

微专题 71 求曲线（或直线）的方程

一、基础知识：

1、求曲线（或直线）方程的思考方向大体有两种，一个方向是题目中含几何意义的条件较多（例如斜率，焦距，半轴长，半径等），那么可以考虑利用几何意义求出曲线方程中的要素的值，从而按定义确定方程；另一个方向是若题目中没有明显的几何条件，主要依靠代数运算，那么就考虑先用待定系数法设出方程（未知的部分用字母代替），从而该方程便可参与题目中的运算，再利用题目条件求出参数的值，即可确定方程。可以说两个方向各有侧重，一个倾向于几何意义，另一个倾向于代数运算，下面将对两个方向涉及到的知识进行详细梳理

2、所学方程中字母的几何意义

（1）直线：斜率； (x_0, y_0) ：直线所过的定点

（2）圆： (a, b) ：圆心的坐标； r ：圆的半径

（3）椭圆： $2a$ ：长轴长，焦半径的和； $2b$ ：短轴长； $2c$ ：焦距

（4）双曲线： $2a$ ：实轴长，焦半径差的绝对值； $2b$ ：虚轴长； $2c$ ：焦距

注：在椭圆和双曲线中，很多几何性质也围绕着 a, b, c 展开，通过这些条件也可以求出 a, b, c 的值，从而确定曲线方程。例如（椭圆与双曲线共有的）：

离心率： $e = \frac{c}{a}$ ；通径（焦点弦长的最小值）： $\frac{2b^2}{a}$ 等

（5）抛物线： p ：焦准距

3、待定系数法中方程的形式：

（1）直线与曲线方程通式：

① 直线： $y = kx + m$ ， $x = my + t$

② 圆： $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

③ 椭圆：

标准方程： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ （或 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，视焦点所在轴来决定）

椭圆方程通式： $mx^2 + ny^2 = 1 (m > 0, n > 0)$

④ 双曲线：

标准方程： $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ （或 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，视焦点所在轴决定）

双曲线方程通式： $mx^2 - ny^2 = 1 (mn > 0)$

⑤ 抛物线：

标准方程： $y^2 = 2px (p > 0)$ 等

抛物线方程通式： $y^2 = mx, x^2 = my$

（2）曲线系方程：具有一类特征的曲线的集合，通常曲线方程中含有参数。曲线系方程的一大好处在于若根据题目条件设出合适的曲线系方程，则将问题转化为利用条件求解参数，让解题目标更为明确，曲线系方程也是待定系数法求方程的一种方法。常见的曲线系方程如下：

① 过相交直线 $\begin{cases} l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$ 的交点的直线系方程为：

$l_1 + \lambda l_2 = 0$ 即 $A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ （其中 λ 为参数）

② 与直线 $Ax + By + C = 0$ 平行的直线系方程为： $Ax + By + \lambda = 0$ （其中 λ 为参数）

③ 与直线 $Ax + By + C = 0$ 垂直的直线系方程为： $Bx - Ay + \lambda = 0$ （其中 λ 为参数）

④ 过相交两圆 $\begin{cases} \odot C_1: x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0 \\ \odot C_2: x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0 \end{cases}$ 交点的圆系方程为：

$C_1 + \lambda C_2 = 0 (\lambda \neq -1)$ 即 $x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + \lambda(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0$

⑤ 若直线 $l: Ax + By + C = 0$ 与圆 $C_1: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 有公共点，则过公共点的圆系方程为：

$C + \lambda l = 0$ 即 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F + \lambda(Ax + By + C) = 0$

⑥ 相同渐进线的双曲线系方程：与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 渐近线相同的双曲线系方程为：

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \lambda (\lambda \neq 0)$$

二、典型例题：

例 1：已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴长为 4，若点 P 是椭圆 C 上任意一点，过原