

微专题 88 含有条件概率的随机变量问题

一、基础知识：

1、条件概率：事件 B 在事件 A 已经发生的情况下，发生的概率称为 B 在 A 条件下的条件概率，记为 $P(B|A)$

2、条件概率的计算方法：

(1) 按照条件概率的计算公式：
$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

(2) 考虑事件 A 发生后，题目产生了如何的变化，并写出事件 B 在这种情况下的概率

例如：5 张奖券中有一张有奖，甲，乙，丙三人先后抽取，且抽完后不放回，已知甲没有中奖，则乙中奖的概率：

按照 (1) 的方法：设事件 A 为“甲没中奖”，事件 B 为“乙中奖”，则所求事件为 $B|A$ ，按照

公式，分别计算 $P(AB), P(A)$ ，利用古典概型可得： $P(AB) = \frac{4}{A_5^2} = \frac{1}{5}$ ， $P(A) = \frac{4}{5}$ ，所以

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{4}$$

按照 (2) 的方法：考虑甲已经抽完了，且没有中奖，此时还有 4 张奖券，1 张有奖。那么轮到乙抽时，乙抽中的概率即为 $\frac{1}{4}$

3、含条件概率的乘法公式：设事件 A, B ，则 A, B 同时发生的概率 $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$ ，此时 $P(B|A)$ 通常用方案 (2) 进行计算

4、处理此类问题要注意以下几点：

(1) 要分析好几个事件间的先后顺序，以及先发生的事件对后面事件的概率产生如何的影响（即后面的事件算的是条件概率）

(2) 根据随机变量的不同取值，事件发生的过程会有所不同，要注意区别

(3) 若随机变量取到某个值时，情况较为复杂，不利于正面分析，则可以考虑先求出其它取值时的概率，然后用间接法解决。

二、典型例题：

例 1：袋中有大小相同的三个球，编号分别为 1, 2, 3，从袋中每次取出一个球，若取到的球的

编号为 2，则把该球编号记下再把编号数改为 1 后放回袋中继续取球；若取到的球的编号为奇数，则取球停止，取球停止后用 X 表示“所有被取球的编号之和”

(1) 求 X 的分布列

(2) 求 X 的数学期望及方差

思路：(1) 依题意可知如果取球取出的是 1,3，则取球停止，此时 X 的值为 1 或 3；当取球取出的是 2 号球时，按照规则要改为 1 号球放进去重取，再取时只能取到 1 或 3，所有编号之和 X 的值为 3,5，所以可知 X 可取的值为 1,3,5，当 $X=1$ 时，意味着直接取到了 1 号球（概率为 $\frac{1}{3}$ ）；当 $X=3$ 时，分为两种情况，一种为直接取到 3（概率为 $\frac{1}{3}$ ），另一种为取到了 2（概率为 $\frac{1}{3}$ ），改完数字后再取到 1（概率为 $\frac{2}{3}$ ）；当 $X=5$ 时，为取到了 2（概率为 $\frac{1}{3}$ ），改完数字后再取到 3（概率为 $\frac{1}{3}$ ），从而可计算出概率。进而得到分布列与期望方差

解：(1) X 可取的值为 1,3,5

$$\therefore P(X=1)=\frac{1}{3} \quad P(X=3)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{9}$$

$$P(X=5)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

$\therefore X$ 的分布列为：

X	1	3	5
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$

$$(2) EX=1\times\frac{1}{3}+3\times\frac{5}{9}+5\times\frac{1}{9}=\frac{23}{9}$$

$$DX=\frac{1}{3}\left(1-\frac{23}{9}\right)^2+\frac{5}{9}\left(3-\frac{23}{9}\right)^2+\frac{1}{9}\left(5-\frac{23}{9}\right)^2=\frac{176}{81}$$

例 2：深圳市某校中学生篮球队假期集训，集训前共有 6 个篮球，其中 3 个是新球(即没有用过的球)，3 个是旧球(即至少用过一次的球)。每次训练，都从中任意取出 2 个球，用完后放回。

(1) 设第一次训练时取到的新球个数为 ξ ，求 ξ 的分布列和数学期望；

(2) 求第二次训练时恰好取到一个新球的概率。

(1) 思路：第一次训练时所取得球是从 6 个球（3 新，3 旧）中不放回取出 2 个球，所以可

判断出 ξ 服从超几何分布，即可利用其公式计算概率与分布列，并求得期望