

微专题 97 不等式选讲

一、基础知识：

（一）不等式的形式与常见不等式：

1、不等式的基本性质：

$$(1) a > b \Leftrightarrow b < a$$

$$(2) a > b, b > c \Rightarrow a > c \text{ (不等式的传递性)}$$

注： $a \geq b, b \geq c \Rightarrow a \geq c$ ， $a \geq c$ 等号成立当且仅当前两个等号同时成立

$$(3) a > b \Rightarrow a + c > b + c$$

$$(4) a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc; a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$$

$$(5) a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n (n \geq 2, n \in \mathbb{N})$$

$$(6) a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} (n \geq 2, n \in \mathbb{N})$$

2、绝对值不等式： $\|a\| - \|b\| \leq \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$

$$(1) \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \text{ 等号成立条件当且仅当 } ab \geq 0$$

$$(2) \|a\| - \|b\| \leq \|a + b\| \text{ 等号成立条件当且仅当 } ab \leq 0$$

$$(3) \|a - b\| + \|b - c\| \geq \|a - c\|: \text{ 此性质可用于求含绝对值函数的最小值，其中等号成立当且}$$

$$\text{仅当 } (a - b)(b - c) \geq 0$$

3、均值不等式

（1）涉及的几个平均数：

$$\textcircled{1} \text{ 调和平均数: } H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

$$\textcircled{2} \text{ 几何平均数: } G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

$$\textcircled{3} \text{ 代数平均数: } A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

$$\textcircled{4} \text{ 平方平均数: } Q_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

$$(2) \text{ 均值不等式: } H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n, \text{ 等号成立的条件均为: } a_1 = a_2 = \cdots = a_n$$

(3) 三项均值不等式:

$$\textcircled{1} \quad a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \quad a^2+b^2+c^2 \geq 3abc$$

$$\textcircled{2} \quad abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^3$$

$$\textcircled{3} \quad a+b+c \leq 3\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

$$4、柯西不等式: (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$

等号成立条件当且仅当 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ 或 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$

(1) 二元柯西不等式: $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2$, 等号成立当且仅当 $ad=bc$

(2) 柯西不等式的几个常用变形

① 柯西不等式的三角公式:

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2} + \sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2} \geq \sqrt{(a_1 \pm b_1)^2 + (a_2 \pm b_2)^2 + \cdots + (a_n \pm b_n)^2}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \right) (b_1+b_2+\cdots+b_n) \geq (a_1+a_2+\cdots+a_n)^2$$

②式体现的是当各项 $a_1^2, a_2^2, \cdots, a_n^2$ 系数不同时, 其“平方和”与“项的和”之间的不等关系,

刚好是均值不等式的一个补充。

$$\textcircled{3} \quad \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}$$

5、排序不等式: 设 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ 为两组实数, $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是 $b_1, b_2, \cdots, b_n$

的任一排列, 则有:

$$a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1 \leq a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n \leq a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

即“反序和 $\leq$ 乱序和 $\leq$ 顺序和”

(二) 不等式选讲的考察内容:

1、利用不等式的变形与常见不等式证明不等式成立