微专题 64 利用空间向量解立体几何问题

一、基础知识

（一）刻画直线与平面方向的向量

1、直线：用直线的方向向量刻画直线的方向问题，而方向向量可由直线上的两个点来确定

例如：$A(2,4,6),B(3,0,2)$，则直线 AB 的方向向量为 $\overrightarrow{AB}=(1,-4,-4)$

2、平面：用平面的法向量来刻画平面的倾斜程度，何为法向量？与平面 α 垂直的直线称为平面 α 的法线，法线的方向向量就是平面 α 的法向量，如何求出指定平面的法向量呢？

（1）所需条件：平面上的两条不平行的直线

（2）求法：（先设再求）设平面 α 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，若平面上所选两条直线的方向向量分别为 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1),\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则可列出方程组：

$$\begin{cases} x_1x+y_1y+z_1z=0 \\ x_2x+y_2y+z_2z=0 \end{cases}$$ 解出 x,y,z 的比值即可

例如：$\vec{a}=(1,2,0),\vec{b}=(2,1,3)$，求 $\vec{a},\vec{b}$ 所在平面的法向量

解：设 $\vec{n}=(x,y,z)$，则有 $\begin{cases} x+2y=0 \\ 2x+y+3z=0 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} x=-2y \\ z=y \end{cases}$

$\therefore x:y:z=-2:1:1 \quad \therefore \vec{n}=(-2,1,1)$

（二）空间向量可解决的立体几何问题（用 $\vec{a},\vec{b}$ 表示直线 a,b 的方向向量，用 $\vec{m},\vec{n}$ 表示平面 α,β 的法向量）

1、判定类

（1）线面平行：$a/\!/b \Leftrightarrow \vec{a}/\!/\vec{b}$

（2）线面垂直：$a\perp b \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$

（3）面面平行：$\alpha/\!/\beta \Leftrightarrow \vec{m}/\!/\vec{n}$

（4）面面垂直：$\alpha\perp\beta \Leftrightarrow \vec{m}\perp\vec{n}$

2、计算类：

（1）两直线所成角：$\cos\theta=\left|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\right|=\left|\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right|$

（2）线面角：$\sin\theta=\left|\cos\left\langle \vec{a},\vec{m}\right\rangle\right|=\left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{m}}{|\vec{a}||\vec{m}|}\right|$

（3）二面角：$\cos\theta=\cos\left\langle \vec{m},\vec{n}\right\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}$ 或 $\cos\theta=-\cos\left\langle \vec{m},\vec{n}\right\rangle=-\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}$（视平面角与法向量夹角关系而定）

（4）点到平面距离：设 A 为平面 α 外一点，P 为平面 α 上任意一点，则 A 到平面 α 的距离为 $d_{A-\alpha}=\left|\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|$，即 $\overrightarrow{AP}$ 在法向量 $\vec{n}$ 上投影的绝对值。

（三）点的存在性问题：在立体几何解答题中，最后一问往往涉及点的存在性问题，即是否在某条线上存在一点，使之满足某个条件，本讲主要介绍使用空间向量解决该问题时的方法与技巧

1、理念：**先设再求**——先设出所求点的坐标 (x,y,z)，再想办法利用条件求出坐标

2、解题关键：**减少变量数量**——(x,y,z) 可表示空间中的任一点，但题目中所求点往往是确定在某条线或者某个平面上的，所以使用三个变量比较“浪费”(变量多，条件少，无法求解)，要考虑减少变量的个数，最终所使用变量的个数可根据如下条件判断：

（1）直线（一维）上的点：用一个变量就可以表示出所求点的坐标

（2）平面（二维）上的点：用两个变量可以表示所求点坐标

规律：**维度=所用变量个数**

3、如何减少变量：

（1）直线上的点（重点）：平面向量共线定理——若 $\vec{a}//\vec{b}\Rightarrow\exists\lambda\in R$, 使得 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$

例：已知 $A(1,3,4),P(0,2,1)$，那么直线 AP 上的某点 $M(x,y,z)$ 坐标可用一个变量表示，

方法如下：$\overrightarrow{AM}=(x-1,y-3,z-4),\overrightarrow{AP}=(-1,-1,-3)$——三点中取两点构成两个向量

因为 M 在 AP 上，所以 $\overrightarrow{AM}//\overrightarrow{AP}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AP}$ ——共线定理的应用（关键）

$\therefore\begin{cases}x-1=-\lambda\\y-3=-\lambda\\z-4=-3\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1-\lambda\\y=3-\lambda\\z=4-3\lambda\end{cases}$，即 $M(1-\lambda,3-\lambda,4-3\lambda)$——仅用一个变量 λ 表示

（2）平面上的点：平面向量基本定理——若 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线，则平面上任意一个向量 $\vec{c}$，均存在 $\lambda,\beta\in R$，使得：$\vec{c}=\lambda\vec{a}+\beta\vec{b}$

例：已知 $A(1,3,4),P(0,2,1),Q(2,4,0)$，则平面 APQ 上的某点 $M(x,y,z)$ 坐标可用两个变