

微专题 94 极坐标与参数方程

极坐标与参数方程在高考中常以填空或选择的形式出现,在知识上结合解析几何,考查学生曲线方程的转化能力,以及解析几何的初步技能。题目难度不大,但需要学生能够快速熟练的解决问题

一、基础知识:

(一)极坐标:

1、极坐标系的建立:以平面上一点为中心(作为极点),由此点引出一条射线,称为极轴,这样就建立了一个极坐标系

2、点坐标的刻画:用一组有序实数对 (ρ, θ) 确定平面上点的位置,其中 ρ 代表该点到极点的距离,而 θ 表示极轴绕极点逆时针旋转至过该点时转过的角度,通常: $\rho > 0, \theta \in [0, 2\pi)$

3、直角坐标系与极坐标系坐标的互化:如果将极坐标系的原点与直角坐标系的原点重合,极轴与 x 轴重合,则同一个点可具备极坐标 (ρ, θ) 和直角坐标 (x, y) ,那么两种坐标间的转化公

式为:
$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ \rho^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$
 , 由点组成的直角坐标方程与极坐标方程也可按照此法则进行转化,例

如:极坐标方程 $\rho \cos \theta + \rho \sin \theta = 1 \Rightarrow x + y = 1$ (在转化成 x, y 时要设法构造 $\rho \cos \theta, \rho \sin \theta$, 然后进行整体代换即可)

(二)参数方程:

1、如果曲线 $F(x, y) = 0$ 中的变量 x, y 均可以写成关于参数 t 的函数
$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$
 , 那么

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$
 就称为该曲线的参数方程,其中 t 称为参数

2、参数方程与一般方程的转化:消参法

(1)代入消参:
$$\begin{cases} x = t + 3 \\ y = 2 + 3t \end{cases} \Rightarrow y = 2 + 3(x - 3)$$

(2)整体消参:
$$\begin{cases} x = t + \frac{1}{t} \\ y = t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases}$$
 , 由 $\left(t + \frac{1}{t}\right)^2 = t^2 + \frac{1}{t^2} + 2$ 可得: $x^2 = y + 2$

(3)平方消参:利用 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 消去参数

例如：
$$\begin{cases} x = 3 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = \cos \theta \\ \frac{y}{2} = \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

3、常见图形的参数方程：

(1) 圆： $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 的参数方程为： $\begin{cases} x = a + r \cos \theta \\ y = b + r \sin \theta \end{cases}$ ， $\theta \in [0, 2\pi)$ ，其中 θ 为

参数，其几何含义为该圆的圆心角

(2) 椭圆： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$ ， $\theta \in [0, 2\pi)$ ，其中 θ 为参数，

其几何含义为椭圆的离心角

(3) 双曲线： $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = a \frac{1}{\cos \theta} \\ y = b \tan \theta \end{cases}$ ， $\theta \in [0, 2\pi)$ ，其中 θ 为

参数，其几何含义为双曲线的离心角

(4) 抛物线： $y^2 = 2px (p > 0)$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}$ ，其中 t 为参数

(5) 直线：过 $M(a, b)$ ，倾斜角为 θ 的直线参数方程为 $\begin{cases} x = a + t \cos \theta \\ y = b + t \sin \theta \end{cases}$ ， $t \in R$ ，其中 $|t|$ 代

表该点与 M 的距离

注：对于极坐标与参数方程等问题，通常的处理手段是将方程均转化为直角坐标系下的一般方程，然后利用传统的解析几何知识求解

二、典型例题：

例 1：已知直线参数方程为 $\begin{cases} x = t + 3 \\ y = 3 - t \end{cases}$ ，圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta + 2 \end{cases}$ ，则圆心到直线的

距离为_____

思路：将参数方程转化为一般方程： $l: x + y = 6$, $\odot C: x^2 + (y - 2)^2 = 4$

所以圆心为 $(0, 2)$ ，到直线的距离为： $d = \frac{|2 - 6|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

答案： $2\sqrt{2}$

例 2：以直角坐标系的原点为极点， x 轴非负半轴为极轴，建立极坐标系，在两种坐标系中取

相同的单位长度，点 A 的极坐标为 $(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ ，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + \cos \theta \\ y = -2 + \sin \theta \end{cases}$ ，则曲