

微专题 67 圆锥曲线的性质

一、基础知识

（一）椭圆：

1、定义和标准方程：

（1）平面上到两个定点 F_1, F_2 的距离和为定值（定值大于 $|F_1F_2|$ ）的点的轨迹称为椭圆，其中

F_1, F_2 称为椭圆的焦点， $|F_1F_2|$ 称为椭圆的焦距

（2）标准方程：

① 焦点在 x 轴上的椭圆：设椭圆上一点 $P(x, y)$ ， $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ ，设距离和

$|PF_1| + |PF_2| = 2a$ ，则椭圆的标准方程为： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，其中 $(a > b > 0, b^2 = a^2 - c^2)$

② 焦点在 y 轴上的椭圆：设椭圆上一点 $P(x, y)$ ， $F_1(0, -c), F_2(0, c)$ ，设距离和

$|PF_1| + |PF_2| = 2a$ ，则椭圆的标准方程为： $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ ，其中 $(a > b > 0, b^2 = a^2 - c^2)$

焦点在哪个轴上，则标准方程中哪个字母的分母更大

2、椭圆的性质：以焦点在 x 轴的椭圆为例： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$

（1） a ：与长轴的顶点有关： $A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$ ， $|A_1A_2| = 2a$ 称为长轴长

b ：与短轴的顶点有关： $B_1(0, -b), B_2(0, b)$ ， $|B_1B_2| = 2b$ 称为短轴长

c ：与焦点有关： $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ ， $|F_1F_2| = 2c$ 称为焦距

（2）对称性：椭圆关于 x 轴， y 轴对称，且关于原点中心对称

（3）椭圆上点的坐标范围：设 $P(x_0, y_0)$ ，则 $-a \leq x_0 \leq a, -b \leq y_0 \leq b$

（4）通径：焦点弦长的最小值

① 焦点弦：椭圆中过焦点的弦

② 过焦点且与长轴垂直的弦 $|PQ| = \frac{2b^2}{a}$

说明：假设 PQ 过 $F_1(-c, 0)$ ，且与长轴垂直，则 $P(-c, y_0), Q(-c, -y_0)$ ，所以

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y_0^2 = \frac{b^4}{a^2}, \text{ 可得 } y_0 = \frac{b^2}{a}. \text{ 则 } |PQ| = \frac{2b^2}{a}$$

(5) 离心率: $e = \frac{c}{a}$, 因为 $c < a$, 所以 $e \in (0,1)$

(6) 焦半径公式: 称 P 到焦点的距离为椭圆的焦半径

① 设椭圆上一点 $P(x_0, y_0)$, 则 $|PF_1| = a + ex_0, |PF_2| = a - ex_0$ (可记为“左加右减”)

② 焦半径的最值: 由焦半径公式可得: 焦半径的最大值为 $a + c$, 最小值为 $a - c$

(7) 焦点三角形面积: $S_{\triangle PF_1F_2} = b^2 \tan \frac{\theta}{2}$ (其中 $\theta = \angle PF_1F_2$)

$$\text{证明: } S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} |PF_1| \cdot |PF_2| \sin \angle F_1PF_2$$

$$\text{且 } |F_1F_2|^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1||PF_2|\cos \angle F_1PF_2$$

$$= (|PF_1| + |PF_2|)^2 - 2|PF_1||PF_2|(1 + \cos \angle F_1PF_2)$$

$$\therefore 4c^2 = 4a^2 - 2|PF_1||PF_2|(1 + \cos \angle F_1PF_2)$$

$$\therefore |PF_1||PF_2| = \frac{2a^2 - 2c^2}{1 + \cos \angle F_1PF_2} = \frac{2b^2}{1 + \cos \angle F_1PF_2}$$

$$S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} |PF_1| \cdot |PF_2| \sin \angle F_1PF_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2b^2}{1 + \cos \angle F_1PF_2} \sin \angle F_1PF_2$$

$$= b^2 \cdot \frac{\sin \angle F_1PF_2}{1 + \cos \angle F_1PF_2} = b^2 \tan \frac{\angle F_1PF_2}{2}$$

因为 $S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} \cdot 2c \cdot y_0 = c \cdot y_0$, 所以 $b^2 \tan \frac{\angle F_1PF_2}{2} = c \cdot y_0$, 由此得到的推论:

① $\angle F_1PF_2$ 的大小与 y_0 之间可相互求出

② $\angle F_1PF_2$ 的最大值: $\angle F_1PF_2$ 最大 $\Leftrightarrow S_{\triangle PF_1F_2}$ 最大 $\Leftrightarrow y_0$ 最大 $\Leftrightarrow P$ 为短轴顶点

(二) 双曲线:

1、定义: 平面上到两个定点 F_1, F_2 距离差的绝对值为一个常数 (小于 $|F_1F_2|$) 的点的轨迹称为双曲线, 其中 F_1, F_2 称为椭圆的焦点, $|F_1F_2|$ 称为椭圆的焦距; 如果只是到两个定点 F_1, F_2 距离差为一个常数, 则轨迹为双曲线的一支

2、标准方程: