（3）如图3，延长EF到G使$FG=EF$，连接AG，BG，则$\triangle BFG$是等腰直角三角形，

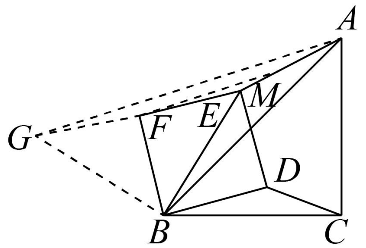


图3

$\therefore BG=\sqrt{2}BF=2\sqrt{2}$，

AE的中点为M，连接MF，

$\therefore MF$是$\triangle AGE$的中位线，

$\therefore AG=2FM$，

在$\triangle ABG$中

，$\because AB-BG\le AG\le AB+BG$，

$\therefore 2\sqrt{2}\le AG\le 6\sqrt{2}$，

$\therefore \sqrt{2}\le FM\le 3\sqrt{2}$．

【点睛】

本题考查了相似三角形的综合内容，这涉及到相似三角形的性质与判定，正方形的性质，三角形中位线定理，能正确做出相关的辅助线是解决本体的关键．