微专题76 圆锥曲线中的存在性问题

一、基础知识

1、在处理圆锥曲线中的存在性问题时，通常先假定所求的要素（点，线，图形或是参数）存在，并用代数形式进行表示。再结合题目条件进行分析，若能求出相应的要素，则假设成立；否则即判定不存在

2、存在性问题常见要素的代数形式：未知要素用字母代替

（1）点：坐标$\left(x_0, y_0\right)$

（2）直线：斜截式或点斜式（通常以斜率为未知量）

（3）曲线：含有未知参数的曲线标准方程

3、解决存在性问题的一些技巧：

（1）特殊值（点）法：对于一些复杂的题目，可通过其中的特殊情况，解得所求要素的必要条件，然后再证明求得的要素也使得其它情况均成立。

（2）核心变量的选取：因为解决存在性问题的核心在于求出未知要素，所以通常以该要素作为核心变量，其余变量作为辅助变量，必要的时候消去。

（3）核心变量的求法：

①直接法：利用条件与辅助变量直接表示出所求要素，并进行求解

②间接法：若无法直接求出要素，则可将核心变量参与到条件中，列出关于该变量与辅助变量的方程（组），运用方程思想求解。

二、典型例题：

例 1：已知椭圆$C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，过右焦点$F$的直线$l$与$C$相交于$A, B$两点，当$l$的斜率为$1$时，坐标原点$O$到$l$的距离为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

（1）求a, b的值

（2）C上是否存在点P，使得当l绕F旋转到某一位置时，有$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$成立？若存在，求出所有的$P$的坐标和$l$的方程，若不存在，说明理由

解：（1）$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a:b:c=\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$

则 $a=\sqrt{3}c,b=\sqrt{2}c$，依题意可得：$F\left(c,0\right)$，当 l 的斜率为1时

$l: y=x-c \Rightarrow x-y-c=0$

$\therefore d_{O-l}=\frac{|c|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 解得：$c=1$

$\therefore a=\sqrt{3},b=\sqrt{2}$ 椭圆方程为：$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$

（2）设 $P\left(x_0,y_0\right)$，$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$

当 l 斜率存在时，设 $l: y=k\left(x-1\right)$

$\because \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ $\therefore \begin{cases} x_0=x_1+x_2 \\ y_0=y_1+y_2 \end{cases}$

联立直线与椭圆方程：$\begin{cases} y=k\left(x-1\right) \\ 2x^2+3y^2=6 \end{cases}$ 消去 y 可得：$2x^2+3k^2\left(x-1\right)^2=6$，整理可得：

$\left(3k^2+2\right)x^2-6k^2x+3k^2-6=0$

$\therefore x_1+x_2=\frac{6k^2}{3k^2+2}$ $y_1+y_2=k\left(x_1+x_2\right)-2k=\frac{6k^3}{3k^2+2}-2k=-\frac{4k}{3k^2+2}$

$\therefore P\left(\frac{6k^2}{3k^2+2},-\frac{4k}{3k^2+2}\right)$ 因为 P 在椭圆上

$\therefore 2\cdot\left(\frac{6k^2}{3k^2+2}\right)^2+3\left(-\frac{4k}{3k^2+2}\right)^2=6$

$\therefore 72k^4+48k^2=6\left(3k^2+2\right)^2 \Rightarrow 24k^2\left(3k^2+2\right)=6\left(3k^2+2\right)^2$

$\therefore 24k^2=6\left(3k^2+2\right) \Rightarrow k=\pm\sqrt{2}$

当 $k=\sqrt{2}$ 时，$l: y=\sqrt{2}\left(x-1\right)$，$P\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

当 $k=-\sqrt{2}$ 时，$l: y=-\sqrt{2}\left(x-1\right)$，$P\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

当斜率不存在时，可知 $l: x=1$，$A\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right),B\left(1,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，则 $P\left(2,0\right)$ 不在椭圆上